

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

विज्ञान (स्नातक) कार्यक्रम अधिन्यास सत्र 2017-18

कोर्स कोड : Course Code: UGMM-02	कोर्स शीर्षक:- (Course Title) Linear Algebra	अधिकतम अंक : 30 Maximum Marks : 30
-------------------------------------	--	---------------------------------------

नोट- (Instructions)

1. Attempt any three questions section A and Four questions section B.
खण्ड अ से किन्हीं तीन तथा खण्ड ब से किन्हीं चार प्रश्नों का उत्तर दीजिये।
2. Question No. 1 to 9 are long answer questions answer should be in 800 to 1000 words
प्रश्न संख्या 1 से 9 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न है जिनका उत्तर 800 से 1000 शब्दों में लिखना है।
3. In each of the question No. 4 to 7 there are short answer questions answer should be
given in 200 to 300 words.
प्रश्न संख्या 4 से 7 लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिनका उत्तर 200 से 300 शब्दों में लिखना है।

खण्ड - 'अ'

Section 'A'

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

Long Answer Questions.

नोट : किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर 800 से 1000 शब्दों में लिखें।

Note: All questions are compulsory. Each question should be answered in 800 to 1000 Words.

अधिकतम अंक: 18

Maximum Marks: 18

1. यदि V एक सीमित विमीय सदिश समष्टि है और $T : V \rightarrow V^1$ एक रेखीय प्रतिचित्रण है, तो सिद्ध कीजिए कि V की बीमा = T की कोटि. T की शून्यता

If V is a finite dimensional vector space and $T : V \rightarrow V^1$ is a linear map, then prove that $\text{Lim } V = \text{rank } T + \text{nullity } T$

2. रेखीय रूपान्तरण $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ द्वारा परिभाषित, के सभी अभिलाक्षणिक मान तथा अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए। क्या T विकर्णीय है?

Find all eign values and eign vectors of a linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, defined as $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$. Is T diagonalizatable?

3. अन्तः गुणन समष्टि में सदिश के नार्म को परिभाषित कीजिए। यदि a तथा b एक अन्तः गुणन समष्टि $(V, \langle \rangle)$ के दो रेखिक स्वतंत्रा सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$|\langle a, b \rangle| < \|a\| \|b\|.$$

Define the norm of a vector in an inner product space. If a and b are two linearly independent vectors of an inner product space $(V, \langle \rangle)$, then prove that

$$|\langle a, b \rangle| < \|a\| \|b\|.$$

4. यदि w_1 तथा w_2 कोई दो उप सीमित विमीय सदिश समाष्टि हो तो दर्शित कीजिए कि विमा $(w_1 + w_2) =$ विमा w_1 विमा $w_2 -$ विमा $(w_1 \cap w_2)$

If w_1 and w_2 are any two finite subspaces of a vector space V then show that $\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim(w_1 \cap w_2)$

5. दो वर्गीय आव्यूह A और B के लिए सिद्ध कीजिए

(a) अवषेध $(A+B) =$ अवषेध $A +$ अवषेध B

(b) अवषेध $(AB) =$ अवषेध (BA)

For two square matrices A and B show that

(a) trace $(A+B) =$ trace $A +$ trace B

(b) trace $(AB) =$ (trace $BA)$

6. बेसेल असर्वसमिका किसी अन्तः गुणन समष्टि हेतु उद्धृत कीजिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Bessel's inequality in and Inner product space.

7. आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ के सभी आयमान तथा आयमान सदिशों को ज्ञात कीजिए।

Find the eigen Values and eigen vectors of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

9. माना कि \mathbb{R}^2 पर f एक बाइलिनियर फॉर्म है। जो $f((x_1, x_2) (y_1, y_2)) = (2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 3x_1y_2 + x_2y_2)$ से परिभाषित हो तो $B_1\{(1,0) (1, -1)\}$ तथा $B_2\{(2,1) (1,1)\}$ के सापेक्ष एक आव्यूह P ज्ञात कीजिए।

Let f be a bilinear form of \mathbb{R}^2 defined as $f((x_1, x_2) (y_1, y_2)) = (2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 3x_1y_2 + x_2y_2)$ then find a $B_1\{(1,0) (1,1)\}$ and $B_2\{(2,1) (1, -1)\}$ matrix P with respect to B_1 and B_2 .

खण्ड - ब

Section - B

लघु उत्तरीय प्रश्न

Short Answer Questions.

अधिकतम अंक: 12
Maximum Marks: 12

नोट : किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर 200 से 300 शब्दों में लिखें।

Note: Write any four questions. Answer should be given in 200 to 300 Words.

1. सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र हरमिशियन आव्यूह के सभी चारित्रिक मूल वास्तविक हैं।

Prove that the characteristics roots of a complex hermitian matrix are all real.

2. यदि $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण रेखीय है, तो T की कोटि (जाति) तथा शून्यता ज्ञात कीजिए।

If a map $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be defined by $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ is linear, find rank and nullity of T .

3. एक फलन f , \mathbb{R}^2 पर निम्नप्रकार से परिभाषित है :

$$f(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + x_1 y_2, \text{ जहाँ } x = (x_1, x_2) \text{ and } y = (y_1, y_2)$$

क्या f एक द्विरेखीय रूप है? जाँच कीजिए।

A function f is defined on \mathbb{R}^2 as follows:

$$f(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + x_1 y_2, \text{ where } x = (x_1, x_2) \text{ and } y = (y_1, y_2)$$

Is f a bilinear forms? Verify.

4. यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि इस प्रकार है कि इसका कोई उचित उपसमष्टि नहीं है, तो दर्शाइए कि $V = \{0\}$ अथवा V की बीमा एक है।

Let V be a vector space over a field F such that it has no proper subspace. Then show that either

$$V = \{0\} \text{ or } \dim V = 1.$$

5. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह B तथा $P^{-1} B P$ आव्यूह के चारित्रिक मूल समान है

Show that the characteristic roots of matrix B and matrix $P^{-1} B P$ are same.

6. निम्न में कौन प्रतिचित्रण रेखीय है जबकि $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

(अ) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$

(ब) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

Which of the following is a linear transformation where $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

(a) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$

(b) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

7. सिद्ध कीजिए कि कोई रेखीय रूपान्तरण विकर्णीय है यदि उसके अभिलाक्षणिक मूलों की संख्या सीमित विमीय सदिश समष्टि के बराबर है।

Prove that a linear transformation on vector space is diagonalizable if the eigen values of the transformation are as much equal as the dimension of vector space.

8. यदि F कालम सदिष का सदिष समष्टि है तथ A , n कोटि की वर्ग आव्यूह है तब सिद्ध कीजिए कि $f : F \times F \rightarrow F$

जहाँ $f(X, Y) = X^t AY$ एक द्विरेखीय रूप है।

If F is a vector space of column vectors and A be a square matrix of order n then show that $f : F \times F \rightarrow F$ where $f(X, Y) = X^t AY$ is a bilinear form on vector space.

9. सिद्ध कीजिए कि समान आव्यूह के आयगन मान भी समान होंगे।

Prove that eigen values of similar matrices are similar.

10. दो समुच्चयों का सममित अन्तर परिभाषित कीजिए तथा दिखाइये कि सममित अन्तर साहचर्य नियम का पालन करता है।

Define Symmetric difference of two sets. Show that symmetric differences is as sociative.

11. यदि $f: X \rightarrow Y$ एक फलन है। यदि $A \subseteq X, B \subseteq X$ तो दिखाइये $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

Let $f: X \rightarrow Y$ be a map. Let $A \subseteq X, B \subseteq X$ then show that $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

12. इनर प्रोजेक्ट स्पेस को उदाहरण के साथ परिभाषित कीजिए।

Define inner product space with an example.