स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

उत्तर प्रदेश सरकार का एकमात्र मुक्त विश्वविद्यालय

।। सरस्वती नः सुभगा मयस्करत् ।।

M.Com - 201

शोध प्रविधि

Research Methodology

प्रथम खण्ड	:	अनुसंधान/ शोध परीक्षण की मौलिकता
द्वितीय खण्ड	:	निदर्शन एवं प्रमापीकरण
तृतीय खण्ड	:	केन्द्रीय प्रवृत्ति, प्रायिकता एवं सांख्यिकी टुल्स
चतुर्थ खण्ड	:	सांख्यिकीय परीक्षण
पंचम खण्ड	:	इकाई अध्ययन एवं प्रतिवेदन लेखन

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, प्रयागराज - 211013
www.uprtou.ac.in
टोल फ्री नम्बर- 1800-120-111-333

कुलपति

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय,
प्रयागराज

उत्तर प्रदेश सरकार का एकमात्र मुक्त विश्वविद्यालय

॥ सरस्वती नः सुभगा मयस्करत् ॥

संदेश

प्रयागराज की पवित्र भूमि पर भारत रत्न राजर्षि पुरुषोत्तम दास टण्डन के नाम पर वर्ष 1999 में स्थापित उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज उ0प्र0 का एकमात्र मुक्त विश्वविद्यालय है। यह विश्वविद्यालय उ0प्र0 जैसे विशाल जनसंख्या वाले राज्य में उच्च शिक्षा के प्रत्येक आकांक्षी तक गुणात्मक तथा रोजगारपरक उच्च शिक्षा के अवसर उपलब्ध कराने में निरन्तर अग्रसर एवं प्रयत्नशील है। तत्कालीन देश की सामाजिक एवं आर्थिक परिस्थितियों में एक वैकल्पिक व नवाचारी शिक्षा व्यवस्था के रूप में भारत में मुक्त एवं दूरस्थ शिक्षा प्रणाली का पदार्पण हुआ था, परन्तु वर्तमान परिस्थितियों तथा तकनीकी का सार्थक प्रयोग करते हुये मुक्त एवं दूरस्थ शिक्षा आज की सर्वोत्तम पूरक शिक्षा व्यवस्था के रूप में स्थापित हो चुकी है।

वर्तमान शिक्षा प्रणाली के सामने व्याप्त पाँच मुख्य चुनौतियों - (i) पहुँच (Access), (ii) समानता (Equity), (iii) गुणवत्ता (Quality), (iv) वहनीयता (Affordability) तथा (v) जवाबदेही (Accountability) को केन्द्र में रखकर घोषित देश की राष्ट्रीय शिक्षा नीति (NEP-2020) के प्रस्तावों को क्रियान्वित करने में उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय कृत संकल्पित है। उ0प्र0 की माननीय राज्यपाल एवं कुलाधिपति की सद्इच्छाओं के अनुरूप उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, शैक्षिक दायित्वों के साथ-साथ सामाजिक दायित्वों के निर्वहन में भी लगातार नवप्रयास कर रहा है। चाहे वह गाँवों को गोद लेकर उनके समग्र विकास का प्रयास हो या ग्रामीण महिलाओं, ट्रान्सजेन्डर व सजायाफ्ता कैदियों को शुल्क में छूट प्रदान कर उनमें आत्मविश्वास जागृति व उच्च शिक्षा के प्रति अलख जगाने का प्रयास हो ।

राष्ट्रीय विकास को बढ़ावा देने के लिए शिक्षा एक मूलभूत जरूरत है। ज्ञान-विज्ञान एवं तकनीकी के क्षेत्रों में हो रहे तीव्र परिवर्तनों व वैश्विक स्तर पर रोजगार की परिस्थितियों में आ रहे परिवर्तनों के कारण भारतीय युवाओं को विभिन्न क्षेत्रों में गुणवत्तापूर्ण शैक्षिक अवसर उपलब्ध कराने पर ही भारत का भविष्य निर्भर करेगा। इसीलिए विभिन्न क्षेत्रों में सफलता हेतु शिक्षा को सर्वसुलभ, समावेशी तथा गुणवत्तापरक बनाना समसामयिक अपरिहार्य आवश्यकता है। वर्तमान परिस्थितियों ने परम्परागत शिक्षा को और भी सीमित कर दिया है जिसके कारण मुक्त एवं दूरस्थ शिक्षा व्यवस्था ही एकमात्र पूरक एवं प्रभावी शिक्षा व्यवस्था के रूप में सार्थक सिद्ध हो चुकी है। ऐसी स्थिति में विश्वविद्यालय का दायित्व और भी बढ़ जाता है। इस दायित्व को एक चुनौती स्वीकार करते हुए विश्वविद्यालय ने प्राचीन तथा सनातन भारतीय ज्ञान, परम्परा तथा सांस्कृतिक दर्शन व मूल्यों की समृद्ध विरासत के आलोक में सभी के लिए समावेशी व समान गुणवत्तायुक्त शिक्षा सुनिश्चित करने तथा जीवन पर्यन्त शिक्षा के अवसरों को बढ़ावा देने के लिए अपने शैक्षिक कार्यक्रमों में जागरूकता में प्रमाणपत्र, डिप्लोमा, परास्नातक डिप्लोमा, स्नातक, परास्नातक तथा शोध उपाधि के समसामयिक शैक्षिक कार्यक्रमों की संख्या तथा गुणात्मकता में वृद्धि की है।

शैक्षिक कार्यक्रमों में संख्यात्मक वृद्धि, गुणात्मक वृद्धि तथा रोजगारपरक बनाने के साथ-साथ प्रत्येक उच्च शिक्षा आकांक्षी तक पहुँच सुनिश्चित करने के लिए अध्ययन केन्द्रों व क्षेत्रीय केन्द्रों के विस्तार के साथ-साथ प्रवेश परीक्षा, प्रशासन तथा परामर्श (शिक्षण) में आनलाइन व्यवस्थाओं को सुनिश्चित किया गया है। विश्वविद्यालय कार्यप्रणाली में पारदर्शिता तथा जवाबदेही सुनिश्चियन की दृष्टि से तकनीकी के प्रयोग को बढ़ाया गया है। 'चुनौती मूल्यांकन' की व्यवस्था सुनिश्चित करने का कार्य किया गया है, तो शिक्षार्थी सहायता सेवाओं में भी वृद्धि की जा रही है। शिक्षार्थियों की समस्याओं के त्वरित निस्तारण हेतु शिकायत निवारण प्रकोष्ठ को सुदृढ़ करने के साथ-साथ पुरातन छात्र परिषद को गतिशील किया गया है।

"गुरुकुल से छात्रकुल" के सूक्त वाक्य को आत्मसात करते हुए विश्वविद्यालय ने शिक्षार्थियों को विश्वविद्यालय द्वारा तैयार किये गये गुणवत्तापूर्ण स्वअध्ययन सामग्री उपलब्ध कराने के साथ-साथ विश्वविद्यालय की वेबसाइट पर भी उपलब्ध कराया गया है। छात्रहित को ध्यान में रखते हुए शिक्षकों द्वारा तैयार व्याख्यान को भी ऑनलाईन उपलब्ध कराया गया है।

शोध और नवाचार के क्षेत्र में अग्रसर होते हुए विश्वविद्यालय अनुदान आयोग (UGC) नई दिल्ली तथा माननीय राज्यपाल एवं कुलाधिपति, उ0प्र0 की अनुमति से विश्वविद्यालय में शोध कार्यक्रम पुनः प्रारम्भ किया गया है तथा वर्ष पर्यन्त समसामयिक विषयों पर व्याख्यान, सेमिनार, वेबिनार तथा आनलाइन संगोष्ठियों आदि की श्रृंखला भी प्रारम्भ की गयी है। विभिन्न क्षेत्रों में रिसर्च प्रोजेक्ट सम्पादन पर भी ध्यान केन्द्रित किया गया है। पुस्तकालय को अत्याधुनिक तथा सुदृढ़ बनाने हेतु कदम उठाये गये हैं। शिक्षकों व कर्मचारियों के स्वास्थ्य तथा कल्याण की योजनायें क्रियान्वित की गयी हैं।

प्रो0 सत्यकाम
कुलपति

M.Com -201
(शोध प्रविधि)
Reserarch Methodology

उ० प्र० राजर्षि टण्डन
मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

विषय सूची

उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

विशेषज्ञ समिति :

प्रोफेसर ओमजी गुप्ता निदेशक (सेवा निवृत्त)	प्रबंधन अध्ययन विद्याशाखा , उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
डॉ० ज्ञान प्रकाश यादव	सह आचार्य प्रबंधन अध्ययन विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
डॉ० देवेश रंजन त्रिपाठी	सह आचार्य प्रबंधन अध्ययन विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
डॉ० गौरव संकल्प	सहायक आचार्य प्रबंधन अध्ययन विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
डॉ० अमरेंद्र कुमार यादव	सहायक आचार्य प्रबंधन अध्ययन विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

लेखक :

डॉ० कौशल किशोर तिवारी	सहायक आचार्य ,वाणिज्य विभाग, राजकीय महाविद्यालय, सुकरौली, हाटा कुशीनगर, उत्तर प्रदेश

सम्पादक :

डॉ ज्ञान प्रकाश यादव	सह आचार्य, प्रबंधन अध्ययन विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

समन्वयक

डॉ अमरेंद्र कुमार यादव	सहायक आचार्य प्रबंधन अध्ययन विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

प्रभारी

प्रोफेसर जय प्रकाश यादव	प्रभारी, प्रबंधन अध्ययन विद्याशाखा ,उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

प्रकाशकः

कुलसचिव, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज।

ISBN : 978-93-48270-80-1

Registrar, U. P. Rajarshi Tandon Open University, Prayagraj

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस सामग्री के किसी भी अंश को उ प्र राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज की लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप मे। मिनियोग्राफी (वक्रमुद्रण) द्वारा या अन्यथा पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

नोट : पाठ्य साम्रगी में मुद्रित साम्रगी के विचारों एवं आकड़ो। आदि के प्रति विश्वविद्यालय, उत्तरदायी नहीं हैं।

प्रकाशक : विनय कुमार, कुलसचिव, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज, 211021

मुद्रक – के0 सी0 प्रिटिंग एण्ड एलाइड वर्क्स, पंचवटी, मथुरा – 281003

उ० प्र० राजर्षि टण्डन
मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

M.Com.-201
(शोध प्रविधि)
Reserarch Methodology

खण्ड – 1
अनुसंधान/शोध परीक्षण की मौलिकता

खण्ड – 1 अनुसंधान/शोध परीक्षण की मौलिकता

इस खण्ड में शोध की मूल बातें हैं, जिसे एक शोधकर्ता को जानना अत्यन्त आवश्यक है। इन मूल बातों की व्याख्या निम्नलिखित पॉच इकाइयों में की गयी है –

इकाई – 1 में शोध का परिचय : अर्थ, विशेषता और महत्व : शोध करने का मकसद (उद्देश्य) : वैज्ञानिक विधि : शोध के प्रकार : प्रभावशाली अनुसंधान के लिए समस्याएं एवं सावधानियाँ; व्यावसायिक प्रबन्धन में प्रयोग होने वाले अनुभवजन्य शोध प्रकरण (Topics): शोध विधि बनाम् प्रविधि/क्रियाविधि की गहन व विस्तृत व्याख्या की गयी है।

इकाई – 2 में शोध समस्या का अर्थ और इसके घटक : समस्या के स्रोत को पहचानना : व्यावसायिक शोध से सम्बन्धित नैतिक मुद्दे यथा छलरचना (Fabrication), असत्यकरण (Falsification) और साहित्यिक चोरी (Plagiarism) की गहन व विस्तृत व्याख्या की गयी है।

इकाई – 3 में शोध अभिकल्प की अवधारणा, विशेषताएं तथा वर्गीकरण, शोध अभिकल्प को प्रभावित करने वाले तत्व का विशद् वर्णन किया गया है।

इकाई –4 में समंकों के संग्रहण के अन्तर्गत प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों के मध्य अन्तर, प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों के संग्रहण करने की विधियॉ अच्छे प्रश्नावली की विशेषताएं, प्रश्नावली और अनुसूचियों का निर्माण, द्वितीयक समंकों की सीमाओं का गहन व विस्तृत व्याख्या की गयी है।

इकाई – 5 में निदर्शन का परिचय, निदर्शन की तकनीकें, लाभ और सीमाओं का विस्तृत तथा गहन व्याख्या किया गया है।

इकाई – 1 (परिचय)

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आपकों –

- शोध का आशय, अर्थ व परिभाषाओं की जानकारी होगी।
- शोध का उद्देश्य ज्ञात होगा।
- शोध की विशेषताओं का ज्ञान होगा।
- शोध का महत्व ज्ञात होगा।
- ज्ञान प्राप्त करने की वैज्ञानिक विधि के बारे में जानकारी होगी।
- विभिन्न प्रकार के शोध के बारे में ज्ञान होगा।
- एक प्रभावशाली शोध के दौरान उत्पन्न समस्याएं और बरतने वाली सावधानियों के बारे में जानकारी होगी।
- व्यावसायिक प्रबन्धन हेतु अनुभव जन्य शोध प्रकरण के बारे में जानकारी प्राप्त होगा।
- शोध विधि बनाम् शोध प्रविधि का स्पष्ट अन्तर आप स्पष्ट रूप से कर पायेगें।

1.1 प्रस्तावना :

परिचयात्मक इकाई में शोध का अर्थ, परिभाषा, विशेषताएं, महत्व, प्रकार तथा शोध विधि एवं प्रविधि में अंतर का अध्ययन करेंगे साथ ही अनुभव जन्य शोध प्रकरण जो प्रबन्धन से संबंधित है का विवेचन किया गया है।

1.2 शोध का अर्थ व परिभाषा :

मानव स्वभावतः अपने चारों ओर विद्यमान परिस्थितियों और वातावरण को समझने का प्रयास करता है। आप भी अपने जीवन को सहज बनाने के लिए नई खोज तथा अविष्कार करते है। अतः आप जाने–अनजाने शोध कार्यों में संलग्न रहते हैं। यह कार्य प्रत्येक मानव के द्वारा किया जाता है। कालान्तर में इसकी एक निश्चित प्रविधि विकसित हो गई जिसे शोध की संज्ञा दी जाने लगी। शोध शब्द अंग्रेजी के '(Re Search) से बना हैं, जिसमें 'Re' 'का अर्थ पुनः तथा 'Search' शब्द का अर्थ खोज हैं। इस प्रकार शोध का शाब्दिक अर्थ पुनः खोजना हुआ। लेकिन इससे शोध शब्द का सही आशय प्रकट नहीं होता। वास्तव में शोध का तात्पर्य एक ऐसे सत्य की लगातार खोज करते रहना हैं जो कि पूर्णरूपेण ज्ञात नहीं हैं तथा जिसकी जिज्ञासा बनी हुई है।

शोध का अर्थ नए तथ्यों को खोजना या पुराने तथ्यों की पुष्टि और जाँच करना है।

<u>एल0वी0 रेडमैन तथा अन्य</u> ने 'रोमांस ऑफ रिसर्च' में परिभाषा देते हुए लिखा है कि ''शोध नवीन ज्ञान प्राप्त करने के लिए एक व्यवस्थित प्रयास है।''

<u>जोन वेस्ट</u> के अनुसार ''शोध ऐसी व्यवस्थित प्रक्रिया है जो नई खोज करती है तथा संकलित एवं सुसंगठित ज्ञान का विकास करती है।''

स्पार एवं स्वेन्सन के अनुसार, ''कोई भी विद्वतापूर्ण अन्वेषण (खोज) जो सत्य तथ्य एवं निश्चित प्राप्ति के लिए किया जाता है वहीं शोध है।''

अतः शोध द्वारा विद्यमान ज्ञान में अभिवृद्धि होती है। यह सत्य की एक ऐसी खोज हैं जिसमें अध्ययन, अवलोकन, तुलना तथा प्रयोगों द्वारा किसी निश्चित विषय को विकसित किया जाता है

1.3 शोध के उद्देश्य :

शोध एक उद्देश्यपूर्ण सुव्यवस्थित बौद्धिक प्रक्रिया है। इसके द्वारा किसी सैद्धान्तिक और व्यावहारिक समस्या के समाधान का प्रयास किया जाता है। इस तरह से शोध के तीन उद्देश्य पर बात की जा सकती है–

1. सैद्धान्तिक उद्देश्य
2. व्यावहारिक उद्देश्य
3. व्यक्तिगत उद्देश्य

1. **सैद्धान्तिक उद्देश्य** – शोध मूल रूप से ज्ञान की वृद्धि का साधन है। इस दृष्टि से शोध का सैद्धान्तिक उद्देश्य तथ्यों, घटनाओं अथवा समस्याओं के विषय में ज्ञान प्राप्त करना है, जिससे पुराने तथ्यों का सत्यापन, नये तथ्यों की खोज, नये सिद्धान्तों का निर्माण तथा परीक्षण किया जा सकता है।

2. **व्यावहारिक उद्देश्य** – सिद्धान्तों का व्यवहार में आना आवश्यक है। प्राथमिक अथवा सैद्धान्तिक उद्देश्य सैद्धान्तिक ज्ञान में अभिवृद्धि करता है, परन्तु यदि वह व्यावहारिक घरातल पर उपयोग न हो तो ऐसा शोध अर्थहीन हो जाता है। अतः शोध के व्यावहारिक उद्देश्य निम्नलिखित है–

   (i). शोध के द्वारा सर्वोत्कृष्ट विकल्प की खोज की जाती है।

   (ii). शोध के द्वारा भविष्य के लिए योजनाओं के निर्माण में सहायता मिलती है।

   (iii). शोध के द्वारा किसी घटना के स्वरूप व कारणों के बारे में गहन जाँच कर उस समस्या को नियंत्रित करने में सहायता मिलती है।

   (iv). शोध के द्वारा विभिन्न चरों में परस्पर संबंध स्थापित कर परिकल्पनाओं को स्वीकृत अथवा अस्वीकृत किया जाता है।

   (v). शोध व्यवसाय तथा उद्योग की क्रियात्मक तथा नियोजन संबंधी समस्याओं को समाधान करने में सहायक होता है।

3. **व्यक्तिगत उद्देश्य** – शोध एक व्यक्ति क्यों करता है? इस प्रश्न का उत्तर ही शोध के व्यक्तिगत उद्देश्य में आपकों मिल जायेगा।

   (i). बहुत से ऐसे पेशें है, जिनमें प्रवेश (रोजगार व उन्नति के लिए) करने के लिए एक व्यक्ति को शोध करना आवश्यक होता है।

   (ii). एक व्यक्ति समाज सेवा की दृष्टि से भी शोध एवं अनुसंधान कर सकता है।

   (iii). शोध करने का व्यक्तिगत उद्देश्य समाज में सम्मान प्राप्त करना भी हो सकता है।

1.4 शोध की विशेषताएं :

शोध की विशेषताएं निम्नलिखित है –

1. नवीन ज्ञान की वृद्धि एवं विकास ।
2. सामान्य नियमों एवं सिद्धान्तों का प्रतिपादन।
3. यह वैज्ञानिक, सुव्यवस्थित एवं सुनियोजित प्रक्रिया है।
4. शोध में विवेक एवं समझ का पर्याप्त योगदान होता है।
5. शोध से प्रामाणिक निष्कर्षो की प्राप्ति होती है।
6. प्राप्त निष्कर्षो को शोध से प्रामाणिक पुष्टि होती है।
7. शोध में सत्यापन शीलता का गुण पाया जाता है।

1.5 शोध का महत्व :

विश्व की सारी प्रगति विभिन्न क्षेत्रों में किये गये अनुसंधानों के कारण ही है। आज प्रत्येक क्षेत्र में इस बात का अनुभव किया जा रहा है कि यदि ज्ञान के विस्फोट को समझना है, प्रगति की होड़ में आगे बढना है तो उसका एकमात्र साधन शोध ही हो सकता है। इस दृष्टि से शोध के निम्नलिखित महत्व है–

1. शोध हमारे ज्ञान का विस्तार करता है।
2. मानव समाज की समस्याओं के हल का रास्ता सुझाता है।
3. अनुसंधान उद्देश्य प्राप्ति हेतु सर्वोत्तम साधन प्रदान करता है।
4. शोध सत्य ज्ञान के खोज की पिपासा शान्त करता है।
5. शोध हमारी आर्थिक प्रणाली में लगभग सभी सरकारी नीतियों के लिए आधार प्रदान करता है।
6. जॉन बेस्ट (सन् 1959) के कथनानुसार सांस्कृतिक उन्नति का रहस्य शोध में निहित है।
7. शोध मानव ज्ञान को दिशा प्रदान करता है, ज्ञान भण्डार को विकसित एवं परिमार्जित करता है।

1.6 वैज्ञानिक विधि :

मनुष्य जैसे–जैसे प्रगति के पथ पर बढता गया, उसने ज्ञान प्राप्त करने की नवीन विधियाँ खोजी। बहुधा वह अपनी समस्या का समाधान प्रयास एवं भूल के सिद्वान्त से करता है। समस्या समाधान के लिए वह एक उपाय का उपयोग करता है और उस उपाय के प्रभावकारी न होने पर वह दूसरे उपाय की परीक्षा करता है। इस प्रकार से समस्या समाधान के ढंग को प्रयास एवं भूल का सिद्धान्त कहते हैं। किन्तु यह ज्ञान प्राप्त करने की प्रमाणिक विधि नहीं है। इसके अतिरिक्त ज्ञान प्राप्त करने की और विधियॉ हैं। सत्ता विधि, वैयक्तिक अनुभव, निगमन विधि, आगमन विधि तथा वैज्ञानिक विधि। वैज्ञानिक विधि ही ज्ञान प्राप्त करने की प्रामाणिक विधि मानी जाती है।

सत्रहवी शताब्दी के लगभग मनुष्य ने ज्ञान प्राप्त करने के लिए एक नवीन विधि का विकास किया जिसके फलस्वरूप वर्तमान वैज्ञानिक आन्दोलन का जन्म हुआ। **फ्रांसिस वेकन** ने उस समय वैज्ञानिक विधि की नींव डाली जबकि उसने निरीक्षित (निरीक्षण के पश्चात्) तथ्यों के आधार पर निष्कर्ष निकालने तथा निगमनात्मक विधि का

प्रयोग करने पर बल दिया। बेकन की यादृच्छिक तथ्यों को प्राप्त करने की विधि के द्वारा अनियंत्रित सूचनाओं का ढेर लगने लगा। अतः विश्वसनीय ज्ञान प्राप्त करने की अधिक व्यावहारिक विधि का विकास करने के प्रयास में न्यूटन गैलीलियों तथा उनके साथियों ने आगमनात्मक तथा निगमनात्मक चिन्तन की विधि को एक साथ मिलाकर प्रस्तुत किया। निरीक्षण तथा चिन्तन की इसी मिश्रित व्यवस्था ने वर्तमान वैज्ञानिक अनुसंधान प्रणाली को जन्म दिया।

1.6.1 वैज्ञानिक विधि के पद :

वैज्ञानिक विधि में तथ्यों का उद्देश्यपूर्ण संग्रह होता है। इस विधि में अनुसंधानकर्ता निगमन तथा आगमन (निगमन में विशेष से सामान्य की ओर तथा स्थूल से सूक्ष्म की ओर अग्रसर होते है, वहीं आगमन विधि में सामान्य से विशेष की ओर तथा सूक्ष्म से स्थूल की ओर अग्रसर होते है।) दोनों विधियों का प्रयोग करता है।

पद (1). कठिनाई का अनुभव – वैज्ञानिक अनुसंधान किसी कठिनाई की अनुभूति से प्रारम्भ होता है। व्यक्ति के मार्ग में कोई बाधा ऐसी उत्पन्न हो जाती है, जो उसे व्यग्र कर देती है। उदाहरण के लिए उसके पास वांच्छित वस्तु के प्राप्त करने का साधन नहीं है। किसी वस्तु की विशेषताओं को पहचानने में कठिनाई हो रही है।

पद (2). कठिनाई का सीमांकन एवं परिभाषीकरण – अब वह व्यक्ति निरीक्षण के आधार पर तथ्यों का संग्रह करके अपनी कठिनाई का सीमांकन एवं परिभाषीकरण करता है।

पद (3). समस्या के समाधान का सुझाव (प्राक्कल्पनाएँ) – तृतीय स्तर पर तथ्यों के पूर्व अध्ययन के आधार पर व्यक्ति उन समस्याओं के समाधान के कुछ तर्कपूर्ण सुझाव प्रस्तुत करता है। किसी समस्या के उन्हीं सम्भावित उत्तरों को ही प्राक्कल्पना कहते है। अतः यह कतिपय प्राक्कल्पना का निर्माण करता है।

पद (4). निगमनात्मक ढंग से सुझावों पर विचार – चतुर्थ स्तर पर वह इस पर विचार करता है कि यदि वे प्राकल्पनाएं सत्य है तो इनसे कुछ निष्कर्ष निकलने चाहिए।

पद (5). क्रिया द्वारा प्राक्कल्पनाओं का परीक्षण – इस पद के अन्तर्गत वह व्यक्ति प्रत्येक प्राक्कल्पना का परीक्षण करता है तो इस निश्चय पर पहुँचने का प्रयास करता हैं कि कौन सी प्राकल्पना निरीक्षित तथ्यों के अनुमान है। इसके आधार पर वह सर्वोत्तम समाधान प्रस्तुत करता है। मनुष्य जैसे–जैसे प्रगति के पथ पर बढता गया, उसने ज्ञान प्राप्त करने की नवीन विधियाँ

1.7 शोध के प्रकार :

अनुसंधान का मुख्य उद्देश्य वैज्ञानिक विधियों द्वारा विशिष्ट प्रश्नों का उत्तर अथवा विशिष्ट समस्याओं का समाधान प्राप्त करना है। जिसके लिए विभिन्न प्रकार के अनुसंधानों का प्रयोग किया जाता है। शोध को प्रमुख रूप से निम्नलिखित तीन आधारों पर विभाजित किया जा सकता है।

1. उद्देश्य के आधार पर :–

    अ. मौलिक सैद्वान्तिक शोध

    ब. व्यावहारिक शोध

स.	क्रिया शोध

2. <u>प्रकृति के आधार पर</u> :–

अ.	अन्वेषणात्मक शोध

ब.	विवरणात्मक शोध

स.	निदानात्मक शोध

द.	प्रयोगात्मक शोध

3. <u>तथ्यों के आधार पर</u> :–

अ.	परिमाणात्मक शोध

ब.	गुणात्मक शोध

1:7.1 उद्देश्य के आधार पर शोध :

शोधकर्ता किस उद्देश्य को केन्द्र में रखकर शोध करना चाहता है? अतः उद्देश्य के आधार पर शोध को निम्न प्रकार विभाजित किया जा सकता है–

अ. <u>मौलिक सैद्धान्तिक शोध (**Fundamental Basic or Pure Research**) :</u> मौलिक शोध के विषयों में नये सिद्धान्तों का सुत्रपात अथवा पुराने सिद्धान्तों की समीक्षा तथा संशोधन आते है। इसमें जो ज्ञान प्राप्त होता है, उसका उद्देश्य सामान्यीकरण के द्वारा सिद्धान्तों की व्याख्या करना होता है। वर्तमान परिस्थिति या परिवर्तित परिस्थितियों में पुराने सिद्धान्त उचित है या नहीं यह भी मौलिक अनुसंधान में देखा जाता है। यदि पुराने सिद्धान्त वर्तमान सन्दर्भ में ठीक न हों तो उन्हें अस्विकृत कर नये सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जाता है।

व्यावहारिक अथवा क्रियात्मक शोध के लिए मौलिक शोध एक आधारशीला है। मौलिक शोध सामग्री प्रदान करता हैं जिसके आधार पर किसी निष्कर्ष पर पहुँचा जा सकता है। लागत की दृष्टिकोण से यह प्रणाली अधिक खर्चिला होता है। इस बात का खतरा बना रहता है कि इसके निष्कर्ष पहली बार में सही सिद्ध होंगे अथवा नहीं।

ब. <u>व्यावहारिक शोध (**Applied Research**)</u> : इस प्रकार के शोध में सैद्धान्तिक शोध से प्राप्त परिणामों को वास्तविक घटनाओं तथा परिस्थितियों पर लागू कर प्राप्त परिणामों के आधार पर निष्कर्ष निकाले जाते है। अतः व्यावहारिक अनुसंधान उसे कहा जाता है जिसमें ज्ञान की प्राप्ति मानवीय कल्याण के लिए उपयोगी हो। पी.वी.यंग के अनुसार, ''ज्ञान की खोज का निश्चित सम्बन्ध लोगों की प्राथमिक आवश्यकताओं एवं कल्याण से होता है। वैज्ञानिक की मान्यता यह होती है कि समस्त ज्ञान मूलभूत रूप से इस अर्थ में उपयोगी होता है कि वह इस सिद्धान्त के निर्माण में या एक कला को व्यवहार में लाने में सहायक होता है, सिद्धान्त और व्यवहार आगे जाकर एक दूसरे से मिल जाते है।''

स. <u>क्रिया शोध (**Action Research**)</u> : वह शोध जो किसी समस्या अथवा घटना के क्रिया पक्ष पर बल देता है। क्रिया शोध कहलाता है। **गुडे एवं हाट** के अनुसार, ''क्रिया अनुसंधान उस कार्यक्रम का

हिस्सा होता है जिसका उद्देश्य विद्यमान परिस्थितियों को परिवर्तित करना होता है।'' ये एक प्रकार के तात्कालिक अनुसंधान होते हैं, जो एक निश्चित समाज में किसी तथ्य की खोज करते हैं, या प्रत्यक्ष समस्या का समाधान प्रस्तुत करते है। इस प्रकार ये व्यावहारिक होते है और किसी समस्या का निदान ढूँढते है।

1.7.2 प्रकृति (Nature) के आधार पर

प्रकृति के आधार पर शोध को निम्नलिखित भागों में बांटा गया है :–

अ. <u>अन्वेषणात्मक शोध (**Exploratory Research**)</u> : वह शोध जो कार्य और कारण संबंध की खोज करता हैं तो वह अन्वेषणात्मक शोध कहलाता है। उदाहरण के लिए यदि उद्योग की लाभदायकता लगातार कम हो रही है तो उसके कम होने के कारणों की जॉच करने के लिए अन्वेषणात्मक शोध किया जायेगा। जहाँ अर्जित ज्ञान सीमित हैं तथा प्रयोगात्मक अनुसंधान संभव नहीं हैं वहॉ अन्वेषणात्मक शोध किया जाता है। यह शोध विवरणात्मक शोध का मार्ग प्रशस्त करता है।

ब. <u>विवरणात्मक शोध (**Descriptive Research**)</u> : उपलब्ध तथ्यों, ज्ञान तथा सांख्यिकीय समंकों के आधार पर अध्ययन की विषय वस्तु का विस्तारपूर्वक स्पष्टीकरण करना विवरणात्मक शोंध कहलाता है। इसके लिए विषय सामग्री की पूर्ण जानकारी होना आवश्यक है। इतना हीं नहीं, यह जानकारी तथ्य संगत तथा यथार्थ भी होनी चाहिए। तभी इसके द्वारा प्राप्त निष्कर्ष लक्ष्य प्राप्ति में सहायक सिद्ध होंगे। ऐसे शोध का चुनाव करने से पूर्व यह ध्यान रखना होगा कि इसके लिए पर्याप्त समंक तथा सामग्री उपलब्ध हो।

स. <u>निदानात्मक शोध (**Dignostic Research**)</u> : इस प्रकार के शोध के अन्तर्गत सही समाधान प्राप्त करने के लिए समस्या के कारणों का गहन अध्ययन किया जाता है। इस हेतु समंकों का संकलन, विश्लेषण तथा निर्वचन किया जाता है। निदानात्मक शोध में समस्या को किस तरह सुलझाया जाए इसका वर्णन एवं विश्लेषण प्रस्तुत किया जाता है।

द. <u>प्रयोगात्मक शोध (**Experimental Research**)</u> : जब समस्या का समाधान करने के लिए वैज्ञानिक पद्धति का उपयोग किया जाता है तो उसे प्रयोगात्मक शोध कहा जाता है। यह शोध प्रयोग की अवधारणा पर आधारित है। प्रयोग एक प्रकार का नियंत्रित अन्वेषण होता है। प्रयोगात्मक शोध में सामान्यतया दो या दो से अधिक घटनाओं, कारकों या चरों के मध्य कार्य कारण सम्बन्ध की अनेक परिस्थितियों का अध्ययन किया जाता है। ऐतिहासिक घटनाचक्र इस शोध के अध्ययन का विषय हो सकता है, जिससे वर्तमान परिस्थितियों का निर्माण करने वाले कारणों की खोज की जा सकती है।

1:7.3 तथ्यों के आधार पर :

तथ्य के आधार पर शोध को दो भागों में बॉटकर अध्ययन किया जा सकता है:–

अ. <u>परिमाणात्मक शोध (**Quantitative Research**)</u> : जिन तथ्यों का मापन संख्या के रूप में किया जा सकता है, उससे संबंधित शोध को परिमाणात्मक शोध कहा जा सकता है। उदाहरण के लिए यदि किसी कम्पनी के वित्तीय स्थिति का विश्लेषण करना है। उसकी कार्यशील पूँजी का अध्ययन

करना है अथवा उसके उत्पादकता का विश्लेषण करना हो तो वहाँ परिमाणात्मक शोध किये जायेगे। क्योंकि ये सभी संख्यात्मक तथ्यों पर आधारित होते है।

ब. **गुणात्मक शोध (Quatitative Research)** : समस्या समाधान के अन्तर्गत बहुत से तथ्य ऐसे होते हैं जिनकों प्रत्यक्ष रूप से संख्या में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है, अर्थात् ये गुणात्मक तथ्यों पर आधारित होंते है। अतः जब शोध का विषय संख्यात्मक तथ्यों पर आधारित न होकर गुणात्मक तथ्यों पर आधारित होते हैं तो इसे गुणात्मक शोध की संज्ञा दी जाती है। उदाहरण के लिए उपभोक्ता के व्यवहार का विश्लेषण, प्रबन्धकीय कुशलता, सामग्री विश्लेषण (बहुत अच्छा, अच्छा, निम्न), विज्ञापन की प्रभावशीलता, अभिप्रेरणा संबंधी शोध आदि गुणात्मक शोध के उदाहरण है। यह शोध सामान्यतया मानवीय मनोविज्ञान से संबंधित होता है। इस प्रकार के शोध में विशेषज्ञ की सलाह लेना आवश्यक होता है।

1.8 प्रभावशाली शोध (समस्याएं एवं सावधानियाँ) :

1.8.1 सावधानियाँ :

शोध कार्य और अध्ययन के प्रकार चाहे जो भी हो, एक बात जो महत्वपूर्ण है वह यह है कि वे सभी उनके द्वारा नियोजित वैज्ञानिक पद्धति के आधार पर मिलते है। एक प्रभावशाली शोध के लिए निम्नलिखित मानदण्डों को अपनाना चाहिए–

1. शोध उद्देश्य को स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए और सामान्य अवधारणाओं का उपयोग किया जाना चाहिए।
2. उपयोग की गयी शोध प्रक्रिया को पर्याप्त विस्तार से वर्णित किया जाना चाहिए, ताकि किसी अन्य शोधकर्ता को आगे की प्रगति के लिए अनुसंधान को दोहराने की अनुमति मिल सके। जो पहले से ही प्राप्त किया जा चुका है।
3. अनुसंधान के प्रक्रियात्मक प्रारूप को यथा सम्भव उद्देश्यपूर्ण परिणाम प्राप्त करने के लिए सावधानी पूर्वक योजना बनाई जानी चाहिए।
4. शोधकर्ता को पूरी स्पष्टता के साथ प्रतिवेदन देना चाहिए, प्रक्रियात्मक प्रारूप में खामियों (कमियों) और निष्कर्षो पर उनके प्रभाव का अनुमान लगाना चाहिए।
5. समंक का विश्लेषण उसके महत्व को प्रकट करने के लिए पर्याप्त रूप से पर्याप्त होना चाहिए और उपयोग किये गये विश्लेषण के तरीके उपयुक्त होने चाहिए। समंकों की वैधता और विश्वसनीयता की सावधानी पूर्वक जाँच की जानी चाहिए।
6. निष्कर्ष शोध के ऑकड़ों द्वारा उचित ठहराये जाने तक ही सीमित होना चाहिए जो अनुसंधान के समंकों द्वारा उचित ठहराये जाते हैं और उन तक सीमित होते हैं, जिनके लिए समंक पर्याप्त आधार प्रदान करता है। शोध में अधिक विश्वास जरूरी हैं यदि शोधकर्ता अनुभवी हैं, अनुसंधान में अच्छी प्रतिष्ठा रखता है और ईमानदार हैं तो शोध की प्रभावशीलता अधिक होगी।

दूसरे शब्दों में एक प्रभावशाली शोध में निम्न गुण हो सकते हैं –

1. **अच्छा शोध व्यवस्थित होता हैं (Good Research is Systematic)** : इसका अर्थ यह है कि शोध एक सुपरिभाषित पदानुक्रम में होना चाहिए। शोध की व्यवस्थित क्रम रचनात्मक सोच से इंकार नहीं करती लेकिन निष्कर्ष पर पहुॅचने में अनुमान और अर्न्तज्ञान के उपयोग को निश्चित रूप से अस्वीकार करती है।
2. **अच्छा शोध तार्किक होता है (Good Research is Logical)** : इसका मतलब यह है कि शोध तर्क के नियमों द्वारा निर्देशित होता है। आगमन एवं निगमन तक की वो पद्यतियॉ है जिससे किसी मौलिक सत्य को खोज निकाला जाता है।
3. **अच्छा शोध अनुभवजन होता है (Good Research is Experiencial)** : इसका तात्पर्य यह है कि अनुसंधान मूल रूप से वास्तविक स्थिति के एक या अधिक पहलुओं से संबंधित है और ठोस समंकों से संबंधित है, जो शोध परिणामों को बाहरी वैद्यता का आधार प्रदान करता है।
4. **अच्छा शोध दोहराया जा सकता है (Good Research can Repeatable)** : यह विशेषता अनुसंधान परिणामों के अध्ययन की नकल करके सत्यापित करने की अनुमति देती है और इस तरह निर्णयों के लिए एक ठोस आधार तैयार करती है।

1.8.2 समस्याएं –

भारत में शोधकर्ता विशेष रूप से अनुभवजन्य अनुसंधान में लगे हुए कई समस्याओं का सामना कर रहे है। इनमें कुछ महत्वपूर्ण है–

1. शोध की कार्य प्रणाली में प्रशिक्षण का अभाव है, अर्थात् योग्य शोधकर्त्ताओं की कमी। कई शोधकर्ता अनुसंधान विधियों की जानकारी के बिना ही शोध कार्य कर रहे है। परिणामतः शोध निष्कर्ष गलत हो जाते है।

2. शोध संस्थाओं (विश्वविद्यालय आदि) तथा व्यावसायिक प्रतिष्ठानों और सरकारी विभागों के बीच कोई समन्वय नहीं मिलता है। बेहतर और वास्तविक शोध के लिए सभी संबंधितों के बीच संतोषजनक संपर्क विकसित होना चाहिए।

3. हमारे देश की अधिकांश व्यावसायिक इकाइयों में यह विश्वास नहीं है कि उनके द्वारा शोधकर्त्ताओं की आपूर्ति की गयी सामग्री का दुरूपयोंग नहीं होगा और इसलिए वे अक्सर शोधकर्त्ताओं को आवश्यक जानकारी की आपूर्ति करने में कतराते है। उपर से गोपनियता की अवधारणा व्यापारिक संगठनों के लिए पवित्र लगती है।

4. पर्याप्त जानकारी के अभाव में एक दूसरे के नीचा दिखाने के प्रयास में शोध अपनी महत्ता को दूर्वल कर देता है।

5. शोधकर्त्ताओं के लिए कोई आचार संहिता मौजूद नहीं है और अन्तर विश्वविद्यालय तथा अंतर विभागीय प्रतिद्वन्दिता भी काफी आम है। अतः शोधकर्त्ताओं के लिए आचार संहिता विकसित करने की आवश्यकता है, जिसका अगर इमानदारी से पालन किया जाए तो इस समस्या पर जीत हासिल की जा सकती है।

1.9 अनुभव अन्य शोध प्रकरण (व्यावसायिक प्रबंधन हेतु) :

व्यवसाय प्रबन्धन छात्र के रूप में, आपके पास शोध के लिए एक शीर्ष विचार होना चाहिए। यहाँ पर कुछ शोध प्रकरण सुचिबद्ध किये जा रहे है। जो भविष्य में शोधकरण के चुनाव या शोध प्रकरण के रूप में आपकी सहायता कर सकते हैं–

1. दूरस्थ श्रमिकों की बढ़ती अवधारणा और प्रबन्धन पर इसका प्रभाव।
2. स्टार्ट अप के प्रबन्ध में परिवर्तन का अध्ययन : रणनीतिक परिवर्तन व परिणाम।
3. वैश्वीकरण और व्यवसाय प्रबन्धन पर इसके प्रभाव का अध्ययन।
4. सामाजिक, आर्थिक एवं राजनीतिक समस्याओं को सुलझाने में प्रबन्धन की भूमिका का अध्ययन।
5. रणनीतिक प्रबंधन में वर्तमान और उभरते रूझानों की समीक्षा
6. पर्यावरणीय कारकों की पहचान और मूल्यांकन में रणनीतिक योजना की भूमिका का अध्ययन।
7. व्यवसाय की सफलता पर संगठनात्मक संस्कृति और गतिशीलता के प्रभाव का अध्ययन।
8. व्यापार मॉडल नवाचार प्रक्रिया की खोज : एक व्यवस्थित साहित्य समीक्षा।
9. कार्पोरेट सामाजिक जिम्मेदारी के लिए व्यावसायिक मामलों का विश्लेषण : एक एकीकृत ढ़ाँचा और साहित्य समीक्षा।
10. संयुक्त राज्य अमेरिका में एसएमई (SME) के व्यापार प्रदर्शन पर रणनीतिक प्रबंधन के प्रभाव।

1.10 शोध विधि बनाम् प्रविधि (Research Method Verses Methodlogy)

व्यवसाय प्रबन्धन छात्र के रूप में, आपके पास शोध के लिए एक शीर्ष विचार होना चाहिए। यहॉ पर कुछ शोध प्रकरण सुचिबद्ध किये जा रहे है, जो भविष्य में शोधकरण के चुनाव या शोध प्रायः शोधकर्त्ताओं द्वारा शोध विधि और प्रविधि को एक ही समझने की भूल की जाती रही है। जबकि दोनों में पर्याप्त अन्तर है। आइए इनके बीच के अंन्तर को समझते हैं। शोध विधि और प्रविधि के बीच अन्तर की रेखा को निम्नलिखित आधारों पर स्पष्ट रूप से खींचा जा सकता है।

शोध विधि (Research Method) :

अनुसंधान विधियों को उन सभी विधियों/तकनीकों के रूप में समझा जा सकता हैं, जिनका उपयोग अनुसंधान के संचालन के लिए किया जाता है। वे सभी विधियॉ जो शोधकर्ता के द्वारा अपनी शोध समस्या के अध्ययन के दौरान उपयोग की जाती है, शोध विधि कहलाती है चूँकि अनुसंधान का उद्देश्य, विशेष रूप से व्यावहारिक शोध, किसी समस्या के समाधान पर पहुँचने के लिए उपलब्ध डेटा और समस्या के अज्ञात पहलुओं का समाधान संभव बनाने के लिए एक दूसरे से संबंधित होना चाहिए।

कई बार शोध तकनिकों और शोध विधियों के बीच में भी अन्तर किया जाता है। शोध तकनीक उस व्यवहार व उपकरणों को सन्दर्भित करती है जिसका उपयोग हम अनुसंधान कार्यो को करने में करते है, जैसे कि अवलोकन करना, समंकों का संग्रहण करना, समंकों को संशोधित करना आदि।

शोध प्रविधि (Research Methodology) :

अनुसंधान प्रविधि या पद्धति समस्या को व्यवस्थित रूप से हल करने का एक तरीका है। इसे वैज्ञानिक रूप से शोध कैसे किया जाता है, इसका अध्ययन करने के विज्ञान के रूप में समझा जा सकता है। इसमें हम इन विभिन्न चरणों का अध्ययन करते हैं, जो आमतौर पर एक शोधकर्ता द्वारा अपनी शोध समस्या का अध्ययन करने के साथ–साथ उनके पीछे तर्क के रूप में अपनाएं जाते है। शोधकर्ता के लिए न केवल शोध विधियों/तकनीकों को जानना आवश्यक है, बल्कि कार्य प्रणाली भी जानना आवश्यक है। शोधकर्त्ताओं को न केवल यह जानने की जरूरत हैं कि कुछ सूचकांकों या परीक्षणों को कैसे विकसित किया जाए बल्कि माध्य, बहुलक, माध्यिका, मानक विचलन या काई वर्ग की गणना कैसे किया जाय, विशेष शोध तकनीकों को कैसे लागू किया जाए वल्कि उन्हें यह भी जानना होगा कि इनमें कौन सी विधियाँ या तकनीकें प्रांसंगिक हैं और कौन नहीं है। उनका क्या अर्थ होगा? क्या संकेत होगा? और क्यों? शोधकर्त्ताओं को विभिन्न तकनीकों में अन्तर्निहित मान्यताओं को समझने की भी

आवश्यकता है और उनके मानदण्डों को जानने की आवश्यकता है, जिनके द्वारा वे तय कर सकते है कि कुछ तकनीकें और प्रक्रियाएं कुछ समस्याओं पर लागू होगी और कुछ पर नहीं अर्थात शोधकर्ता के लिए आवश्यक है कि वह अपनी समस्या के लिए अपनी कार्यप्रणाली तैयार करें क्योंकि यह समस्या दर समस्या भिन्न हो सकती है। उदाहरण के लिए एक वास्तुकार जो कि एक इमारत को डिजाइन करता हैं वह मूल्यांकन करता है कि किस आधार पर दरवाजे, खिड़कियाँ और वेन्टिलेटर के विशेष आकार, संख्या, स्थान निश्चित करना हो इसी तरह अनुसंधान में शोधकर्ता को अनुसंधान के निर्णयों को लागू करने से पहले मूल्यांकन करना पड़ता है। जिसे वह बहुत स्पष्ट रूप से निर्दिष्ट करता है कि वह किन निर्णयों का चयन करता है और क्यों चयन करता है?

ऊपर जो कहा गया है, उससे हम कह सकते है कि शोध पद्धति के कई आयाम हैं और शोध विधियाँ शोध–पद्धति का एक हिस्सा है। अनुसंधान पद्धति (प्रविधि) का दायरा अनुसंधान विधियों की तुलना में व्यापक है। इस प्रकार जब हम शोध पद्धति की बात करते हैं तो हम न केवल शोध विधियों की बात करते है बल्कि अपने शोध अध्ययन के सन्दर्भ में उपयोग की जाने वाली विधियों के पीछे के तर्क पर भी विचार करते है और बताते है कि हम किस विधि या तकनीक का उपयोग कर रहे हैं और किनका उपयोग नहीं कर रहे है, ताकि शोध परिणामों का मूल्यांकन या तो स्वयं शोधकर्ता द्वारा या दूसरों द्वारा किया जा सके। शोध पद्धति के अन्तर्गत निम्न प्रश्नों का उत्तर दिया जाता है–

- शोध समस्या को कैसे परिभाषित किया गया?
- परिकल्पना कैसे तैयार की गयी?
- समंकों को एकत्र कैसे किया गया?
- समंकों के विश्लेषण की कौन सी तकनीक अपनायी गयी?

1.11 बोध प्रश्न :

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–
2. शोध के तीन उद्देश्य सैद्धान्तिक, व्यावहारिक एवं .... हैं।
3. शोध द्वारा .... की खोज की जाती है।
4. शोध से प्रमाणिक .... की प्राप्ति होती है।
5. वैज्ञानिक विधि में अनुसंधानकर्त्ता .... तथा .... दोनों विधियों का प्रयोग करता है।
6. शोध को .... आधारों पर विभाजित किया जाता है?
7. .... समस्या को व्यवस्थित रूप से हल करने का एक तालिका है।

निम्नलिखित में सत्य और असत्य छाँटिए–

1. शोध का अर्थ नये तथ्यों को खोजना एवं पुराने तथ्यों की पूर्ति एवं जाँच करना है।
2. शोध केवल ज्ञान के वृद्धि का साधना नही हैं।
3. शोध सत्यज्ञान के खोज की पिपाशा शान्त नहीं करता।
4. वैज्ञानिक विधि में तथ्यों का उद्देश्यपूर्ण संग्रह होता है।

5. वह शोध जो किसी समस्या अथवा घटनों के क्रिया पक्ष पर बल देता है, क्रिया शोध कहलाता है।

6. जिन तथ्यों का मापन संख्या के रूप में किया जा सकता है गुणात्मक शोध कहलाता है।

1.12 बोध प्रश्नों के उत्तर :

1. ज्ञान, 2. व्यक्तिगत, 3. सर्वोत्कृष्ट विकल्प, 4. निष्कर्षों, 5. अगमन, निगमन, 6. तीन, 7. शोध।

<u>सत्य और असत्य –</u>

1. सत्य, 2. असत्य, 3. असत्य, 4. साथ, 5. सत्य, 6.

1.13 स्वपरख प्रश्न :

1. शोध का अर्थ एवं परिभाषा को स्पष्ट करते हुए शोध के उद्देश्य का उल्लेख कीजिए।
2. शोध की वैज्ञानिक विधि क्या है? व्याख्या कीजिए।
3. शोध के विभिन्न प्रकारों का वर्णन कीजिए।
4. शोध विधि एवं प्रविधि में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
5. प्रभावशाली शोध समस्याएं एवं उनके निराकरण पर प्रकाश डालिए।

////

इकाई – 2 शोध समस्याएं

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आपकों

- शोध समस्या के अर्थ की जानकारी होगी।
- शोध समस्या को कौन–कौन से घटक प्रभावित करते हैं की जानकारी होगी।
- शोध समस्या के स्रोत को पहचानना आ जायेगा।
- शोध में नैतिकता का ध्यान रखना आ जायेगा।

2.1 अनुसंधान/शोध समस्या की प्रस्तावना

वैज्ञानिक अनुसंधान की एक विशेषता है कि वह सदा ही किसी प्रश्न अथवा समस्या के रूप में उत्पन्न होता है। उदाहरणार्थ टी.वी. द्वारा प्रचार करने से किसी वस्तु विशेष की बिक्री क्यों? अधिक हो जाती है। मानव अपनी आवश्यकता की संतुष्टि चाहता है। आवश्यकता की संतुष्टि किसी उपलब्ध साधन द्वारा ही होती है, यदि नहीं होती है तो समस्या उत्पन्न होती है। अतः समस्या को पहचानना, उसे कौन कौन से घटक प्रभावित करते हैं का उल्लेख इस इकाई में स्पष्ट किया गया है। साथ ही शोध करते समय एक शोधार्थी को किन–किन नैतिक मुद्दों को उचित स्थान देना है का भी विस्तृत व्याख्या इस इकाई में की गयी है।

2.2 शोध समस्या का अर्थ

मानव समाज अपनी आवश्यकताओं की संतुष्टि के लिए अनेक साधनों को अपनाता है। यदि किसी आवश्यकता की संतुष्टि किसी उपलब्ध साधन द्वारा नहीं हो पाती तो एक समस्या उत्पन्न हो जाती है। इसका अर्थ यह हुआ कि आवश्यकता की संतुष्टि के मार्ग में उपस्थित बाधा ही समस्या है। ज्यों ही साधन उपलब्ध हो जाते हैं, बाधा दूर हो जाती है और आवश्यकता की संतुष्टि के साथ ही समस्या का अंत हो जाता है। इसे निम्न रूप में भी प्रस्तुत किया जा सकता है–

आवश्यकता –साधन = समस्या

(Need – Resources = Problem)

अतः आप कह सकते हैं कि ''आवश्यकता की संतुष्टि के साधन या मार्ग में बाधा ही समस्या है।'' समस्या की गम्भीरता आवश्यकता की गहनता और साधनों की उपलब्धि पर निर्भर होती है। अतः आप समझ सकते हैं कि आवश्यकता जितनी प्रबल होगी। अवरोध बाधा, जितना तीव्र होगा, समस्या उतनी ही गम्भीर होगी। शोध कार्य में व्यक्तिगत समस्या को कम महत्व दिया जाता है।

जॉन सी टारनसेण्ड ने समस्या को एक वाक्य में परिभाषित करते हुए लिखा है कि ''समस्या तो समाधान के लिए प्रस्तावित प्रश्न है।''

फ्रेड एन0 कर्लिगर ने भी परिभाषित करते हुए लिखा है कि, ''समस्या एक प्रश्नवाचक वाक्य अथवा विवरण है जिसमें दो या दो से अधिक चल राशियों में सह–सम्बन्ध ज्ञात किया जाता है।''

एक शोधार्थी इसी प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने का प्रयास करता है अथवा चल राशियों में सह सम्बन्ध ज्ञात करता है तब उसे अनुसंधान कहा जाता है। उदाहरण के लिए, यदि यह समस्या लें कि विभिन्न प्रकार के कटौतियों का उपभोक्ताओं पर क्या प्रभाव पड़ता है? तो इसमें एक चलराशि कटौती व दूसरी उपभोक्ताओं पर प्रभाव।

2.3 शोध समस्या के घटक (Components)

शोध समस्या के घटकों की चर्चा करने से पूर्व समस्या का परिभाषीकरण करना आवश्यक हो जाता है। जब आप समस्या का चयन कर लेते हैं तो उसके बाद उसकी परिभाषा की जाती है–

''समस्या को परिभाषित करने का अर्थ है कि उसे विस्तृत रूप से और ठीक प्रकार से सुनिश्चित बनाया जाये।''

उपरोक्त कथन **डब्ल्यू0एस0मुनरो** तथा **डी0 इगिल हार्ट** द्वारा प्रस्तुत किया गया, जिसे **एफ0एल0 भिटनी** ने उद्धृत किया है।

शोध के लिए समस्या के चुनाव और कथन के बाद सबसे महत्वपूर्ण कार्य समस्या का परिभाषीकरण है। परिभाषीकरण समस्या के मूल और व्यावहारिकता को स्पष्ट करता है, वास्तव में परिभाषीकरण से तात्पर्य उसकी शुद्धता एवं विस्तारपूर्वक विशेष वर्णन करना है, प्रत्येक प्रमुख तथा सहायक प्रश्न का विशेष स्पष्टीकरण आवश्यक है। अनुसंधान की सीमा भी निश्चित करनी होगी। क्या कारण है? इसके लिए संबंधित पूर्व अध्ययन का भी वर्णन करना होगा।

समस्या को परिभाषित करने के पश्चात् समस्या के तत्वों का विश्लेषण निम्नलिखित रूप से किया गया है—

1. **समस्या का उसके तत्वों में विश्लेषण** : समस्या का कथन प्रश्न रूप में हो अथवा साधारण कथन के रूप में उससे संबंधित प्रश्न भी साथ–साथ आने चाहिए। इस प्रकार परिभाषीकरण में मूल समस्या को विभिन्न तत्वों में बॉट लेते है। इसे हम दूसरे शब्दों में परिकल्पना तथा सहायक परिकल्पना का निर्माण भी कह सकते है।

   उदाहरणार्थ – यदि हमारी मूल समस्या यह हो कि सामाजिक एवं आर्थिक स्तर का बालकों की शैक्षिक तथा व्यावसायिक रूचियों में कोई सम्बन्ध है? तो इसका विष्लेषण इस रूप से कर सकते है कि क्या उच्च स्तर के छात्रों की रूचियाँ भी अलग–अलग होती है, क्या शैक्षिक व्यावसायिक रूचियों में भी परस्पर सम्बन्ध है, आदि। इस प्रकार की समस्या के कितने पक्ष हो सकते हैं। सभी पर विचार कर लेगें।

2. **अध्ययन की सीमा का निर्धारण** : विभिन्न तत्वों के विश्लेषण के पश्चात् उसकी सीमा को भी निश्चित कर देना होगा।

   उदाहरणार्थ : यह अध्ययन प्रयागराज के केन्द्रीय विश्वविद्यालय के छात्रों तक ही सीमित है तथा केवल अमुक विधि का ही प्रयोग किया जाता है।

   इस प्रकार उसके स्वरूप, क्षेत्र तथा पद्यति की सीमा निश्चित कर दी जायेगी।

3. **सम्बन्धित साहित्य का सर्वेक्षण** : शोध समस्या के महत्वपूर्ण घटकों में से एक सम्बन्धित साहित्य का सर्वेक्षण है। जिससे स्पष्ट होता है कि इस समस्या का किन पक्षों पर किसके द्वारा कब और कितना कार्य किस पद्यति से किया गया है तथा कौन सा पक्ष अधूरा रह गया है? जिसे इस अध्ययन का विषय बनाया गया है? इसमें एक तो आवश्यक पुनरावृत्ति से बचा जा सकेगा, दूसरे शोधकर्ता की गहनता स्पष्ट होगी।

4. **ऑंकड़ों के समाधान तथा प्राप्त करने की विधि** : यहाँ पर इस बात को भी स्पष्ट करना होगा कि ऑकड़े कहाँ से प्राप्त होंगे तथा कैसे लिये जायेंगे? ऑंकड़े किस विधि से तथा किन यंत्रों का प्रयोग करके प्राप्त किया जायेगा? वे उपलब्ध हैं अथवा बनाने होंगे? ऑंकड़ों की विश्वसनीयता तथा बैधता देखनी होगी। इन बातों के साथ ही साथ ऑकड़ों को नियोजित करने के लिए किस विधि को अपनायेंगे, इसका स्पष्टीकरण भी देना होगा।

5. **प्रत्यय निर्मित तथा विशेष शब्दों की व्याख्या** : आइए इसे एक उदाहरण के द्वारा समझने का प्रयास किया जाता है। मानलिजिए कि आप ग्राहकों के किसी विशेष वस्तु के प्रति रूचियों का अध्ययन कर रहे हैं। यहाँ स्पष्ट करना आवश्यक है कि विशेष वस्तु के प्रति रूचियों से हमारा तात्पर्य क्या है? अथवा विद्यालयों के समन्वित जीवन का छात्रों की उपलब्धि पर प्रभाव देखना चाहते हैं तो समन्वित जीवन और उपलब्धि के प्रभाव की व्याख्या करनी होगी कि इनका किस विषय में हम प्रयोग करने जा रहे हैं। इस विश्लेषण को ध्यान में रखते हुए क्रियात्मक रूप से होना चाहिए।

6. **मूलभूत आवधारणाएँ** : कोई भी अनुसंधान कार्य कुछ मूलभूत अवधारणाओं के साथ आरम्भ होता है, शोध का फल इन्हीं अवधारणाओं की पुष्टि के पक्ष के अथवा विपक्ष में होता है। इन मूलभूत अवधारणाओं का स्पष्टीकरण समस्या के परिभाषीकरण का एक महत्वपूर्ण अंग है।

उदाहरणार्थ – मान लीजिए कि शोध का विषय एजेंटों के समायोजन का अध्ययन हैं इसमें अनेक अवधारणाएं शहर सम्बन्धित भिन्नता, एजेंटों की शैक्षिक योग्यता तथा बुद्धि स्तर इत्यादि मिलती है। इन्हें देखकर ही परिभाषीकरण पूरा हो सकेगा।

7. **समस्या का औचित्य तथा महत्व** : समस्या की उपयोगिता तथा उसके महत्व का औचित्य सिद्ध करने के लिए यह स्पष्ट करना नितान्त आवश्यक है कि इस शोध के परिणाम सिद्धान्त तथा व्यवहार को किस प्रकार प्रभावित करेंगे। यह स्पष्टीकरण किसी महत्वविहीन या अनावश्यक अन्वेषण पर अनुसंधान प्रयासों का उपत्यय होने से हमारी सुरक्षा करेगा।

8. **क्षेत्र का स्पष्टीकरण** : किसी समस्या को परिभाषित करने का अर्थ यह है कि उसकों चारों ओर से परिसीमित (सीमा में बाँधना) बना लिया जाये और उसने अपने समान उन प्रश्नों से जो किसी आवश्यकता से सम्बन्धित परिस्थिति में उपलब्ध होते हैं, विभिन्न लक्षणों में अन्तर के आधार पर सुगमतापूर्वक क्रम प्रदान कर लिया जाए।

9. **समय सूचिका** : शोधकर्ता के समय तथा शक्ति व्यय को सार्थक करने के लिए समय सूचिका का निर्माण आवश्यक होता है। परियोजना को विभागों में बॉटकर प्रत्येक भाग को पूर्ण करने के लिए तिथियॉ सुनिश्चित करने के लिए उस योजना को क्रमबद्ध रूप में व्यवस्थित करने में सहायता प्रदान होती हैं और शोध कार्य में देर लगाने की सामान्य प्रवृत्ति में भी कमी आ जायेगी।

किसी भी शोध योजना को बनाने के पूर्व उपरोक्त वर्णित बातों पर विचार कर लेना अत्यन्त आवश्यक होता है।

2.4 शोध समस्या के स्रोत को पहचानना

समस्या का चुनाव करने के लिये आपको यह जानना आवश्यक है कि समस्या का चयन कहॉ से किया जाता है और समस्या के चुनाव के लिए स्रोत क्या–क्या है? इसके लिए विभिनन विद्वानों ने निम्न स्रोतो को बतालाया है।

जे.सी. अल्माक ने समस्या ढूँढने के निम्नलिखित चार साधनों की चर्चा की है :

1. ऐतिहासिक अभिलेखों के साथ जो कुछ भी ज्ञात है, उसका विश्लेषण किया जाय।

2. व्याख्या में जो कमी रह गयी है, उसे अथवा अन्धकारपूर्ण क्षेत्र को ढूँढ निकाला जाय।

3. अनियमितताओं, विरोधाभास, मत भिन्नता के स्थल तथा ऐसे स्थलों को ढूँढ निकाला जाय जिनके निष्कर्षो की विधिवत जाँच नहीं की गयी है।

4. विषय से सम्बन्धित गोष्ठी, अध्ययन तथा चिन्तन को विकसित किया जाय तथा उन बातों पर दृष्टि रखी जाय जिनमें क्रियाएं अधिक हुई है, तथा जो उपेक्षित है। पद्यति को भी ध्यान में रखा जाय। इस विश्लेषण से हम समस्या को प्राप्त कर सकते है।

एच0एच0 अबेलसन (H.H. Abelson) ने समस्या के स्रोत के सम्बन्ध में निम्नलिखित चार सुझाव दिये है –

1. जो शिक्षा पा रहा है, शिक्षा की प्रक्रिया का अध्ययन कर रहा है, अथवा किसी प्रकार का शिक्षा सम्बन्धी कार्य कर रहा है। उसके अनुभव में अन्तर्द्वन्द (Conflicts in experience) एक प्रमुख साधन है। जिज्ञासा तथा अन्तर्द्वन्द्व उसके सामने अनेक समस्याएं स्वयं प्रस्तुत करता रहेगा।

2. दूसरा प्रमुख साधन शोध–प्रबन्धों के अन्त में दिये गये भावी अध्ययन सम्बन्धी सुझावों की एक सूची दी गयी होती है कि इस क्षेत्र में और क्या कार्य हो सकता है। इसके अध्ययन के द्वारा भी समस्या को ढूँढ निकाला जा सकता है।

3. अनुसंधान कार्य जो पूरा हो चुका है तथा इनका निचोड़ अथवा इनकी लघु रूपरेखा को देखकर बुद्धिमान व्यक्ति अनेक समस्याएं ढूँढ निकालते है।

4. चौथा प्रमुख साधन उन क्षेत्रों को ढूँढ निकालना है जो आज तक उपेक्षित रह गये हैं और जिन पर कार्य हुआ ही नहीं है।

विभिन्न विद्वानों द्वारा समस्या की उत्पत्ति तथा उसकी खोज और स्रोत के सम्बन्ध में अपने–अपने दृष्टिकोण प्रस्तुत किये गये है। यदि उनपर विश्लेषणात्मक विचार करके एक सर्वग्राह्य रूपरेखा प्रस्तुत किया जाय तो निम्नलिखित साधनों तथा विधियों द्वारा अनुसंधान के लिए समस्या का चुनाव सरलता से किया जा सकता है।

1. **शोध के लिए क्षेत्र का निश्चय** : एक शोधार्थी का प्रथम कर्तव्य होता है कि वह पहले क्षेत्र का निश्चय करें कि हमें अमुक विषय के अमुक क्षेत्र में कार्य करना है। स्वाभाविक है कि आप उसी क्षेत्र का चयन करेंगे जिसमें आपकी अभिरूचि होगी। यदि आज वाणिज्य विषय में अभिरूचि रखते है तो उत्सुक छात्र को पहले अपने रूचि के अनुसार यह निश्चय करना होगा कि वह लेखांकन, व्यावसायिक अर्थशास्त्र, व्यावसायिक–प्रबन्ध आदि विभिन्न क्षेत्रों में से किसमें विशेष अभिरूचि रखता हैं और कार्य करने का इच्छुक है।

2. **सम्बन्धित साहित्य का अध्ययन** : आप क्षेत्र का निर्धारण कर लिए तो इसके बाद उसे निम्न प्रकार के सम्बन्धित साहित्य का गहन तौर पर आलोचनात्मक अध्ययन करना होगा–

   अ. **पाठ्य पुस्तकें** : विषय या क्षेत्र से सम्बन्धित प्राचीन तथा नीवनतम मूल पाठ्य पुस्तकों का अध्ययन वैज्ञानिक दृष्टिकोण से करना चाहिए। इसका परिणाम यह होगा कि आपका सैद्वान्तिक ज्ञान इससे पुष्ट होगा, अनेक विज्ञासाओं की संतुष्टि होगी तथा उस विषय से सम्बन्धित विशेष समस्याओं का ज्ञान भी होगा। कभी–कभी पाठ्यपुस्तकों के अन्त में शोध के लिए समस्याएं भी दी गयी होती है। जो आपको समस्या को ढूँढने तथा चयन करने में सहायता करती है।

   ब. **पत्र–पत्रिकाएँ** : पाठ्य पुस्तकों के साथ–साथ समाचार–पत्रों में प्रकाशित विचारों तथा उस विषय से सम्बन्धित पत्रिकाओं का अध्ययन भी उसके चिन्तन को रचनात्मक दिशा प्रदान करेगा तथा उस क्षेत्र में हो रहे कार्यो की प्रकृति और उसके फल से परिचित होकर अपना मार्ग निश्चित करने में उसे विशेष सहायता मिलेगी।

   स. **पूर्व में किये गये अनुसंधान का अवलोकन** : संबंधित विषयों में शोध कार्य अनवरत चलते रहते हैं, इनमें से कुछ का प्रकाशन होता है तथा कुछ शोध संस्थाओं के पुस्तकालयों में रहते है। एक शोधार्थी को उन किये गये शोध प्रबंधों का भी अध्ययन करना चाहिए। जिससे यह ज्ञात होगा कि

इस विषय में किस पक्ष पर कितना कार्य हो चुका है, वह कार्य किस प्रकार किया गया है तथा वर्तमान में किस पक्ष पर क्या कार्य, किस रूप में हो रहा है? इस प्रकार के ज्ञान से समस्या के क्षेत्र में विशेष सूझ पैदा करेगा पुनरावृत्ति से बचा जा सकेगा तथा कार्य की रूपरेखा निश्चित करने में सरलता होगी।

3. **शोधकर्ता और प्राध्यापक सम्पर्क** : समस्या के चुनाव तथा विषय की दुरूहता को समझने में प्राध्यापक की भूमिका को नकारा नहीं जा सकता है। प्राध्यापक के व्यक्तित्व, कार्यशैली और रूचि का प्रभाव छात्र में एक सूझ, जिज्ञासा और उत्तेजना पैदा करता है। जिज्ञासु शोधकर्ता को कक्षा में और कक्षा के बाहर तथा गोष्ठियों और महासभाओं में अपने प्राध्यापक एवं अन्य प्राध्यापकों से मिलकर चर्चा करनी चाहिए तथा आवश्यकतानुसार समस्याओं के स्पष्टीकरण का प्रयास करना चाहिए।

4. **वर्तमान कार्यो का वैज्ञानिक निरीक्षण** : आज–कल कौन से कार्य पद्धति का उपयोग शोध के लिए किये जा रहे हैं उनका वैज्ञानिक निरीक्षण शोधकर्ता में समस्याओं के प्रति सूझ उत्पन्न करेगा और उसमें रूचि भी विकसित करेगा।

5. **शोधकर्ता का स्वयं का अनुभव** : शोधकर्ता को विज्ञासु होना चाहिए और सजग दृष्टि से कार्य करने वाला होना चाहिए तथा उसका दृष्टिकोण वैज्ञानिक हैं तो उसका स्वयं का अनुभव भी शोध के लिए अनेक समस्याएं प्रस्तुत करता रहता है। यह बात अनुभव–वृद्धों के लिए तो ठीक है, नये सीखने वालों के लिए नहीं।

6. **पूर्व में किये गये कार्य की पुनरावृत्ति** : पूर्व में किये गये कार्य की पुनरावत्ति भी हम करते हैं और उसी समस्या पर कार्य प्रारम्भ कर देते हैं, जिस पर कहीं और कार्य हो चुका है अथवा वहीं पर कुछ वर्ष पूर्व हो चुका हो। इस प्रकार की पुनरावृत्ति की समस्या तभी ली जा सकती है जबकि–

   (क). यह ज्ञात हो कि पुनरावृत्ति से कुछ महत्वपूर्ण बाते ज्ञात हो सकेगी।

   (ख). मूल अध्ययन में जो सन्देहास्पद स्थल रह गये थे, उनका निवारण किया जा सकेगा, तथा

   (ग). पहले किये गये अध्ययन की वैधता के सन्देह के लिए पर्याप्त प्रमाण मिल चुके है। यदि इनमें से कोई लाभ नहीं होता है तो किसी पुरानी समस्या पर पुनः कार्य करना प्रेषण ही होगा।

2.5 व्यावसायिक शोध से सम्बन्धित नैतिक मुद्दे / पहलू

शोध एक ईमानदारीपूर्ण किया जाने वाला प्रयास है, जो किसी विषय क्षेत्र की समस्याओं का समाधान प्रस्तुत करता है, नवआगंतुकों को शोध प्रशिक्षण प्रदान करता है, ज्ञान के भण्डार में वृद्धि करता है, व्यक्तियों में वैज्ञानिक चेतना जगाता है तथा आने वाले भविष्य को सुन्दर बनाता है। अतः यह अपेक्षा की जाती है कि प्रत्येक शोध कार्य इन सभी गुणों से संपन्न हो तथा एक शोधकर्ता को भी अपने व्यक्तित्व में नैतिक गुणों का समावेश करना चाहिए। क्योंकि शोध मूल्यों की सम्पूर्ण गुणवत्ता शोधकर्ता के आचार–विचार संवंर्ग, रूचि एवं जीवन मूल्यों पर ही निर्भर करती है।

किसी भी व्यावसायिक शोध को उसके पूर्णता तक पहुँचाने के लिए जिन नैतिक मूल्यों की आवश्यकता होती है। उनका वर्णन निम्न रूप में किया गया है–

2.5.1. छल रचना (**Fabrication**) :

यदि साहित्य चोरी (आगे व्याख्या किया गया है) नौसिखिए का अपराध है, तो छलरचना पूर्णतः विशेषज्ञ के द्वारा किया गया अपराध है।

छलरचना या **मिथ्याकरण** के अन्तर्गत समंकों की जानबूझकर गलत व्याख्या, झूठा प्रस्तुतीकरण एवं प्रतिवेदन तैयार करना, अप्रयुक्त शोध प्रक्रिया का अनुपालन करना आदि शामिल किये जाते है। छलरचना घोखाघड़ी (Cheating) का ही एक रूप है। यह विज्ञानको उल्टा करने के बारे में है तथा यह वहाँ से शुरू होता है, जहॉ से प्रश्न समाप्त होते है।

छलकपट शायद साहित्यिक चोरी की तुलना में कम बार होता है, लेकिन यह कदाचार का एक अधिक गम्भीर रूप है। **डेनियल फेनली (2009)** ने पाया है कि 2 प्रतिशत वैज्ञानिक कम से कम एक बार समंकों को गढ़ने या संशोधित करने जैसे कदाचार (छलकपट) के गम्भीर रूपों को स्वीकार करते है। इसमें शोधकर्ता जानबूझकर अपने सहयोगियों को शोध के परिणाम गढने के लिए धोखा देते है। इस प्रकार ये मौलिक अनुसंधान मानकों और बुनियादी सामाजिक मूल्यों का उलंघन करते है।

अतः छलरचना एक धोखाघड़ी है जो तथाकथित विद्वानों द्वारा शोध सारांशों को बदलने की क्षमता को प्रभावित करते है। छलरचना के तीन रूपों की व्याख्या निम्न है –

क. **जालसाजी (Forgery)** : जालसाजी एक सफेद पोष अपराध है जो आमतौर पर किसी को (स्वयं के अलावा) को धोखा देने के विशिष्ट इरादे से एक कानूनी साधन के झूठे बनाने या भौतिक परिवर्तन को सन्दर्भित करता है। अतः जालसाजी एक उत्पादित या परिवर्तित वस्तु से संबंधित होता है।

ख. **धोखा धड़ी (Chiating)** : धोखाधड़ी एक व्यापक कानूनी शब्द है जो बेइमान कृत्यों को सन्दर्भित करता है। जानबूझकर किसी अन्य व्यक्ति या इकाई को धन, सम्पत्ति या कानूनी अधिकारों से अवैध रूप से बंचित करने के लिए धोखे का उपयोग करता है। धोखाधड़ी को पूरा करने के लिए तथ्य को जानबूझकर गलत उपयोग किया जाता है।

ग. **भूत लेखन (Ghostwriting)** : भूत लेखन एक ऐसी प्रथा है जो 1980 और 1990 के दशक में सामने आयी। जब कोई शोधकर्ता बहुत पहले लिखी गयी प्रतिवेदन को वर्तमान में शामिल कर लेता है तो वह भूत लेखन कहलाता है। ये वास्तविक परीक्षणों की नकल कर लेते है। जिसे उचित शोध से अलग करना मुश्किल होता है।

2.5.2 असत्यकरण (**Falsification**) :

अनुसंधान सामग्री, उपकरण या प्रक्रियाओं में हेरफेर करना, डेटा या परिणामों को बदलना या छोड़ना ही शोध में असत्यकरण कहलाता है। दूसरे शब्दों में जो सत्य नही है और उसे करना ही असत्यकरण कहा जाता है। इसका परिणाम यह होता है कि शोध रिकार्ड में शोध का सटीक प्रतिनिधित्व नहीं हो पाता है।

दूसरे शब्दों में असत्यकरण/मिथ्याकरण जिसका शाब्दिक अर्थ है **'झूठ प्रस्तुत करना'** हेरफेर के रूपों को शामिल करना। ये शोधकर्त्ताओं को एक ऐसा समंक श्रृखला का उपयोग करने की अनुमति देता है जो पक्षपाती या गलत दावों का समर्थन करता है। असत्यकरण में निम्नलिखित तथ्य शामिल होते है।

क. कुछ निष्कर्षो को छोड़ना (Trimming)

ख. थोड़ा सा परिवर्तन (Slightly changing)

ग. छवियों को बदलना (Altering Images)

घ. परिणामों को गलत तरीके से प्रस्तुत करना (Misrepresenting Result)

ड़. केवल निष्कर्षो का रिपोर्ट नहीं करना (Not reporting findings)

अतः आप कह सकते है कि यदि छलरचना और साहित्यिक चोरी विज्ञान के घातक पाप है तो मिथ्याकरण इसका दैनिक पाप है।

2.5.3 साहित्यिक चोरी (**Plagiarism**) :

साहित्यिक चोरी (Plagiarism) लैटिन शब्द (Plagarius) से लिया गया है। जिसका अर्थ है अपहरणकर्ता, अर्थात् दूसरों के काम (या विचारों) को विनियोजित करके और इसे अपने स्वयं के रूप में पारित करना ही साहित्यिक चोरी कहलाता है। एक समय में रोमन कवि मार्शल ने आरोप लगाया था कि उनकी कविताओं को अन्य व्यक्तियों ने अपने नाम से सुनाया था रोमन कानून में इस प्रकार के कार्य करने वाले व्यक्तियों के लिए **'साहित्य चोर'** शब्द का उपयोग किया गया था।

साहित्यिक चोरी एक समस्या : साहित्यिक चोरी से जुड़ी दो नैतिक समस्याएँ है।

1– आपके द्वारा किये गये काम का श्रेय लेना।

2– विज्ञान की प्रतिष्ठा विश्वास और जवाब देही

साहित्यिक चोरी पहले सिद्धान्त का उलंघन करती है तथा दूसरे सिद्धान्त को कमजोर करती है। जनता की नजर में साहित्यिक चोरी एक कदाचार है जो अव्यवहारिक है। यह अक्सर धोखा धड़ी के रूप में मिलता है। कोई भी वैज्ञानिक जानकारी शोध पत्र के रूप में प्रकाशित की जाती है। वैज्ञानिकों अथवा साहित्यकारों या शोधार्थियों द्वारा कठिन परिश्रम से किये गये अपने कार्य को विभिन्न शोध पत्रिकाओं में प्रकाशित कराना शोध की एक स्वस्थ एवं महत्वपूर्ण परम्परा है। किन्तु कुछ व्यक्ति बिना परिश्रम किए ही प्रतिष्ठा प्राप्त करना चाहते है। ऐसे में वे अन्य व्यक्तियों द्वारा किये गये समवर्ती कार्य को अपने नाम से प्रकाशित कराने में सफल हो जाते है। ऐसा करना किसी चोरी से कम नहीं है क्योंकि चोरी चाहे धन की हो, वस्तु की हो अथवा किसी के ज्ञान और परिश्रम की, वह चोरी ही कहलाएगी।

साहित्यिक चोरी के प्रकार – साहित्यिक चोरी को मुख्यतः चार प्रकार में बॉटा जा सकता है, जो निम्नलिखित है –

2.5.3.1 प्रत्यक्ष साहित्यिक चोरी :

दूसरे व्यक्ति के काम को शब्दशः नकल करने का कार्य प्रत्यक्ष साहित्यिक चोरी कहलाता है। उदाहरण के लिए एट्रिव्यूशन या उद्धरण चिन्हों को शामिल किए बिना किसी पुस्तक या लेख के अनुच्छेद को अपने शोध में सम्मिलित करना, प्रत्यक्ष साहित्यिक चोरी है। यदि आप साहित्यिक चोरी करते हैं तो आपको टर्नितिन जैसे टूल के कारण पकड़े जाने की संभावना है।

2.5.3.2 पैराफ्रेश्ड साहित्यिक चोरी :

इस प्रकार की चोरी में किसी और के काम में कुछ (अक्सर कास्मेटिक) बदलाव करना शामिल है, फिर इसे अपने काम के रूप में पास करना। जब तक कोई विशिष्ट विचार सामान्य ज्ञान न हो। आप उद्धरण प्रदान किए बिना इसे अपने शोध पत्र में शामिल नही कर सकते– भले ही आपने कोई प्रत्यक्ष उद्धरण शामिल न किया हो।

2.5.3.3 ''मोजेक'' साहित्यिक चोरी :

प्रत्यक्ष और व्याख्यात्मक साहित्यिक चोरी का यह एक संयोजन है। इसमें विभिन्न शब्दों, वाक्यांशों और वाक्यों (शब्द के लिए कुछ शब्द, कुछ पैराग्राफ) को आपके शोध पत्र में उद्धरण चिन्ह या गुण प्रदान किए बिना उछालना शामिल है।

2.5.3.4 आकस्मिक साहित्यिक चोरी :

यह तब होता है जब उद्धरण गायब होते है। स्रोतों को गलत तरीके से उद्धत किया जाता है या कोई लेखक उद्धरण के बिना एक विचार साझाा करता है जो उतना सामान्य ज्ञान नही है जितना उन्होंने सोचा था। आकस्मिक साहित्यिक चोरी अक्सर एक अव्यवस्थित शोध प्रक्रिया और अन्तिम समय में समय की कमी का परिणाम होता है। अंततः आप अपने स्रोतो को उचित रूप से उद्धृत करने में विफल रहते है, तो आपने साहित्यिक चोरी की है– भले ही आपका श्रेय देने का हर इरादा है।

साहित्यिक चोरी से कैसे बचे : साहित्यिक चोरी न करनी पड़े इसके लिए शोधार्थी को निम्नलिखित कदम उठाने चाहिए।

क. शोध और मंथन में समय बिताने के बाद अपने शोध पत्र की एक विस्तृत रूप रेखा लिखे।

ख. यदि आप अपने शोध पत्र में किसी लेखक के विचारों को व्याख्या करने की योजना बना रहे है। तो मूल पाठ को देखे बिना स्पष्टीकरण लिखें। यदि कठिन लगे तो विचारों को संवादी स्वरों में लिखने का प्रयास करें।

ग. शोध ग्रथ सूची बनाना आवश्यक है, जब भी आप अपने मसौदे में किसी लेखक के विचारों का उद्धरण या व्याख्या करते हैं, तो प्रासंगिक वाक्य के ठीक बगल में स्रोत की जानकारी शामिल करें।

घ. एक आनलाइन साहित्यिक चोरी चेकर जैसे क्वेटेक्स का प्रयोग करें।

2.6 सैद्धान्तिक प्रश्न

1. शोध समस्या की अवधारणा को स्पष्ट करते हुए शोध समस्या के घटकों का उल्लेख करें।
2. ''समस्या के स्रोत का पहचान करना'' एक समस्या है विचार दे।
3. साहित्यिक चोरी का शोध में क्या उपादेयता है प्रकाश डालिए।
4. छल रचना और जालसाजी में क्या अन्तर है स्पष्ट करें।

////

इकाई – 3 शोध प्रारूप

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात आप निम्न का ज्ञान कर पायेंगे–

- शोध प्रारूप किसे कहते है, अर्थात् शोध प्रारूप की अवधारणा का।
- शोध प्रारूप की विशेषताओं का।
- शोध प्रारूप का वर्गीकरण कर सकेंगे।
- शोध प्रारूप को कौन–कौन से तत्व प्रभावित करते है का ज्ञान कर पायेगें।

3.1 प्रस्तावना

किसी भी उद्देश्य को प्राप्त करने के लिए उनके विभिन्न विषयों के लिए योजना बनानी पड़ती है, यही योजना प्रारूप कहलाता है। योजना का सही–सही बन जाने का तात्पर्य उद्देश्य की प्राप्ति का मार्ग प्रशस्त होना होता है। अतः शोध प्रारूप की अवधारणा को समझना, उसकी विशेषताओं के साथ–साथ योजना के चरण एवं उसे प्रभावित करने वाले तत्वों को जानना महत्वपूर्ण होता है। प्रस्तुत इकाई में शोध–प्रारूप से संबंधित सभी मुख्य बातों को सम्मिलित किया गया है।

3.2 शोध प्रारूप (अभिकल्प) की अवधारणा

वैज्ञानिक शोध प्रक्रिया के तीसरे सोपान (प्रथम समस्या को पहिचानना एवं द्वितीय परिकल्पनाओं का प्रतिपादन) में शोध प्रारूप तैयार किया जाता है। आप जो शोध की रूप रेखा को तैयार करने के लिए जो योजना बनायेगें वही शोध का प्रारूप होगा। यह न्यादर्श की प्रविधि पर आधारित होती है। इसके अन्तर्गत शोध उद्देश्य,

न्यादर्श तथा उसका आकार, शोध विधि, प्रदत्तों के संकलन के परीक्षण तथा प्रदत्तों के विश्लेषण की प्रविधि को सम्मिलित किया जाता है, जिसकी सहायता से उद्देश्यों की प्राप्ति की जा सके तथा परिकल्पनाओं की पुष्टि हो सके। शोध कार्य आरम्भ करने से पूर्व आपके द्वारा उसके प्रारूप का नियोजन किया जाना आवश्यक होता है।

3.2.1 **शोध प्रारूप का अर्थ एवं परिभाषा** : शोध समस्या के दो सोपान पूरा होने के पश्चात् आपके सामने प्रश्न यह उठता है कि शोध किस प्रकार किया जाये? किसी भी अनुसंधान कार्य को करने से पहले उसके बारे में एक निश्चित योजना बनायी जाती है। इसी योजना को शोध प्रारूप/प्ररचना अथवा शोध योजना कहते है।

रावर्ट फर्बर, सिडने कोहेन तथा डैनिड जे लूक ने अपनी पुस्तक "The design of Research Investigations" में शोध प्रारूप को परिभाषित करते हुए लिखे हैं, ''शोध प्रारूप पहले से लिये गये निर्णयों की एक श्रृखला है, जो कि समूचे रूप में जॉच का कार्य करने में एक वृहत योजना अथवा प्रतिनिदर्शन का कार्य करती है।''

एफ0एन0 कालिंजर के शब्दों में, ''अनुसंधान अभिकल्प अन्वेषण की योजना, संरचना एवं रणनीति है जिसकी रचना इस प्रकार की जाती है कि शोध प्रश्नों के उत्तर प्राप्त हो सकें तथा प्रसरण को नियंति किया जा सकें।'' ने अपनी पुस्तक "The design of Research Investigations" में शोध प्रारूप को परिभाषित करते हुए लिखे हैं, ''शोध प्रारूप पहले से लिये गये निर्णयों की एक श्रृखला है, जो कि समूचे रूप में जॉच का कार्य करने में एक वृहत योजना अथवा प्रतिनिदर्शन का कार्य करती है।''

हार्पर डब्ल्यू ब्यायड तथा **राल्फ बेस फाल** ने भी विपणन शोध (Marketing Research) में शोध प्रारूप की परिभाषा निम्नलिखित रूप में दिये हैं, ''वैज्ञानिक रूप से किये जाने वाले प्रत्येक अनुसंधान में तथ्यों के संकलन को नियंत्रण करने के लिए एक निश्चित विधि एवं रूपरेखा होती है। इसी विधि एवं रूपरेखा को शोध प्रारूप कहते है। इसका उद्देश्य यह निश्चित करना होता है कि आवश्यक तथ्य सही एवं कम खर्च में एकत्रित कर लिये जाए।''

यह एक ऐसी सम्पूर्ण रूपरेखा है जिसमें वे सभी रूपरेखाएँ होती जो एक शोधकर्त्ता परिकल्पनाओं के निर्माण से लेकर समंकों के अंतिम विश्लेषण तक करता है। अनुसंधान अभिकल्प में शोध का विषय, अध्ययन की प्रकृति, विषय का परिचय, उद्देश्य, अवधारणाओं, चरों, एवं परिकल्पनाओं का वितरण, समयावधि समंक एकत्रीकरण को आधार व प्रविधियों वर्गीकरण, सारणीयन, विश्लेषण तथा निर्वचन तकनीकों का विवरण, शोध सीमाएँ तथा संदर्भ ग्रन्थों की सूची आदि विषय वस्तु सम्मिलित होती है। एक अनुसंधान अभिकल्प लचीला होना चाहिए जिससे उसे आवश्यकतानुसार संशोधित एवं परिवर्तित किया जा सकें; क्योंकि एक अनुसंधान अभिकल्प को प्रभावित करने वाले घटक जैसे संमकों की अपर्याप्ता, समयाभाव, साधनों की उपलब्धता, अनुसंधानकत्ता की योग्यता तथा असामान्य कारक जैसे आर्थिक, राजनैतिक तथा प्राकृतिक घटनाएँ।

इस प्रकार हम यह कह सकते है कि शोध के उद्देश्यों के आधार पर अध्ययन विषय के विभिन्न पक्षों को उद्घटित करने के लिए पहले से ही बनाई गई योजना की रूपरेखा को शोध प्रारूप/प्ररचना कहते है।

3.3 शोध प्रारूप की विशेषताएँ

शोध प्रारूप की विशेषताएं निम्न प्रकार की है–

1. शोध प्रारूप का निर्माण शोध कार्य आरम्भ करने से पूर्व किया जाता है।
2. शोध प्रारूप शोध कार्य के लिए रूपरेखा का निर्माण करना होता है।

3. शोध प्रारूप सामाजिक घटनाओं का सरलीकरण करता है।
4. शोध प्रारूप शोधकर्ता के लिए पथ प्रदर्शक की भूमिका निभाता है जिसके प्रयोग से हमें शोध की निश्चित दिशा का ज्ञान होता है।
5. शोध प्रारूप शोध कार्य में आने वाली बाधाओं को दूर कर शोध कार्य को सरल करता है।
6. शोध प्रारूप के निर्माण से शोध कार्य सीमित समय, धन और श्रम में पूर्ण हो जाता है, परिणामस्वरूप तीनों की बचत होती है।
7. शोध प्रारूप शोध समस्या पर आधारित होता है।
8. शोधकर्ता शोध प्रारूप से शोधकार्य के अधिकतम उद्देश्यों को प्राप्त करने में सफल होता है।
9. शोध प्रारूप शोध कार्य में परिस्थितियों को नियंत्रित कर शोध कार्य को सरल बनाता है।
10. इससे शोध कार्य में सत्यता, प्रामाणिकता और विश्वसनीयता आती है।
11. शोध प्रारूप अध्ययन पद्यतियों और अनुसंधान उद्देश्यों दोनों को जोड़ता है।

3.4 शोध प्रारूप का वर्गीकरण

शोध प्रारूप कई प्रकार के हो सकते हैं। हर प्रकार के प्रारूप के कुछ लाभ भी होते है और कुछ दोष भी होते है। अलग–अलग प्रकार की समस्याओं के लिए अलग–अलग प्रकार का प्रारूप तय करना पड़ता है।

किस समस्या के लिए किस प्रकार का शोध प्रारूप उचित होगा? यह निश्चित करना ही उपागम निर्धारण कहलाता है। शोध प्रारूप को निम्न चार वर्गो में विभाजित किया जा सकता है, जिसका वर्णन निम्नवत है–

3.4.1 अन्वेषणात्मक शोध प्रारूप **Exploratory Research Design** :

जब किसी अनुसंधान कार्य का उद्देश्य किसी समस्या में अन्तर्निहित कारणों को ढूढ निकालना होता है तो उससे सम्बद्ध रूपरेखा को अन्वेषणात्मक शोध प्रारूप कहते है। इसके अन्तर्गत शोध कार्य की रूपरेखा इस ढंग से प्रस्तुत की जाती है कि समस्या की प्रकृति एवं कारणों की खोज की जा सके। अध्ययन के पुराने व विकसित विषयों में परिकल्पनाओं के निर्माण में पहले किये गये शोध कार्यो तथा विषय के सिद्धान्तों से सहायता मिलती है।

उदाहरण के लिए किसी कम्पनी के सामने यह समस्या हो कि प्रबन्धक ने जितने विक्रय का पूर्वानुमान लगाया हो और वह पूर्वानुमान से कम पाया गया है तो ऐसा क्यों? शोधकर्ता इसके कई कारण सोच सकता है, जैसे कम्पनी का उत्पाद घटिया किस्म का हो, मूल्य अधिक हो, विज्ञापन व अन्य विक्रय संबर्द्धन के तरीके अच्छे न हो या कम्पनी के विक्रय प्रतिनिधि कम हो इत्यादि बहुत से कारण हो सकते है। सभी कारणों की जॉच करना संभव नहीं होता, इसलिए अन्वेषणात्मक शोध द्वारा यह जानने का प्रयत्न किया जाता है कि समस्या का संभावित कौन सा कारण हो सकता है?

3.4.2. विवरणात्मक शोध प्रारूप (**Descriptive Research Design**) :

विवरणात्मक या वर्णात्मक अध्ययन ऐसे बनाये जाते हैं कि वह सम्बन्धित समस्या की विशेषताओं का वर्णन करें। उदाहरण के लिए किसी कम्पनी के उत्पाद के बाजार को परिभाषित करने के लिए अध्ययन किया जाता है। इस अध्ययन में जो तथ्य व सूचनाएं एकत्र की जायेगी वे इस प्रकार होगी, कम्पनी के उत्पाद को क्रय करने वाले उपभोक्ता उत्तरी भारत में रहते है या दक्षिणी भारत में? किन प्रांतो में अधिक है तथा कितने में कम? बड़े शहरों के अधिक उपभोक्ता है या गॉवों के? सम्पन्न वर्ग के अथवा मध्यम अथवा विपन्न वर्ग के है? बड़े–बूढे है अथवा जवान अथवा बच्चे हैं?

कोई परीक्षात्मक अध्ययन बिना किसी निश्चित परिकल्पना के आरम्भ नहीं किया जा सकता, परन्तु एक वर्णनात्मक अध्ययन यह सोचकर आरम्भ किया जा सकता है कि जो तथ्य एकत्रित किये जायेंगे वे महत्वपूर्ण होंगे। वर्णनात्मक अध्ययन का एक बहुत बड़ा दोष यह है कि इसमें बेकार तथ्यों को एकत्रित करने का बढ़ावा मिलता है। वर्णनात्मक अध्ययन उसी समय उपयोगी होती है जबकि निश्चित उद्देश्य के लिए तथ्य एकत्रित किये जायें और शोधकर्ता द्वारा उन तथ्यों का विश्लेषण एवं व्याख्या की जाये।

अन्वेषणात्मक अध्ययन के प्रारूप में लोचता होती है जबकि वर्णात्मक अध्ययन के प्रारूप में निर्दिष्टता होती है क्योंकि ऐसे अध्ययन द्वारा किसी स्थिति या समस्या का समूचा व सही विवरण प्राप्त करने का प्रयत्न किया जाता है।

3.4.3 निदानात्मक शोध प्रारूप (**Diagnostic Research Design**) :

शोध प्रारूप का ऐसा वर्ग जिसमें शोध समस्या के कारणों का पता लगाने के अतिरिक्त उस समस्या के समाधान के सम्बन्ध में भी जानकारी प्राप्त करने का प्रयत्न किया जाता है। दूसरे शब्दों में यह कह सकते है कि किसी विशिष्ट समस्या के निदान की खोज करने वाले शोध कार्य को निदानात्मक शोध कहते है।

शोधकर्ता वैज्ञानिक पद्यतियों के द्वारा समस्या के कारणों को जान लेने के बाद उसका उचित समाधान किस ढंग से सर्वोत्तम रूप में हो सकता है। इस बात की खोज करता है। इस प्रकार की खोज मुख्यतः इस कारण की जाती है क्योंकि समस्या विशेष का हल तत्काल ही करने की आवश्यकता होती है। सम्भावित हल को ध्यान में रखते हुए परिकल्पना का निर्माण किया जाता है, इससे अध्ययन कार्य सरल हो जाता है और वैज्ञानिक ढंग से किया जा सकता है।

3.4.4. परीक्षणात्मक शोध प्रारूप (**Experimental Research Design**) :

नियंत्रित दशाओं में रखकर निरीक्षण परीक्षण द्वारा संबंधित घटनाओं का व्यवस्थित अध्ययन करने की रूपरेखा को परीक्षणात्मक शोध प्रारूप कहते है। इसको इस प्रकार समझ सकते हैं कि प्रयोगशाला पद्यति के द्वारा विषय का अध्ययन परीक्षणात्मक शोध का ही दूसरा नाम है। परीक्षण को हम ऐसी विधि कह सकते हैं जिसके तथ्यों का संकलन इस प्रकार किया जाता है कि उनसे परिकल्पनाओं की सही जाँच की जा सकती है।

परीक्षण में शोधकर्त्ता एक कृत्रिम (Artificial) स्थिति पैदा कर देता है जिससे कि जिस प्रकार के तथ्यों की आवश्यकता है उनको सही–सही एकत्रित करके माना जा सके। परीक्षण में कृतिम स्थिति पैदा करके कुछ तत्वों को नियंत्रित करके अध्ययन किया जाता है जिससे कारण व प्रभाव का सही सम्बन्ध मालूम किया जा सके।

3.5 शोध प्रारूप को प्रभावित करने वाले तत्व

शोध प्रारूप को निम्नलिखित तत्व प्रभावित करते हैं जिनकों एक शोधकर्ता को शोध करते समय ध्यान में रखना आवश्यक है :–

3.5.1. शोध समस्या की प्रकृति (**Nature of the Research Problem**) :

यदि शोध समस्या का परख उचित रूप में कर लिया जाता है अथवा उसके स्वरूप से परिचित हो गये तो शोध का बहुत सा कार्य सुगम हो जाता है। कहा गया है कि सुप्रस्तुत समस्या का आधा समाधान पहले ही हो जाता है। शोध की योजना बनाते समय शोध समस्या की प्रकृति को ध्यान में रखना

आवश्यक होता है। शोध प्रारूप शोधकर्ता के लिए एक मार्गदर्शक के रूप में होती है। यह मार्गदर्शन शोध समस्या की प्रकृति से प्रभावित होती है शोधकर्त्ता अन्वेषणात्मक निदानात्मक, प्रयोगात्मक अथवा विवरणात्मक आदि कौन सा अध्ययन कर रहा है।

3.5.2. अध्ययन का उद्देश्य (Purpose of the Study) :

जब आप शोध समस्या का पहचान कर लेते हैं, स्थिति का विश्लेषण तथा अनौपचारिक जाँच कर लेते हैं तथा शोध समस्या भी निश्चित कर लेते हैं, तब शोध प्रारूप बनाने का प्रश्न आता है। शोध प्रारूप तैयार करने में सबसे पहला कार्य हैं शोध के उद्देश्य निर्धारित करना। इसका तात्पर्य यह है कि यह तय करना कि शोध किस उद्देश्य से किया जा रहा है? शोध प्रारूप क्यों बनायी जा रही हैं? इस योजना से क्या मिलना है? जब तक इन प्रश्नों का समुचित उत्तर नहीं मिल जाता तब तक सुनियोजित शोध प्रारूप संभव नहीं है। अतः शोध प्रारूप में अध्ययन का उद्देश्य लिखा जाना चाहिए। यह वाक्यों अथवा प्रश्नों के रूप में भी हो सकते है। प्रमुख उद्देश्यों के साथ सहायक उद्देश्यों का उल्लेख भी आवश्यक है।

3.5.3 शोध कार्य का ज्ञान और अनुभव (Researher's Knowledge & Experience) :

शोधकर्त्ता का ज्ञान और अनुभव शोध प्रारूप को तैयार करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका का निर्वहन करता है। इसे हम ऐसे समझने का प्रयास करते हैं शोध कार्य प्रारम्भ करने के पूर्व एक इच्छुक छात्र अपने निर्देशक तथा अन्य अनुभवी लोगों के पास जाकर यही प्रश्न करता है कि किस विषय अथवा समस्या पर कार्य करूँ, मुझे तो कुछ दिखायी नहीं पड़ रहा हैं, आप ही कोई एक बता दीजिए, उसी पर कार्य प्रारम्भ कर दूँ। निर्देशक भी कभी–कभी यह कह देते हैं कि विषय ढूँढ लाओं, फिर विचार कर लेंगे। (यहाँ पर निर्देशक की अनुभवहीनता का परिचय देता है)। इस प्रकार की उलझन में शोधकर्ता का पर्याप्त समय नष्ट हो जाता है। वह (अल्पज्ञानी) जिधर भी दृष्टि डालता है उसे लगता है कि इस पर कार्य हो चुका है। तत्पश्चात् परेशान होकर वह कोई भी समस्या लेकर कार्य शुरू कर देता हैं और वह शोध योजना से लेकर अनेक कार्यो को पूर्ण करने में विफल हो जाता है। अतः शोध का ज्ञान और अनुभव अत्यन्त आवश्यक है।

3.5.4. शोधकर्ता का रूचि एवं प्रेरणा (Researcher's Interest & Motivation) :

शोधकर्त्ता की रूचि किस विषय में है, उसे शोध करने की प्रेरणा कहाँ से मिली हैं, ये तत्व शोध प्रारूप को तैयार करते समय प्रभावित करते है। इसलिए कहा जाता है कि शोधकर्ता उसी समस्या का चुनाव करें जिसमें उसकी विशेष रूचि हो तभी वह अच्छा कार्य कर सकता है।

3.5.5. शोध नैतिकता और सिद्धान्त (Research Ethics & Principles) :

इसमें दो बाते सम्मिलित किये जा सकते हैं। प्रथम आपकी शोध समस्या ही ऐसी होनी चाहिए जो समाज के नैतिक मूल्यों को हनन न करने वाली हो तथा दूसरा आपके द्वारा तैयार किये गये प्रारूप में मौलिकता होना आवश्यक है। जहॉ तक सिद्धान्तों की बात है तो शोध समस्या ऐसी होनी चाहिए जिससे नवीन सिद्धान्त का प्रतिपादन हो रहा हों।

3.5.6 विषय / प्रतिभागी (**Subject/Participants**) :

आपके शोध समस्या का विषय कैसा है, उनकी कितनी संख्या है? कितने प्रतिभागियों की सहभागिता की आवश्यकता है, ये सभी मुख्य बाते शोध प्रारूप को प्रभावित करते हैं उदाहरण के लिए और आपको किसी विज्ञापन की प्रभावशीलता का पता लगाना है, तो इस विषय के लिए किन क्षेत्रों, किन आयु वर्ग के लोगों और कितने की संख्या में सम्मिलित करना है को पहले से ही तय करना आवश्यक होता है और इसी के अनुसार आप अपने शोध के प्रारूप को तैयार करेंगें।

3.5.7. संसाधन (**Resources**) :

कोई भी शोध बिना संसाधन के पूर्ण नहीं हो सकते है। मुख्य रूप से धन, यंत्र, सुविधाएं तथा आपके सहयोगी का सहयोग आदि संसाधन की आवश्यकता पड़ती है। ये सभी घटक आपके द्वारा शोध प्रारूप को तैयार करते समय प्रभावित करते है।

3.5.8 समय (**Time**) :

समय एक बहुत बड़ा तत्त्व हैं तो शोध प्रारूप को प्रभावित करता है। शोध प्रारूप की रूपरेखा तैयार कर लेने के बाद शोधकर्ता को इस बात का अनुमान लगाना पड़ता है कि इस कार्य को करने के लिए कितना समय लगेगा। कार्य समय का सम्भाव्यता विवरण तीन समय अनुमानों पर आधारित होता है जो कि प्रत्येक के लिए बनाये जाते है। अनुकूलतम समय निराशाजनक समय तथा सर्वाधिक समय। एक शोधकर्ता को सामान्यतः उपयुक्त समय के आधार पर ही शोध योजना की रूपरेखा तैयार करनी चाहिए। परन्तु अन्य दो समय आधारों पर भी गणनाएँ तैयार रहनी चाहिए।

3.5.9. निष्कर्षो का होने वाला प्रयोग (**Uses of Study Findings**) :

अध्ययन के निष्कर्षो (प्राप्तियों) का प्रयोग कहा और कैसे किया जायेगा। कोई भी शोध प्रारूप तैयार करते समय इस बात का पूर्वानुमान आवश्यक होता है। यहाँ यह ध्यान देना है कि हमारे शोध से कितने लोग प्रभावित होते है। उन्हें ध्यान में रखकर ही शोध के प्रारूप को बनाना चाहिए।

3.6.10.बाहरी चरों के नियंत्रण की सम्भाव्यता (**Possible control on extraneous Varrable**) :

जब एक शोधकर्त्ता शोध करता है तो उसके समस्या पर बाहरी तत्वों का प्रभाव पड़ता है। शोध प्रारूप तैयार करते समय उन तत्वों को जान लेना आवश्यक होता है। उदाहरण के लिए आपके द्वारा किसी वस्तु के मॉग के गिरने जैसी समस्या का अध्ययन करना है। इसके बहुत से कारण बाहरी तत्वों जैसे सरकारी नीतियों का भी हो सकता है। अतः शोध प्रारूप तैयार करते समय इस प्रकार के चरों का भी ध्यान देना आवश्यक होता है।

3.5 बोध प्रश्न

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें:–

1. शोध प्रारूप वैज्ञानिक शोध प्रक्रिया का.............. सोपान है।

2. शोध प्रारूप.............. का सरलीकरण करता है।

3. शोध प्रारूप........... और .... दोनों को जोड़ता है।

4. वर्णात्मक अध्ययन के प्रारूप में होती हैं।

5. नियंत्रित दशाओं में रखकर निरीक्षण–परीक्षण द्वारा संबंधित घटनाओं का व्यवस्थित अध्ययन की रूपरेखा को......... शोध प्रारूप कहते है।

6. कोई भी शोध बिना........... के पूर्ण नहीं हो सकते है।

सत्य और असत्य कथन छाटिएँ :

1. शोध प्रारूप शोधकर्त्ता के लिए पथ–प्रदर्शक की भूमिका निभाता है।

2. शोध प्रारूप का निर्माण केवल समय की बचत करता है।

3. किसी विशिष्ट समस्या के निदान की खोज करने वाले शोध कार्य को परीक्षणात्मक शोध कहते हैं।

4. अन्वेषणात्मक शोध प्रारूप कारणों को नहीं ढूढ़ता है।

5. शोधकर्त्ता की रुचि शोध प्रारूप के निर्माण को प्रभावित करती है।

3.6 बोध प्रश्नों के उत्तर

रिक्त स्थानों के उत्तर :–

1. तीसरा, 2. सामाजिक घटनाओं, 3. अध्ययन पद्धतियों; अनुसंधान उद्देश्यों, 4. निर्दिप्तता, 5. परीक्षणात्मक, 6. संसाधन।

सत्य और असत्य के उत्तर :–

1. सत्य, 2. असत्य, 3. असत्य; 4. असत्य, 5. सत्य।

3.7 स्वपरख प्रश्न

1. शोध प्रारूप का अर्थ एवं परिभाषा को समझाइए।

2. शोध प्रारूप की विशेषताएं कौन–कौन सी है, तथा शोध प्रारूप का वर्गीकरण (प्रकार) को स्पष्ट कीजिए।

3. ''क्या शोध प्रारूप किन्हीं तत्वों से प्रभावित होते है।'' उल्लेख कीजिए।

/ / / /

इकाई – 4 समंक संग्रहण (**Data Collection**)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात –

- समंक क्या होते है को आप जान पायेंगे।
- प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक के अवधारणा के साथ–साथ इनके बीच अंतर को स्पष्ट कर पायेंगे।
- उन विधियों को जान पायेंगे जिनके द्वारा प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों को संग्रहित किया जाता है।
- प्रश्नावली एवं अनुसूचियों का निर्माण कैसे किया जाता है तथा एक अच्छे प्रश्नावली के कौन–कौन से गुण होते है को जान पायेंगें।
- अंत में द्वितीयक समंकों के दोष अथवा सीमाओं को समझ पायेगें।

4.1 प्रस्तावना

मनुष्य एक बुद्धिमान प्राणी होता है वह अपने असीमित आवश्यकताओं को सीमित साधनों से अधिकतम संतुष्टि के स्तर को प्राप्त करना चाहता है। एक उपभोक्ता वस्तुओं और सेवाओं को कब? क्यों? कैसे? कहाँ से? किस मूल्य पर? क्रय करता है। उसे कौन से वस्तु पसंद है और कौन सी नापसंद आदि विभिन्न प्रकार की समस्याओं में उलझा रहता है। इन समस्याओं को समझने व सुलझाने के ढंग अभी भी एक से नहीं रहे। जो परम्परागत अर्थशास्त्री थे वे इन घटनाओं के पीछे अदृश्य हाथ को मानते रहे। इसके बाद कुछ विद्वानों ने अपनी

कल्पनाओं के आधार पर इन घटनाओं व व्यवहारों के कारणों को खोजने का प्रयत्न किया। अतः स्पष्ट है कि इन दोंनों ही स्तरों पर वैज्ञानिक तरीके से समस्याओं, घटनाओं व उपभोक्ता व्यवहार को समझने व सुलझाने का प्रयत्न नहीं किया जाता था। अर्थात् उस समय समस्याओं का विश्लेषण व व्याख्या वास्तविक तथ्यों व आंकड़ों पर आधारित नहीं थे, इसलिए तथ्यों के संकलन का वाणिज्यिक समस्याओं के अध्ययन में कोई महत्व नहीं था। आजकल शोध समस्याओं का अध्ययन वैज्ञानिक रीतियों से किया जाता है, जिसके अन्तर्गत विपणन संबंधी तथ्य एकत्रित किये जाते हैं तथा उनका निरीक्षण, परीक्षण व वर्गीकरण करके संबंधित समस्या का हल ढूढने का प्रयत्न किया जाता है। इसी कारण तथ्यों के संकलन का महत्व बढ़ता जा रहा है। इस अध्याय में हम उन्हीं तथ्यों के संकलन व उपयोग के बारे में विवेचन करेंगे।

4.2 प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों की अवधारणा

प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों की अवधारणा को समझने से पूर्व समंक (Data) क्या है? को स्पष्ट करना आवश्यक प्रतीत हो रहा है।

समंक (Data) वास्तव में तथ्यों का संख्यात्मक रूप है जो समूह के विभिन्न सदस्यों के गुणों या विशेषताओं को सूचित करते है। वस्तुओं (Things) को या तो गणना किया जा सकता है अथवा उसका मापन (Measurement) किया जा सकता है। जब वस्तुओं की गणना की जाती है तो परिणाम आवृत्तियों (Frequencies) के रूप में प्राप्त होते हैं जिन्हें गणन समंक (Enumeration Data) अथवा गुणात्मक संमक (Qualitative Data) कहा जाता है। वहीं जब वस्तुओं को मापा जाता है तब परिणाम मापांकों के रूप में प्राप्त होते हैं जिन्हें मापन समंक (Metric Data) अथवा मात्रात्मक समंक (Quantitative Data) कहा जाता है। स्पष्ट है कि गणना समंक या गुणात्मक समंक किसी गुण विशेष या उसके विभिन्न प्रकारों को रखने वाले व्यक्तियों या वस्तुओं की संख्या के द्योतक होते है। जबकि मापन समंक या मात्रात्मक समंक विभिन्न व्यक्तियों या वस्तुओं के द्वारा रखे किसी गुण विशेष की मात्रा को इंगित करते हैं उदाहरण के लिए किसी कक्षा में 50 हिन्दू 20, मुसलमान, 10 इसाई तथा 20 अन्य धर्मो के मानने वाले छात्र अध्ययनरत है तो यह तथ्य (सूचना) गुणात्मक संमक कहलायेगी। किन्तु यदि कहा जाय कि समूह के सात सदस्यों का भार क्रमशः 40, 45, 48, 47, 52, 65 तथा 49 किग्रा है तो यह मात्रात्मक समंक होंगे। समंकों को आवृत्ति वितरण के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। गुणात्मक समंकों का आवृति वितरण गुण के विभिन्न प्रकारों को रखने वाले व्यक्तियों की संख्याओं को बताता है जबकि मात्रात्मक समंकों का आवृत्ति वितरण गुण की विभिन्न मात्रा को रखने वाले व्यक्तियों की संख्याओं को बताता है। समंकों के संबंध में यह बात भी ध्यान में रखने योग्य है कि समंक संख्यात्मक तथ्यों के समूहगत रूप है। केवल एक तथ्य समंक नहीं होता तथा समंक हमेशा संख्यात्मक रूप (आवृत्तियों अथवा मापांकों) में ही प्रस्तुत किये जाते है।

समंक की अवधारणा समझ लेने के पश्चात् शोध समंकों का संग्रहण को भी समझ लेना आवश्यक हो जाता है। समंकों का संकलन अनुसंधान का एक महत्वपूर्ण चरण है। एक शोधकर्ता द्वारा अनुसंधान की योजना (प्रारूप) बनाने के पश्चात् समंकों के संकलन का कार्य किया जाता है। ''समंकों के संग्रहण का तात्पर्य अनुसंधान के अन्तर्गत आने वाली अध्ययन के विषय से सम्बद्ध इकाईयों द्वारा उद्देश्यपूर्ण सूचनाओं का एकत्रीकरण है।''

तथ्यों की विश्वसनीयता, शोधक के निजी प्रयास तथा स्रोत की उपलब्धता के आधार पर समंकों को दो भागों में बाँटा जा सकता है–

1. प्राथमिक समंक (Primary Data)
2. द्वितीयक समंक (Secondary Data)

4.2.1 प्राथमिक समंक (Primary Data) : उन समंकों को प्राथमिक समंक कहा जाता है जिसे शोधकर्ता के द्वारा प्रथम बार आरम्भ से अन्त तक नये सिरे से एकत्रित किया जाता है। इस प्रकार के समंक अपने मौलिक रूप में होते हैं क्योंकि ये समंक किसी पत्र–पत्रिका या पुस्तक में प्रकाशित नहीं होते है। अतः अनंसंधानकर्ता के लिए ये समंक प्राथमिक समंक कहलायेंगे। उदाहरणार्थ भारत सरकार द्वारा प्रत्येक 10 वर्ष पर जनगणना करायी जाती है। यह जनगणना भारत सरकार (प्रथम शोधकर्ता) के लिए प्राथमिक समंक हुए। दूसरा उदाहरण प्रयागराज शहर में कोंचिंग संस्थानों की संख्या तथा दैनिक आय एवं उनके द्वारा आयकर देने वालों की संख्या आदि से सम्बन्धित ऑकड़े संग्रहित करने हैं तो ये अंक सर्वथा मौलिक होगें अर्थात् प्राथमिक समंक होंगे जो इसके पहले किसी पत्र–पत्रिका या पुस्तक में प्रकाशित नहीं हुए है।

4.2.2 द्वितीयक समंक (Secondary Data) : जब कोई शोधकर्त्ता उन समंकों का उपयोग करता है जो पहले से ही अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा एकत्र व प्रकाशित किये जा चुके हों तो इस प्रकार के समंक द्वितीयक समंक कहलाते है। उदाहरणार्थ भारत सरकार द्वारा किया गया जनगणना अन्य प्रत्येक शोधार्थी के लिए द्वितीयक समंक होगा।

4.3 प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों के मध्य अन्तर

प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों के अर्थ जानने के बाद यह स्पष्ट होता है कि इन दोनों समंकों में अन्तर केवल अवस्था (degree) का या सापेक्षता (Relativity) का है, प्रकृति का नहीं है। एक ही तरह के समंक यदि एक व्यक्ति के लिए प्राथमिक है, तो वही दूसरे के लिए द्वितीयक है। उदाहरण स्वरूप भारत की जनगणना। फिर भी प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में निम्न अन्तर है।

क्रम सं0	प्राथमिक समंक	द्वितीयक समंक
1	प्राथमिक समंक स्वयं शोधकर्त्ता द्वारा अथवा उनके प्रतिनिधि गणकों द्वारा एकत्रित किये जाते है	द्वितीयक समंक किसी अन्य व्यक्ति या संस्था द्वारा पहले से ही एकत्रित होते हैं जिनका प्रकाशन हो चुका है।
2	प्राथमिक समंक शोधकर्त्ता के उद्देश्य के अनुरूप होते है।	द्वितीयक समंक शोधकर्ता के लिए सहायक मात्र होते है। चूँकि ये समंक किसी दूसरे द्वारा एकत्रित होते है, अतः शोधकर्ता को अपने उद्देश्य के अनुसार इसमें संशोधन करने की आवश्यकता होती है।
3	प्राथमिक समंक मौलिक होते हैं, क्योंकि ये समंक नये सिरे से एवं नये ढंग से एकत्रित किये जाते है।	द्वितीयक समंक निर्मित माल के तरह होता है, कारण कि इन ऑकड़ों का प्रयोग किसी अन्य व्यक्ति या संस्था द्वारा अपने उद्देश्य के लिए पहले से ही किया जा चुका होता है।
4	प्राथमिक समंकों के संग्रहण में समय साधन एवं शक्ति की आवश्यकता होती है।	द्वितीयक समंक चूँकि प्रकाशित आँकड़े होते है अतः इसके लिए अधिक समय साधन एवं शक्ति की आवश्यकता नहीं होती है।

5	प्राथमिक समंकों के आधार पर निकाले गये निष्कर्ष वास्तविक एवं विश्वसनीय होते है।	द्वितीयक समंकों के आधार पर निकाले गये निष्कर्ष भ्रमात्मक भी हो सकते है।

वास्तव में विश्लेषण किया जाये तो प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक में अन्तर, सापेक्षिता' का है। वे आँकड़े जो एक व्यक्ति स्वयं एकत्रित करता है अथवा एकत्रित कराता है, प्राथमिक समंक होते है। वहीं आँकड़े दूसरों के लिए द्वितीयक समंक बन जाते है।

4.4 प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों के संग्रहण करने की विधियाँ

4.4.0 प्राथमिक संमकों के संग्रहण :

प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों के अवधारणा एवं अन्तर को समझने के पश्चात् अब इनके संग्रहण की रीतियों को समझना आवश्यक है। प्रायः शोधकर्त्ताओं द्वारा प्राथमिक समंकों के संग्रहण के लिए निम्नलिखित रीतियॉ काम में लायी जाती है–

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (Direct Personal Investigation)
2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान (Indirect Oral Investigation)
3. स्थानीय स्रोतो या संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति (Information through Local Sources or Correspondent)
4. अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोत (Indirect Primary Resources)
5. गणकों के माध्यम से सूचना संग्रह (Information through Enumerators)

4.4.1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (**Direct Personal Investigation**) :

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान रीति में जिन व्यक्तियों से सूचना प्राप्त करनी होती है, शोधकर्ता स्वयं उनसे प्रत्यक्ष सम्पर्क स्थापित करता है। दूसरे शब्दों में शोधकर्ता लक्षित व्यक्ति अथवा सूचनादाता (Respondent) के सम्मुख स्वयं उपस्थित होकर प्रत्यक्ष संवाद के द्वारा सूचना प्राप्त करता है। इस रीति के अन्तर्गत शोधकर्ता का स्वयं का निरीक्षण, परिश्रम, सम्पर्क अथवा अनुभव का प्रमुख स्थान है। इस रीति का प्रयोग सर्वप्रथम श्री ली प्ले (Leplay) ने श्रमिकों के पारिवारिक आय–व्यय से सम्बन्धित ऑकड़े एकत्र करने के लिए किया था। वहीं पर भारत में श्री **आर्थर यंग** ने कृषि उत्पाद के अध्ययन में इस रीति का ही प्रयोग किया था। यह प्रणाली वहाँ उपयुक्त होती है जहाँ–

(अ). क्षेत्र सीमित हो, (ब). शुद्धता पर अधिक जोर देना है, (स). आँकड़े गुप्त रखने हो, तथा (द). आँकड़ों की मौलिकता पर जोर देना है।

गुण (Merits) : प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान के निम्न गुण है –

1. इस रीति से निकाले गये परिणाम शुद्ध, मौलिक और विश्वसनीय होते है।
2. विस्तृत सूचनाओं की जानकारी हो जाती है, जिन्हें भविष्य में अन्य किसी शोध/अनुसंधान में आवश्यकतानुसार प्रयुक्त किये जाने की सम्भावना रहती है।
3. लोचदार का गुण होने के कारण इस रीति में शोधकर्ता प्रश्नों में संशोधन करके अभिष्ट सूचनाएँ प्राप्त कर लेता है।

4. आँकड़ों (सूचनाओं) में सजातीयता का गुण पाया जाता है, कारण एक ही व्यक्ति द्वारा आँकड़े एकत्रित किये जाते है।
5. बचत की दृष्टि से भी यह रीति उत्तम है, क्योंकि शोधकर्त्ता स्वयं उपस्थित रहता है, इसलिए वह व्यर्थ के व्ययों को नहीं होने देता।

दोष (**Demerits**) : इस प्रणाली के निम्नलिखित दोष भी है–

1. विस्तृत क्षेत्र के अध्ययन के लिए यह विधि सर्वथा अनुपयुक्त है।
2. इसमें धन, समय व श्रम का अत्यधिक उपयोग होता है।
3. यदि शोधकर्ता पूर्वाग्रही (Biased) है, पक्षपाती है (Prejudicues) है तथा सनकी (Whionse) है तो प्राप्त परिणाम को दूषित होने की पूरी संभावना रहती है।

रीति के प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ– उपर्युक्त दोषो के होने के बावजूद भी यह उद्वति उपयुक्त है, लेकिन इस पद्वति का उपयोग करते समय यदि आप निम्न सावधानियों को ध्यान में रखते है।

प्रथम : शोधकर्त्ता को व्यवहार कुशल, मृदुभाषी व धैर्यशील होना चाहिए, जिससे सूचना देने वालों का सहयोग और विश्वास प्राप्त किया जा सके।

द्वितीय : शोधकर्त्ता को चाहिए कि उस समग्र या क्षेत्र की विशेषताओं, रीति–रिवाजों तथा भाषा इत्यादि से पूर्ण परिचित हो।

तृतीय : पूछे जाने वाले प्रश्न संक्षिप्त तथा सारगर्भित हो।

चतुर्थ : शोधकर्त्ता को बिना पक्षपात व पूर्वाग्रह के जाँच कार्य करना चाहिए।

पंचम : शोधकर्त्ता को इस बात की भी पुरी जानकारी प्राप्त कर लेनी चाहिए कि प्रश्न सही व्यक्ति और सही समय पर पूछे गये है या नहीं।

4.4.2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान (**Indirect Oral Investigation**) :

यदि शोध का क्षेत्र बड़ा हो अथवा ऐसा हो जिससे सम्बन्धित व्यक्ति अलग–अलग क्षेत्रों में फैले हो प्रत्येक से मिलना कठिन हो तथा इन व्यक्तियों से आँकड़े एकत्रित करना कठिन हो तो ऐसी स्थिति में समस्या से प्रत्यक्ष सम्बन्ध रखने वाले व्यक्तियों से सूचना उपलब्ध नहीं की जा सकती बल्कि साक्षियों (Witnesses) से मौखिक पूछताछ द्वारा संमंक प्राप्त किये जाते हैं, जो कि साक्षी उस स्थिति से प्रत्यक्ष रूप से संबंधित होते है। उदाहरणार्थ कोलकता के चटकल कंपनियों के मजदूरों से संबंधित सूचनाएं मजदूरों से न प्राप्त करने उनके नेताओं अथवा कम्पनी के प्रबन्धक से प्राप्त की जाये। इस प्रकार की विधि को ही अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान कहते है।

यह प्रणाली वहाँ उपयुक्त होती है जब अनुसंधान का क्षेत्र बड़ा हो, व्यक्तियों से सम्पर्क स्थापित करना कठिन हो या सूचना देने वाले शोधकर्ता को सूचना देने में आनाकानी करते हों या रूचि नहीं लेते हों।

गुण (**Merits**) इस प्रणाली के निम्नलिखित गुण है –

इस रीति में समय, धन व परिश्रम कम लगता है।

1. इस रीति में शोध के विषय में विशेषज्ञों की राय तथा उनके सुझाव प्राप्त हो जाते है।
2. इस प्रणाली के अन्तर्गत शोधकर्ता के व्यक्तिगत पक्षपात की सम्भावना कम होती है।
3. शोधकर्ता को अधिक परेशानी नहीं उठानी पड़ती है।

दोष (**Demerits**) इस रीति में निम्नलिखित दोष है –

शोधकर्त्ता प्रत्यक्ष रूप से सूचना देने वालों के सम्पर्क में नहीं आता। अतः परिणाम अशुद्ध होने की संभावना रहती है।

इस रीति के अन्तर्गत जिन व्यक्तियों से सूचना ली जाती है, उनकी लापरवाही व अज्ञानता के कारण समंक दूषित हो जाते है।

प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ : जब आप समंक प्राप्त करने के लिए अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान का प्रयोग कर रहे होते हैं तो उपरोक्त दोषो को दूर करने के लिए निम्नलिखित सावधानियॉ बरतनी चाहिए।

1. सूचना ऐसे व्यक्तियों से प्रापत करनी चाहिए जिन्हें संबंधित तथ्यों का पूर्ण ज्ञान हो और सूचना देने में रूचि रखते हों।
2. साक्षी की बात पर बिना पुष्टि किये पूर्ण विश्वास नही कर लेना चाहिए।
3. पक्ष व विपक्ष दोनों प्रकार के व्यक्तियो से सूचनाएं एकत्र करनी चाहिए।
4. शोधकर्त्ता को सूचना देने वाले की सद्भावना व विश्वास प्राप्त करना चाहिए।
5. सूचकों (सूचना देने वाले) की संख्या पर्याप्त होनी चाहिए।

4.4.3. स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति (Information through Local Sources) :

जिस प्रकार से समाचार पत्र प्रकाशित करने वाली कंपनियाँ समंक एकत्रित करती है ठीक उसी प्रकार से एक शोधकर्ता द्वारा विभिन्न स्थानों पर स्थानीय व्यक्ति या संवाददाता नियुक्त कर दिये जाते हैं जो समय–समय पर अपने अनुभवों के आधार पर अनुमानतः सूचनाएं भेजते रहते है। चूँकि इसमें सूचक सूचनाओं का संकलन अपने ही तौर–तरीकों, रूचि, निर्णय आदि के आधार पर करते है। अतः ऐसे समंकों में अशुद्धियों की संभावना अधिक होती है। वस्तुओं के मूल्य एवं अंशों की कीमतें, मण्डियों के बाजार भाव सम्बन्धी सूचनाएँ, सरकार इस विधि से प्राप्त करती है।

यह प्रणाली वहाँ उपयुक्त होती है जिनमें उच्च स्तरीय शुद्धता की आवश्यकता न हो।

गुण (Merits) : इस प्रणाली के निम्नलिखित गुण है–

1. यह रीति मितव्ययी है एवं इसका विस्तृत क्षेत्र में प्रयोग होता है।
2. सूदूर क्षेत्रों से लगातार सूचनाऍ प्राप्त की जा सकती है।
3. समय व परिश्रम कम लगता है और सूचना शीघ्रता से प्राप्त हो जाती है।

दोष (Demerits) : गुण के साथ–साथ इस प्रणाली के निम्नलिखित दोष भी है–

1. समंकों में पक्षपता की सभावना अधिक रहती है, क्योंकि संवाददाताओं द्वारा भेजे जाने वाले आँकड़े अनुमानित होते है।
2. सूचना प्राप्त होने में समय लगता है, क्योंकि सूचनाएं दूर–दूर से प्राप्त होती है।
3. एकरूपता का अभाव पाया जाता है, क्योंकि ऑकड़े भिन्न–भिन्न संवादाताओं द्वारा एकत्र किये जाते है।
4. सामग्री संकलन से परिणामों में उच्चस्तरीय शुद्धता की आशा नहीं की जा सकती है।

प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ – प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ निम्नलिखित है–

1. संवादाताओं की नियुक्ति बहुत सोच–समझकर तथा पूर्ण सतर्कता के साथ की जानी चाहिए।

2. सूचनकों (संवादाताओं) में इतनी योग्यता होनी चाहिए कि वे समस्या को भली–भॉति समझ सके तथा उसके अनुसार सूचनाएँ प्राप्त कर भेज सके।
3. जहॉ तक हो संवाददाताओं की संख्या अधिक होनी चाहिए जिससे सूचनाओं को मिलाकर अशुद्धियों की जॉच की जा सके।
4. संवाददाताओं को अपनी व्यक्तिगत राय का कम से कम प्रयोग करना चाहिए।

4.4.4 अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोत (Indirect Primary Resources) :

यह विधि अप्रत्यक्ष इसलिए कही जाती है कि इसमें शोधक सूचनादाता (Respondent) के पास नहीं जाता। स्वयं जाने के स्थान पर वह अपनी समस्या से संबंधित जिज्ञासाओं अथवा प्रश्नों को सूचनादाता के पास भेज देता है। सूचनादाता उन प्रश्नों या विज्ञासाओं का उत्तर लिखकर भेज देता है, इसका लोकप्रिय एवं सुपरिचित रूप प्रश्नावली (Questionnair) है। जिसका वर्णन आगे किया गया है।

प्रश्नावली के अतिरिक्त अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोतों में अन्य साधनों से भी सूचनाएं प्राप्त की जाती है। **मिल्ड्रेड मार्टन** ने निम्नलिखित साधन बताएं है–

1. दूरभाष साक्षात्कार (Telephone Interviews)
2. रेडियों अपील (Radio Appeal)
3. पेनल प्रविधि (Panel Techniques)

प्राथमिक स्रोतों में ऐसी कई विशेषताएँ होती है जो द्वितीयक स्रोतों में नही पाई जाती। इनके द्वारा अनुसंधानकर्ता को स्वाभाविक एवं वास्तविक सूचनाएँ मिलती है। शोधक का सीधे सूचनादाताओं से सम्पर्क हो जाता है तथा वे अपना दृष्टिकोण एक दूसरे को अच्छी तरह बता सकते है। स्वयं उत्तरदाताओं की रूचि अनुसंधान कार्य में बढ़ जाती है। उनके द्वारा अपने गोपनीय बातों का भी पता लग जाता है। यही अनुसूची है जिनका विस्तृत व्याख्या आगे किया गया है।

अतः अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोत के साधन के रूप में प्रश्नावली एवं अनुसूची दो महत्वपूर्ण साधन है।

4.4.5. प्रगणकों के माध्यम से सूचना संग्रह (Information through Enumerators) :

इस प्रणाली के अन्तर्गत भी शोधकर्त्ता जाँच से सम्बन्धित प्रश्नों की प्रश्नावली/अनुसूची के रूप में छपवाकर अनेक प्रतियॉ बनवाता है। तत्पश्चात् शोधकर्ता शोध क्षेत्र को कई भागों में विभक्त कर प्रत्येक भाग के लिए प्रगणकों की नियुक्ति कर देता है जो घर–घर जाकर सूचकों से पूछताछ करके स्वयं अनुसूचियों की भरते है। इस प्रणाली में प्रगणकों की भूमिका महत्वपूर्ण होती है।

यह प्रणाली विस्तृत क्षेत्र के लिए उपयुक्त है। प्रायः सरकारों द्वारा इस प्रणाली को अपनाया जाता है। भारतीय जनगणना संबंधी ऑकड़े एकत्रित करने में इसी रीति को अपनाया जाता है।

गुण (Merits) : इस प्रणाली के गुण निम्नलिखित है–

1. इस रीति द्वारा अत्यन्त विशाल क्षेत्र से सूचना प्राप्त की जा सकती है।
2. चूँकि इस रीति में योग्य, प्रशिक्षित तथा अनुभवी गणकों द्वारा ही अनुसंधान किया जाता है, इसलिए इस रीति में शुद्धता की मात्रा काफी हद तक होती है।
3. इसमें समय की बचत होती है।

4. सूचना देने वालों से गणकों का व्यक्तिगत सम्पर्क रहता है, जिससे शुद्ध व विश्वसनीय उत्तर प्राप्त होते है।

दोष (**Demerits**) : इस रीति के दोष निम्नलिखित है–

1. प्रगणकों के नियुक्ति एवं प्रशिक्षण पर खर्च अधिक होता है।
2. यदि नियुक्त किये गये प्रगणकों में थोड़ी सी भी पक्षपात की गुजाइश हुयी तो उनसे प्राप्त सूचनाएं गलत तथा उनके आधार पर प्राप्त परिणाम भ्रामक होगा।

4.4.6 **द्वितीयक समंक के स्रोत (Secondary Sources)** : प्राथमिक स्रोत के ठीक विपरीत द्वितीयक स्रोत होते है। द्वितीयक समंक के स्रोतों को मुख्यतः तीन भागों में विभाजित कर समझा जा सकता है।

1. व्यक्तिगत प्रलेख (Personal Documents)
2. सार्वजनिक प्रलेख (Public Documents)
3. अप्रकाशित प्रलेख (Unpublished Documents)

1. व्यक्तिगत प्रलेख (Personal Documents) :

व्यक्तिगत वह लिखित सामग्री होती है जिसमें व्यक्तिगत संबंधों एवं सामाजिक गतिविधियों के बारे में एक विशेष एकांगी दृष्टिकोण से विचार व्यक्त किये जाते है। लेखक का कोई विशिष्ट शोधात्मक दृष्टिकोण नहीं होता। इसके अन्तर्गत सामान्यतः लेखक अपनी एवं सामाजिक आवश्यकताओं को देखते हुए अपने विचार के आधार पर व्यक्तियों व सामाजिक घटनाओं पर अपने दृष्टिकोण की अभिव्यक्ति करता है। इनके द्वारा व्यक्तिगत सम्बन्धों तथा सामाजिक कार्यकलापों का लेखक के समय के बारे में ज्ञान होता है जो अपनी–अपनी वस्तु पर विस्तृत ज्ञान संचय में सहायक हो सकता है।

जॉन मैज ने दि टूल्स आफ सोशियल साइन्स में लिखा है, ''अपने छोटे अर्थ में व्यक्तिगत प्रलेख किसी व्यक्ति के द्वारा स्वयं के निजी कार्यो, अनुभवों विश्वासों का एक स्वतः लिखित प्रथम पुरूष वर्णन है।''

व्यक्तिगत प्रलेखों के मुख्य स्रोत निम्नांकित है –

अ. जीवन इतिहास (Life Histories)

ब. डायरियॉ (Diaries)

स. पत्र (Letters)

द. संस्मरण (Memories)

2. **सार्वजनिक प्रलेख (Public Documents)** : सार्वजनिक प्रलेखों के मुख्य स्रोत निम्नलिखित है–

अ. **सरकारी प्रकाशन** : सभी देशों की सरकारें समय–समय पर विभिन्न तथ्यों का प्रकाशन करती है। ये तथ्य/सूचनाएं विश्वसनीय एवं महत्वपूर्ण होते है। देश की जनसंख्या कितनी है, कृषि उत्पादन कितना हुआ? राष्ट्रीय आय कितनी है, उत्पादन कितना हुआ आदि विषयों की सूचना सरकारी प्रकाशनों के माध्यम से मिलती है।

ब. **अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओं के प्रकाशन** : वैश्विक स्तर पर अनेक संस्थाएं है, जैसे–संयुक्त राष्ट्र संघ (UNO) और इनकी अनेक सहायक संस्थाएं, अन्तर्राष्ट्रीय मुद्रा कोष (IMF), विश्व बैक (IBRD) आदि। ये सभी

संस्थाएं समय–समय पर अनेक प्रकार की सूचनाएँ प्रकाशित करती रहती है। ये प्रकाशन विभिन्न देशों की तुलना करने के लिए काफी उपयोगी सिद्ध होते है।

स. **अर्द्ध सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन** : अर्द्ध सरकारी संस्थान वे संस्थान है जो सरकारी नहीं है जैसे– नगर पालिकाएं, नगर निगम, जिला बोर्ड आदि। ये सभी विभिन्न प्रकार के ऑकड़े समय–समय पर प्रकाशित करते रहते है। उदाहरण के लिए जन्म–मरण, स्वास्थ्य, शिक्षा आदि से संबंधित ऑकड़े। इनके अतिरिक्त उनके द्वारा नियुक्त स्वास्थ्य, जल व्यवस्था, अथवा स्वच्छता संबंधी स्थितियों का अध्ययन करने सम्बन्धी समितियों की रिपोर्टो से महत्वपूर्ण तथ्य उपलब्ध हो सकते है।

द. **समितियों तथा आयोगों की रिपोर्ट** – केन्द्रीय सरकार या राज्य सरकार अथवा केन्द्रीय बैंक किसी विशेष कार्य संबंधी विशेष समितियॉ अथवा, आयोगों का गठन समय–समय पर हुयी है, या होती रहती है। इन रिपोर्टो से भी उपयोगी समंक प्राप्त होते है। जैसे वित्त आयोग की रिपोर्ट, बैंकिंग कमीशन की रिपोर्ट आदि।

य. **शोध संस्थाएं** : विश्वविद्यालय, रिसर्च ब्यूरों और शोध संस्थाओं द्वारा भी समय–समय पर अनेक प्रकार के ऑकड़े प्रकाशित किये जाते है।

र. **व्यापारिक संस्थाएँ** : व्यापारिक परिषदों, संस्थाओं, शेयर बाजारें, सोना–चॉदी बाजारों के केन्द्रीय कार्यालय से मूल्य तथा मांग के अंक प्रकाशित होते रहते हैं, जिनका प्रयोग आर्थिक स्थिति संबंधी जानकारी प्राप्त करने के लिए किया जा सकता है।

ल. **पत्र–पत्रिकाएं** : विभिन्न पत्र–पत्रिकाओं में विभिन्न विषयों पर सूचनाएं प्रकाशित होती रहती है, जो अच्छी पत्र–पत्रिकाएं होती है वे समंकों की विश्वसनीयता की जॉच के पश्चात् ही प्रकाशित करती है। जैसे– The Economic Times, Commerce, Indian Journal of Accounting, उद्योग–व्यापार पत्रिका आदि में प्रकाशित समंक विश्वसनीय होते हैं जिनका उपयोग द्वितीयक समंक के रूप में शोधकर्ता निःसंकोच करते है।

ब. **शोधकर्त्ताओं के प्रकाशन** : विभिन्न विश्वविद्यालयों के अन्तर्गत विभिन्न विषयों पर शोध करने वाले शोधार्थी भी अपने शोधों को प्रकाशित कर तथ्यों एवं ऑकड़ों की जानकारी देते है।

3. **अप्रकाशित लेख (Unpublished Document)** : द्वितीयक स्रोतों से प्राप्त सभी सामग्री प्रकाशित अवस्था में नहीं पाई जाती है। गोपनीयता अत्यधिक व्यय आदि कारणों से उसे कई बार प्रकाशित कराया नहीं जाता, ऐसी समस्त सामग्री को, ''अप्रकाशित प्रलेखों'' के अन्तर्गत रखा जाता है। ये भी निम्नलिखित रूप के होते है–

अ. **गोपनीय अभिलेख (Confidential Records)** : सदनों, न्यायालयों, मंत्रिमण्डलो सैनिक कार्यालयों तथा गृह–विभागों आदि के अभिलेख अत्यन्त गोपनीय ढंग से रखे जाते है। इनको जानना तथा प्रकाशित करना अपराध माना जाता है। किन्तु यह भी स्पष्ट है कि उनको प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष ढ़ंग से जाने बिना उच्च स्तरीय अनुसंधान कई बार संपन्न नहीं किये जा सकते।

ब. **दुर्लभ हस्तलेख (Rare Manuscripts)** : अनेक हस्तलेख प्रशासकों, विचारकों आदि की असामायिक मृत्यु हो जाने या साधनों के अभाव के कारण प्रकाशित नहीं हो पाते या तो इधर–उधर होते है या अतीत में पड़े रहते है। संग्रहालयों में पड़े रहते है। ऐसे दुर्लभ प्रलेखों का बड़ा उपयोग हो सकता है, यदि उन्हें शोधार्थी या शोध संस्थानों को उपलब्ध करा दिया जाय।

स. शोध रिपोर्ट (**Research Report**) : देश–विदेश के विभिन्न विश्वविद्यालयों एवं शोध संस्थाओं द्वारा शोध कार्य कराया जाता है तथा शोधकर्त्ताओं को एम0फिल0, पी–एच0डी0 एवं डी0लिट0 की उपाधियॉं प्रदान की जाती है। इनमें से कुछ ही प्रकाशित हो पाती है और अधिकोश अप्रकाशित रह जाते है।

उपर्युक्त सभी स्रोतों से प्राप्त समंकों का उपयोग आगे किसी भी अनुसंधान में किया जा सकता है, लेकिन ऐसे समंकों का प्रयोग करने से पूर्व यह भली प्रकार निश्चय कर लेना चाहिए कि जिस व्यक्ति अथवा संस्था द्वारा समंकों को एकत्रित किया गया है। वह कहाँ तक विश्वसनीय है, कहॉ से एकत्रित किये गये हैं तथा एकत्रित करने का क्या उद्देश्य था? इन बातों पर विचार करने के बाद ही द्वितीयक समंकों के रूप में उनका उपयोग करना चाहिए।

4.5 एक अच्छे प्रश्नावली की विशेषताएँ

प्राथमिक समंकों के संग्रहण की चौथी रीति का नाम अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोत है। जिसमें शोधक (Researcher) सूचनादाता (Respondent) के पास नहीं जाता है। स्वयं जाने के स्थान पर वह अपनी समस्या से संबंधित विज्ञासाओं अथवा प्रश्नों को सूचनादाता के पास भेंज देता है। सूचनादाता उन प्रश्नों या विज्ञासाओं का उत्तर लिखकर भेंज देता है। आज डिजिटल और सोसल विडिया के सभव प्रश्नावली का महत्व बहुत अधिक हो गया है।

यही रूप प्रश्नावली (Questionaire) है, एक अच्छी प्रश्नावली में निम्न विशेषताएं होनी चाहिए –

अ. प्रश्न सीधे, सरल व स्पष्ट होने चाहिए।

ब. प्रश्न ऐसे हो जिन्हें उत्तरदाता सरलता से समझकर बिना किसी अन्य व्यक्ति की सहायता से उत्तर दे सकें।

स. प्रश्नावाली का आकार बहुत बड़ा या छोटा न हो।

द. प्रश्नों की व्यवस्था इस प्रकार से की जाये जिससे कि बाद में सूचनाओं के विश्लेषण व व्याख्या में सुगमता हो।

य. प्रश्नावली की भाषा ऐसी होनी चाहिए जिसे कि उत्तरदाता पढ़ने व समझने में समर्थ हो।

ब. प्रश्नों में कोई ऐसी बात नहीं होनी चाहिए जिससे उत्तरदाता की भावनाओं को ठेस पहुॅचे।

र. प्रश्नावली में सुझाव वाले या प्रमुख प्रश्न तथा भ्रामक प्रश्न नहीं दिये जाने चाहिए।

ल. प्रश्न उत्तरदाता का सही मनोभाव प्रकट करने वाला हो।

4.6 प्रश्नावली एवं अनुसूचियों का निर्माण

4.6.1. प्रश्नावली का निर्माण :

किसी समस्या से संबंधित प्राथमिक तथ्यों (समंकों) को एकत्र करने के लिए बनाई गई प्रश्नों की एक सूची को प्रश्नावली कहते है। इसको निदर्शन के रूप में चुने हुए उत्तरदाताओं के पास इस अनुरोध से भेजा जाता है कि वह इनको भर कर वापस कर दें।

प्रश्नावली को दो आधारों पर वर्गीकृत किया जा सकता है जो निम्नलिखित है –

1. रचना की प्रकृति के के आधार पर
   - क. संरचित प्रश्नावली (**Structured Questionaire**)
   - ख. असंरचित प्रश्नावली (**Unstructured Questionaire**)
2. प्रश्नों के प्रकृति के आधार पर
   - क. सीमित अथवा प्रतिबंधित प्रश्नावली (closed Questionaire)
   - ख. असीमित अथवा अप्रतिबंधित प्रश्नावली (Open Questionaire)
   - ग. चित्रमय प्रश्नावली (Pectorial Questionaire)
   - घ. मिश्रित प्रश्नावली (Mixed Questionaire)

1.(क). संरचित प्रश्नावली (Structured Questionaire):

संरचित प्रश्नावली में प्रश्नों की रचना पहले से ही कर ली जाती है और बाद में उनमें कोई भी परिवर्तन नहीं किया जाता। शोध कार्यो के उद्देश्यों के अनुसार पहले से ही सारे प्रश्न बना लिये जाते हैं तथा प्रश्नावली के रूप में छपवा लिये जाते है। एक बार प्रश्नावली बन जाने के बाद प्रश्नों में कोई संशोधन अथवा सुधार नहीं किया जाता। ऐसी प्रश्नावली बहुत सोच–समझकर बनाई जाती है और प्रश्नों को नियोजित एवं क्रमबद्ध तरीके से रखा जाता है, जिससे कि उत्तरदाताओं को उत्तर देने में कठिनाई भी न हो तथा पूर्व निर्धारित योजना के अनुसार सत्य तथ्य व सूचनाएं एकत्रित की जा सके। ऐसी प्रश्नावली सभी उत्तरदाताओं के लिए समान होती है।

(ख). असंरचित प्रश्नावली (Unstructured Questionaire) :

असंरचित प्रश्नावली में प्रश्नों का निर्माण पहले से नहीं किया जाता बल्कि उन विषयों का उल्लेख किया जाता है जिसके बारे में उत्तरदाताओं से सूचनाएं प्राप्त की जाती है। एक तरह से यह प्रश्नावली न होकर साक्षात्कार मार्गदर्शिका का काम करती है।

2.क. सीमित तथा प्रतिबंधित प्रश्नावली (Closed Questionaire) :

नाम से स्पष्ट है कि यह प्रश्नावली सीमित है, इसमें प्रत्येक प्रश्न के साथ–साथ उसके सम्भावित उत्तर भी दिये रहते है और उत्तरदाता को उन्हीं उत्तरों में से कोई उत्तर जो उसको सबसे अधिक उपयुक्त लगे छॉटना होता है। ऐसा करने से प्रश्नों के उत्तर पर एक प्रकार से प्रतिबंध लगा दिया जाता है तथा उत्तरदाता अपना

स्वतंत्र मत नहीं दे पाता, बल्कि दिये गये उत्तरदों में से ही एक को चुनता है। ऐसे प्रश्नों के उदाहरण निम्नलिखित है–

क. आप हमारी कम्पनी का वस्तु (उत्पाद) क्यों पसंद करते है।

अ. कम कीमत .....

ब. अच्छा कीमत ....

स. टिकाऊ...

द. देखने में अच्छा ....

य. अन्य .....

ख. किस प्रकार के विज्ञापन आपको अधिक आकर्षित करते है।

अ. श्याम, श्वेत .....

ब. रंगीन .....

स. प्राकृतिक दृश्य .....

द. महिला एवं शिशु का चित्र .....

य. अन्य .....

आज कल बड़े पैमाने पर किये गये शोध कार्यो में इस प्रकार की प्रश्नावली का प्रयोग बहुत किया जाता है, क्योंकि ऐसी प्रश्नावली से प्राप्त सूचनाओं का वर्गीकरण व सारणीयन सरल हो जाता है। ऐसी प्रश्नावली को संकेतबद्ध (Coding) पहले से कर लिया जाता है तथा संयंत्रों का संगणक की सहायता से तथ्यों का विश्लेषण कर लिया जाता है।

2 ख. असीमित अथवा अप्रतिबंन्धित प्रश्नावली (**Open Questionaire**) :

इस प्रकार की प्रश्नावली में प्रश्नों के संभावित उत्तर नहीं दिये जाते। उत्तरदाता को यह स्वतंत्रता रहती है कि जो चाहे वह उत्तर दे। उदाहरणार्थ –

क. आप हमारी कम्पनी का उत्पाद (वस्तु) क्यों पसंद करते है?

अ. ......

ब. ......

स. .....

द. ......

य. .....

ख. किस प्रकार के विज्ञापन आपकों अधिक आकर्षित करते है?

अ. ......

ब. ......

स. ......

द. ......

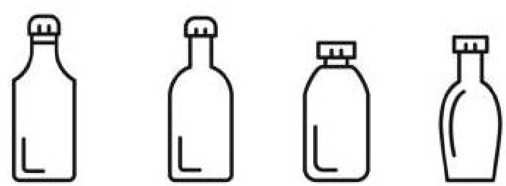
य. .....

ऐसी प्रश्नावली का गुण यह है कि उत्तरदाता अपनी वास्तविक भावनाओं को स्वतंत्र रूप से प्रकट कर सकता है। गुणात्मक (Qualitative) व प्रेरणात्मक (Motivation) सूचनाओं को प्राप्त करने के लिए ऐसी प्रश्नावली अधिक उपयुक्त होती है। इसका एक दोष यह है कि प्राप्त तथ्यों का वर्गीकरण व विश्लेषण करना बहुत कठिन होता है।

ग. चित्रमय प्रश्नावली (Pictorial Questionaire) :

इस प्रकार की प्रश्नावली में प्रश्नों के उत्तर चित्रों द्वारा प्रदर्शित किये जाते है। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर में जो चित्र किसी उत्तरदाता के मत का अनुरूप होता है, उत्तरदाता उस चित्र पर चिन्ह लगा देता है। इसमें उत्तर देना सहज एवं सरल होता है, समय कम लगता है तथा बच्चों एवं अशिशित लोगों से भी सूचनाएं प्राप्त की जा सकती है। फैशन, पैकिंग तथा वस्तुओं के ऊपरी लिखावट सम्बन्धी वातों की जानकारी प्राप्त करने के लिए चित्रमय प्रश्नावली का प्रयोग किया जा सकता है।

उदाहरण – आप ईत्र को किस प्रकार की पैकिंग में पसन्द करेंगे?



अ. ब. स. द.

घ. मिश्रित प्रश्नावली (Mixed Questionaire) :

यह प्रश्नावली उपर्युक्त सभी प्रकार की प्रश्नावलियों का मिश्रण होती है। साधारणतः प्रतिबन्धित तथा अप्रतिबंधित दोनों प्रकार के प्रश्नों को मिलाकर जो प्रश्नावली बनाई जाती है उसको मिश्रित प्रश्नावली कहते है। अतः दोनों प्रकार की प्रश्नावलियों का लाभ प्राप्त हो जाता है।

ऐसी प्रश्नावली का प्रयोग निम्न प्रकार की सूचनाएँ प्राप्त करने के लिए किया जाता है–

अ. भूत, वर्तमान एवं भविष्य का व्यवहार,

ब. जनविवरणी (Demographic) विशेषताएं, आयु, आय एवं कार्य (Occupation)

स. ज्ञान का स्तर

द. प्रबृत्ति एवं अभिमत

ये चारों प्रकार की सूचनाएं एक ही प्रश्नावली द्वारा प्राप्त की जा सकती है।

प्रश्नावली निर्माण के मुख्य बिन्दु –

आप समझ गये होंगे कि प्रश्नावली एक बहुत ही महत्वपूर्ण प्रपत्र होता है और इसकी सहायता से कितनी सूचना प्राप्त की जाती है। प्रश्नावली का निर्माण करते समय शोधकर्ता को कुछ महत्वपूर्ण निर्णय लेने पड़ते है। जो निम्न हो सकते है–

1. **प्रारंभिक विनिश्चय**
   - अ. निश्चित रूप से किन सूचनाओं की आवश्यकता है?
   - ब. निश्चित रूप से इन सूचनाओं के स्रोत (उत्तरदाता) कौन है?
   - स. इन उत्तरदाताओं तक पहुँचने के लिए किन संचार विधियों का प्रयोग किया जायेगा?
2. **प्रश्नों के बारे में विनिश्चय :**
   - अ. क्या अमुक प्रश्न की सचमुच आवश्यकता है?
   - ब. क्या आवश्यक सूचना अमुक प्रश्न द्वारा प्राप्त की जा सकेगी?
   - स. क्या उत्तरदाता प्रश्न का सही उत्तर दे सकता है?
   - इ. क्या उत्तरदाता प्रश्न का सही उत्तर देगा?
   - स. क्या कोई ऐसा वाह्य घटक है जिसके कारण प्रश्न का त्रुटिपूर्ण उत्तर दिये जाने की संभावना हो?

3. **प्रश्नों की बनावट से संबंधित विनिश्चय –**

   - अ. प्रश्न में प्रयोग किये जाने वाले शब्दों का क्या सभी उत्तरदाताओं के लिए एक ही अर्थ होगा?
   - ब. क्या प्रश्न में गर्भित विकल्प है?
   - स. क्या कोई ऐसी मान्यताएं हैं जो प्रश्न में नहीं दी गई है?
   - द. क्या सभी उत्तरदाता प्रश्न को उसी संदर्भ में/ प्रकार में समझेंगे जैसे की शोधकर्त्ता का आशय है?
   - य. क्या यह प्रश्न अप्रतिबन्धित प्रश्न कई चुनाव विकल्प प्रश्न अथवा दो उत्तर वाले प्रश्न की तरह अच्छी तरह प्रश्न पूछा जा सकता है?

4. **प्रश्नों के क्रम से संबंधी विनिश्चय :**

क्या प्रश्नों को उचित क्रम में रखा गया है जिससे भविष्य में त्रुटि होने की संभावना न हो? क्योंकि उचित क्रम से अनेकों समस्याओं का समाधान हो जाता है।

5. **पूर्व जाँच सम्बन्धी विनिश्चय :**

कोई भी सर्वेक्षण कार्य प्रारम्भ करने से पहले प्रश्नावली की पूर्व जॉच की गयी है कि नहीं तथा पूर्व जॉच में उन्हीं उत्तरदाताओं का प्रयोग किया है कि नहीं जिनको कि मुख्य सर्वेक्षण में प्रयोग में लाया जायेगा?

6. प्रश्नावली की लम्बाई – (**Length of Questionaire**) :

शोधकर्त्ता को इस बात का सदैव ध्यान रखना चाहिए कि उत्तरदाता अपनी स्वेच्छा से प्रश्नों का उत्तर देता है, उसको बाध्य नहीं किया जा सकता। प्रश्नावली की लम्बाई के संबंध में प्रश्नावली जितनी छोटी व संक्षिप्त (सामान्यतया उत्तरदाता साक्षात्कार व प्रश्नावली भरने के लिए सड़क पर 10 मिनट तथा अपने घर पर 15 मिनट का समय देने को तैयार होता है) हो सके, होनी चाहिए। आवश्यक यह है कि उत्तरदाता का रूझान अन्त तक बना रहना चाहिए।

प्रश्नावली का प्रारूप (Form of a Questionaire)

भारतीय समाज में परिवार–नियोजन के अध्ययन हेतु प्रश्नावली का प्रारूप

सहमति / असहमति वाले प्रश्नों पर (सही) का निशान लगाइए तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

उत्तरदाता का नाम ....(पुरूष / स्त्री)

आयु ....वर्ष...............................स्थायी पता ....

व्यवसाय .... पद ....

शैक्षणिक स्तर ....वैवाहिक स्तर (अविवाहित / विवाहित) ....

आय (प्रतिमाह रू0............................... धर्म ....(हिन्दू / मुस्लिम / इसाई / अन्य) परिवार पुरूष .... / स्त्रियाँ .... / बच्चे (पुत्र .... पुत्रियाँ............)

नोट – केवल 15 वर्ष तक के सदस्यों को 'बच्चे' माना जाना चाहिए।

1. विवाह के समय आपकी कितनी आयु थी? ....वर्ष
2. सबसे बड़े बच्चे का विवरण (पुत्र / पुत्री) : आयु .... वर्ष
3. सबसे छोटे बच्चे का विवरण (पुत्र / पुत्री): आयु ....वर्ष
4. आपके कितने बच्चे तीन वर्ष से अधिक बड़े है ? ....?
5. वे किन–किन कक्षाओं में शिक्षा प्राप्त कर रहे है? .... (बड़े से छोटे क्रमानुसार लिखें)

पुत्र	पुत्रियाँ
1. ———————	1 ———————
2. ———————	2. ———————
3. ———————	3. ———————
4. ———————	4. ———————

6. क्या आप बच्चों का जन्म भगवान की देन मानते है जिसे नियंत्रित नहीं किया जा सकता? हॉ / नहीं
7. क्या आपके विचार में दो से अधिक बच्चे परिवार के लिए हितकर है? हॉ / नहीं
8. यदि नहीं तो क्या आपने उनका जन्म नियोजित तथा नियंत्रित करने का प्रयास किया? हॉ / नहीं
9. यदि आपने उनके जन्म को नियोजित किया है, तो किन साधनों के द्वारा ऐसा किया है?
   अ. आत्म संयम द्वारा
   ब. कृत्रिम साधन द्वारा
   स. आपरेशन द्वारा
10. क्या आप छोटे परिवार को अच्छा समझते है। हॉ / नहीं
11. क्या आप परिवार–नियोजन कार्यक्रम में विश्वास रखते है? हॉ / नहीं
12. आपके पति / पत्नी का परिवार–नियोजन की ओर क्या पक्ष है? पक्ष में / तटस्थ / विपक्ष में
13. क्या आपने किसी परिवार–नियोजन केन्द्र से अपना संपर्क स्थापित किया है? हॉ / नहीं
14. क्या आपने अपने किसी डॉक्टर से भी परिवार नियोजन के सम्बन्ध में सलाह ली है? हॉ / नहीं।

15. आप परिवार नियोजन के साधनों को कहॉ से प्राप्त करते है? अस्पताल से/बाजार से/ अन्य स्रोतों से।

स्थान :........................ ....

दिनांक :........................ उत्तरदाता के हस्ताक्षर

नोट– आपके द्वारा प्राप्त सूचनाएं अत्यन्त गोपनीय रखी जायेगी।

अनुसूची (Schedule) :

प्राथमिक समंकों को एकत्रित करने का एक महत्वपूर्ण उपकरण (Tool) अनुसूची है। अनुसूची, प्रश्नावली की तरह ही प्रश्नों की एक लिखित सूची होती है, जिसको कि शोध समस्या की प्रकृति को ध्यान में रखकर तैयार किया जाता है, शोधकर्ता सम्बन्धित, व्यक्तियों से इन प्रश्नों के उत्तर स्वयं पूछकर सूचनाएं एकत्रित करता है।

अतः ''अनुसूची प्रश्नों की एक ऐसी सूची होती है जिसके अनुसार शोधकर्ता स्वयं क्षेत्र में जाकर सम्बन्धित उत्तरदाताओं से साक्षात्कार करके सूचनाएँ एकत्रित करता है।'' अनेक विद्वान अनुसूची को एक प्रविधि के रूप में देखते हैं, जिसका उद्देश्य साक्षात्कार तथा अवलोकन को व्यवस्थित बनाना होता है। इसी अर्थ में अनुसूची को 'साक्षात्कार अनुसूची' (Interview Schedule) भी कहा जाता है।

अनुसूची के प्रकार (Kind of Schedule)

अनुसूचियाँ निम्नलिखित चार प्रकार की हो सकती है–

1. अवलोकन अनुसूची (Observation Schedule)
2. मूल्यांकन अनुसूची (Rating Schedules)
3. संस्था सर्वेक्षण अनुसूची (Institution Survey Schedule)
4. साक्षात्कार अनुसूची (Interview Schedule)

1. अवलोकन अनुसूची (Observation Schedule) :

इस प्रकार की अनुसूची में शोधकर्ता उत्तरदाता से प्रश्न पूछ करके अनुसूची को नहीं भरता बल्कि स्वयं अवलोकन व निरीक्षण करके अनुसूची को भरता है। यह पूर्णकालिक शोधकर्त्ता के लिए उपयोगी होता है।

2. मूल्यांकन अनुसूची (Rating Schedule) :

इस प्रकार के अनुसूची का प्रयोग किसी घटना अथवा वस्तु से संबंधित विषयों के संबंध में उत्तरदाताओं का अभिमत, प्रकृति अथवा पसंद आदि की सांख्यिकीय माप करने के लिए किया जाता है। इसमें प्रश्नों के साथ उत्तरों की विभिन्न सभावनाओं की श्रेणियॉ भी दी जाती है। उत्तरदाता विभिन्न उत्तर दों के क्रमिक महत्व को समझते हुए इच्छित उत्तर पर चिन्ह लगाकर पक्ष या विपक्ष में अपनी इच्छा की श्रेणी को प्रकट करता है। मनोवैज्ञानिक, सामाजिक एवं विपणन अनुसंधान कार्यो में ऐसी अनुसूची का प्रयोग किया जाता है।

3. संस्था सर्वेक्षण अनुसूची (Institution Survey Schedule) :

किसी संस्था से संबंधित समस्याओं का मूल्यांकन करने के लिए संस्था सर्वेक्षण अनुसूची का प्रयोग किया जाता है। ऐसी अनुसूची का निर्माण किसी संस्था अथवा संस्था के किसी एक पहलू के अध्ययन के लिए किया जाता है। प्रायः इस प्रकार की अनुसूची स्वयं संस्था की तैयार करती हैं।

4. **साक्षात्कार अनुसूची (Interview Schedule) :**

जब शोधकर्ता स्वयं साक्षात्कार करके प्राप्त सूचनाओं को एकत्र करता है, तब ऐसे साक्षात्कार के समय इस अनुसूची का प्रयोग किया जाता है। इसमें सूचना प्राप्त करने हेतु पहले ही योजना बना ली जाती है।

अनुसूची का प्रारूप (Form of A Schedule)

एक ग्रामीण क्षेत्रों में अनुसूचित जाति की आर्थिक व सामाजिक समस्याओं के संबंध में अनुसूची का प्रारूप निम्न प्रकार हो सकता है:

ग्रामीण क्षेत्र में अनुसूचित जाति की आर्थिक व सामाजिक समस्याएँ –

1. उत्तर दाता का नाम व पता :...

2. जातिः...

3. आयु :...

4. पेशा :...

5. शिक्षा :...

6. गॉव का नाम :...

7. पिता का व्यवसाय :...

8. परिवार का स्वरूप :... संयुक्त / एकाकी / मिश्रित।

9. वैवाहिक स्थिति – विवाहित / अविवाहित / विधवा / विधुर।

10. परिवार के अन्य सदस्यों की संख्या :...

11. क्या आप अपने बच्चों को स्कूल भेजना अच्छा समझते हैं? हॉ / नहीं। यदि हॉ, तो आपके परिवार में 4 से 15 वर्ष तक के आयु वर्ग के कितने बच्चे स्कूल में शिक्षा ग्रहण करने के लिए जाते है?

12. यदि आप बच्चों को स्कूल भेजना है अच्छा नहीं समझते है तो इसका क्या कारण है?

13. परिवार में स्त्रियों की स्थिति कैसी है? पूर्णतया पुरूषों के अधीन / पुरूषों के समान / पुरूषों से अधिक स्वतंत्र / पूर्णतया स्वेच्छाचारी।

14. आरक्षण के तहत परिवार में विभिनन सदस्यों को निम्नांकित में से कौन–कौन से लाभ प्राप्त हुए? सरकारी नौकरी / बच्चों को निःशुल्क शिक्षा / शिक्षा के लिए छात्रवृत्ति / किसी प्रतियोगी परीक्षा में चयन / किसी चुनाव में निर्वाचन।

15. निम्नांकित पदाधिकारियों का आपकी बस्ती तथा आपके समुदाय के प्रति व्यवहार कैसा रहता है?

    क. हरिजन कल्याण अधिकारी– सहयोग पूर्ण / सामान्य / उदासीन
    ख. खण्ड विकास अधिकारी

ग. पटवारी (लेखपाल)
घ. ग्राम सेवक
ड़. प्रधान
च. निर्वाचित जनप्रतिनिधि

16. क्या आप पर कुछ ऋण है? हाँ / नहीं

यदि हाँ तो यह ऋण आपको कहॉ से प्राप्त हुआ?महाजन से / रिस्तेदारों से / किसी सरकारी संस्था से / बैंक से।

17. आप अपने वर्तमान व्यवसाय से किस सीमा तक संतुष्ट है? पूर्णतया संतुष्ट / सामान्य संतुष्ट / साधारण असंतुष्ट / अधिक असंतुष्ट।

18. निम्नांकित दशाओं में कौन सी दशाएं आपको सबसे अधिक कठिनाईपूर्ण प्रतीत होती है। प्राथमिकता क्रम में तीन का नाम बताइए। विवाह के समय दहेज / उच्च जातियों से दूरी / व्यवसाय का बहुत अरूचिपूर्ण होना / सवर्ण बस्तियों में रहने की अयोग्यता / सवर्णो द्वारा उत्पीड़न / निर्धनता / अधिकारियों का दुर्व्यवहार।

19. क्या आप समझते है कि उच्च जातियॉ आज भी अनुसूचित जनजातियों का शोषण करने का प्रयत्न करती है? हॉ / नहीं। यदि हॉ तो इसके लिए कौन–कौन से कारण उत्तरदायी है? नेतृत्व का अभाव / निर्धनता / उच्च जातियों में अधिक संगठन / कानूनों में दोष।

20. एक दशक में आपके परिवार के कितने पुरूष सदस्य अपनी बस्ती अथवा गॉव को छोड़कर किसी दूसरे गॉव अथवा शहर में चले गये?

21. जो सदस्य दूसरे स्थानों पर चले गये है उन्हें किन कारणों से स्थान परिवर्तन की प्रेरणा मिली,नयी नौकरी / वर्तमान व्यवसाय से घृणा / शहर का आकर्षण / शिक्षा में रूचि / गाँव में झगड़ा / धर्म परिवर्तन।

22. परिवार के जो सदस्य नये स्थानों पर जाकर बस गये है– पहले की तुलना में अब उनकी सामाजिक व आर्थिक स्थिति कैसी है? बहुत अच्छी / साधारणतया अच्छी / पहले की ही तरह / पहले से भी बुरी।

23. अपने जीवन से सम्बन्धित विभिन्न क्षेत्रों को प्रगतिशील बनाने के लिए आप क्या सुझाव देना चाहेंगे?

क. शिक्षा सम्बन्धी सुझाव

ख. व्यवसाय संबंधी सुझाव

ग. जातिगत संगठन संबंधी सुझाव

ड़. सामाजिक जीवन से संबंधित सुझाव

नोट– आपके द्वारा दी गयी सूचनाएं नितान्त गोपनीय रखी जायेगी।

स्थान :................................. हस्ताक्षर

दिनाँक :.............................. अवलोकनकर्ता का नाम

4.7 द्वितीयक समंकों की सीमाएं

डॉ0 बाउले के अनुसार, ''प्रकाशित समंकों को ज्यो–का–त्यों स्वीकार कर लेना कभी भी सुरक्षित नहीं है, जब तक कि उनका अर्थ एवं सीमाएँ ज्ञात न हो जाए।'' अतः द्वितीयक समंकों का अर्थ समझ लेने के पश्चात् इनकी सीमाओं के बारे में भी जानना अत्यन्त महत्वपूर्ण है, जो निम्नलिखित है–

1. **सांख्यिकीय इकाई की परिभाषा** : प्रायः यह पाया जाता है कि प्रथम अनुसंधानकर्त्ता अपने शोध में इकाई को अलग तरीके से परिभाषित किया है, जबकि द्वितीय शोधकर्ता के लिए यह इकाई अनुपयुक्त है। अतः इकाई की परिभाषा में जो अन्तर है, उसका आवश्यक समायोजन कर लेना चाहिए।

2. **सूचना की अपर्याप्तता व अपूर्णता** : द्वितीयक समंक का एक दोष यह भी है कि सूचना कभी–कभी या तो पर्याप्त मिलती है या कम प्राप्त होती है। अतः शोधकर्ता को चाहिए कि सूचना अपर्याप्त न होकर पर्याप्त हो।

3. **पक्षपात** : पक्षपात एक ऐसा दोष है कि शोध की विश्वसनीयता पर प्रश्नचिन्ह लगा देता है। शोध निष्पक्ष होने पर ही अपने उद्देश्य को प्राप्त करते है। द्वितीयक समंक निष्पक्ष हो इसकी गारंटी कोई नहीं दे सकता। अतः शोधकर्ता को चाहिए कि वह जब उसका उपयोग करें तो पक्षपात की वारीकी से जाँच कर लेनी चाहिए।

4. **उद्देश्य व क्षेत्र की भिन्नता** : प्राथमिक अनुसंधान के उद्देश्य व क्षेत्र का पता लगा लेना चाहिए समान उद्देश्य एवं क्षेत्र के लिए समंकों का उपयोग लाभदायक सिद्ध हो सकता है। विपरीत परिस्थिति में नुकसानदायक भी हो सकता है।

5. **समंक संकलन की रीति** : प्रथम अनुसंधानकर्ता समंकों के संग्रहण में किस प्रकार की रीति का प्रयोग किया है उसे देख एवं समझ लेना चाहिए क्या वह विश्वसनीय है? विश्वसनीय नहीं होने पर अथवा इस दोष से आप का ससस्त शोध प्रभावित हो सकता है।

4.8 बोध–प्रश्न

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें :–

1. समंक .... का संख्यात्मक रूप है।
2. प्राथमिक समंक .... रूप में होते हैं।
3. प्राथमिक समंक और द्वितीयक समंक में अंतर .... का होता है।
4. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान विधि .... के संग्रहण के लिए प्रयोग में लायी जाती है।
5. द्वितीय समंक के स्रोत .... भी होते हैं।
6. प्रश्नावली का आकार बहुत .... या .... नही होना चाहिए।
7. जहाँ प्रत्येक प्रश्न के साथ–साथ संभातिव उत्तर भी दिये हो उसे .... प्रश्नावली कहा जाता है।

8. संस्था सर्वेक्षण अनुसूची प्रायः .... के द्वारा तैयार की जाती है।

निम्नलिखित कथनों में से सत्य एवं असत्य कथन को छाँटिए :–

1. प्राथमिक, द्वितीयक एवं तृतीयक समंक होते है।
2. भारत सरकार द्वारा किया गया जनगणना अन्य के लिए भी प्राथमिक समंक होता है।
3. प्राथमिक समंकों के संग्रहण में समय साधन एवं शक्ति की आवश्यकता होती है।
4. स्थानीय स्रोतों या संवेादताओं द्वारा सूचना प्राप्ति की विधि द्वितीयक समंक के एकत्रीकरण के लिए प्रयोग में लाया जाता है।
5. सार्वजनिक प्रलेखों से द्वितीयक एकत्रित किये जाते हैं।
6. सरकारी प्रकाशन द्वितीयक समंक का प्रमुख स्रोत है।
7. अच्छे प्रश्नावली के प्रश्न सीधे, सरल व स्पष्ट होते है।
8. अनुसूची शोधकर्त्ता द्वारा तैयार प्रश्नों की सूची है जो स्वयं जाकर साक्षात्कार करता है।

4.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

रिक्त स्थान वाले प्रश्नों के उत्तर –

1. तथ्यों, 2. मौलिक, 3. अवस्था, 4. प्राथमिक समंक, 5. अप्रकाशित प्रलेख, 6. बड़ा, छोटा, 7. प्रतिबंधित, 8. संस्था।

सत्य / असत्य

1. असत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य, 6. सत्य, 7. सत्य, 8. सत्य।

4.10 स्वपरख प्रश्न

1. प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों का अवधारणात्मक व्याख्याा कीजिए एवं इनके बीच अन्तर स्पष्ट कीजिए।
2. प्राथमिक समंकों के संग्रहण की रीतियों का विवेचन कीजिए, आप किस रीति को सबसे उत्तम समझते हैं अपने सुझाव दीजिए।
3. द्वितीयक समंकों के स्रोतों का वर्णन कीजिए।
4. प्रश्नावली एवं अनुसूची एक शोधकर्ता के लिए क्यो आवश्यक है? इनके प्रारूपों का वर्णन करें।
5. प्रश्नावली एवं अनुसूची में अन्तर स्पष्ट करें।

इस खण्ड के लिये कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. डॉ0 श्याम गोपाल शर्मा, डॉ0 रवि के0 जैन0 डॉ0 गोविन्द पारीक : शोध प्रणाली तथा सांख्यिकीय तकनीकें, रमेश बुक डिपो, जयपुर, नई दिल्ली
2. पारस नाथ राय : अनुसंधान परिचय
3. प्रो0एस0पी0 गुप्ता, डॉ0 अलका गुप्ता : सांख्यिकीय विधियाँ, शारदा पुस्तक भवन, यूनिवर्सिटी इलाहाबाद
4. डॉ0 आर0ए0 शर्मा : शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया

////

M.Com.-201
(शोध प्रविधि)
Reserarch Methodology

उ० प्र० राजर्षि टण्डन
मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

खण्ड – 2
निदर्शन एवं प्रमापीकरण

प्रस्तुत खण्ड में ''**अनुमापन एवं समंक विश्लेषण**'' को कुल पाँच इकाइयों में विभक्त किया गया है जिनकी व्याख्या निम्न है।

इकाई – 05 **इस इकाई में निदर्शन (Sampling)** से संबंधित है। इस इकाई के अन्तर्गत निदर्शन का अर्थ परिभाषा एवं उसे एकत्रित करने के तरीको का विशद् वर्णन किया गया है।

इकाई – 06 **यह इकाई अनुमापन (Scaling)** से संबंधित है। इस इकाई के अन्तर्गत मापन का अर्थ एवं परिभाषा तथा उसके स्तर, मापन की तकनीके, लिकर्ट का अभिवृत्ति मापनी, विविध आयाम मापनी के साथ एक समूचित अभिवृत्ति मापनी का चुनाव कैसे किया जाता है? जिस पर विस्तृत प्रकाश डाला गया है।

इकाई – 07 सांख्यिकी का उद्देश्य समंकों को जनसामान्य तक पहुँचाने योग्य बनाना भी है। इसी उद्देश्य की पूर्ति के लिए यह इकाई समंकों को जनसाधारण के लिए उपयोगी व बोधमय बनाने के लिए प्रस्तुत की गयी है। इसमें रेखांचित्र एवं विन्दु रेखीय प्रदर्शन हेतु प्रसंसकरण संचालन (Processing Operation) चित्र रचना चित्रों की परिसीमायें, चित्रलेख, आवृति आयत चित्र, चित्रों तथा बिन्दुरेखा, चित्रों में अन्तर, विभिन्न प्रकार के काल श्रेणी तथा काले रेणी के रेखांचित्र का गहन एवं विस्तृत प्रस्तुतीकरण किया गया है।

इकाई – 08 यह इकाई केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप से संबंधित है। इसमें परिचय, अच्छे औसत की विशेषताएँ, गणितीय माध्य, भारित गणितीय माध्य, मध्यका, बहुलक, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य का विस्तृत विवेचन किया गया है।

इकाई – 5 प्रतिदर्श (Sampling)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य

इस इकाई को अध्ययन के पश्चात् आप निम्न तथ्यों से अवगत हो जायेंगे–

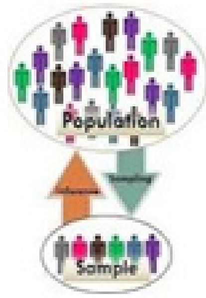
- प्रतिदर्श क्या होता है।
- प्रतिदर्श को प्राप्त करने की कौन–कौन तकनीके प्रयोग में लायी जाती है, तथा
- प्रतिदर्श के लाभ कौन–कौन है तथा इसकी सीमाएं क्या हैं।

5.1 प्रस्तावना

किसी तथ्य की सम्पूर्ण इकाइयों की जाँच करना संभव नहीं होता है। इतः किसी तथ्य या क्षेत्र की सम्पूर्ण इकाइयों के स्थान पर वैज्ञानिक आधार पर चुनी गयी इकाइयों से समस्या का हल निकाला जाता है। पुनः उसे समग्र पर लागू किया जाता है। शोधकर्ता को निर्णय करना पड़ता है कि प्रस्तुत समस्या के अध्ययन के लिए वह शोध क्षेत्र की प्रत्येक इकाई के बारे में सांख्यिकीय सूचना उपलब्ध करेगा या क्षेत्र की सभी इकाइयों के समग्र (Universe or Ppulation) में से कुछ प्रतिनिधि इकाइयों को छाँटकर केवल उनके बारे में ही आवश्यक समंक एकत्रित करेगा। यह अध्याय उपरोक्त तथ्यों पर ही प्रकाश डालने वाला है।

5.2 प्रतिदर्श का परिचय

प्रतिदर्श को समझाने से पूर्व समग्र को समझना आवश्यक हो जाता है।



समग्र (Universe/Population)

प्रतिदर्श (Sample)

5.2 (क)

5.2.1 समग्र (Universe or Population)

सांख्यिकी में 'समग्र' या 'समष्टि' का तात्पर्य शोध क्षेत्र की सभी इकाइयों के समूह से हैं जिनमें कुछ सामान्य विशेषताएँ हो। उदाहरण के लिए यदि किसी महाविद्यालय के 5000 छात्रों की आयु, लम्बाई व मासिक व्यय के सम्बन्ध में शोध करना हो तो सभी छात्रों का समूह (कुल 5000) समग्र या समष्टि कहलायेगा।

5.2.2 प्रतिदर्श (Sample)

किसी जनसंख्या के अंश या भाग को प्रतिदर्श कहते है, जो उस जनसंख्या (Population) का प्रतिनिधिक (Representative) होता है। जैसे मान लें कि कोई शोधकर्त्ता उत्तर प्रदेश के 16 वर्षीय लड़कों की औसत लंबाई को जानना चाहता है। सरलता के लिए वह राज्य के सभी 75 जिलों से सभी समुदायों की 5000 सोलह वर्षीय लड़कों की लम्बाई को थाप कर कोई निष्कर्ष प्राप्त करता है। अतः यहाँ 5000 लड़को को प्रतिदर्श कहेंगें। याद रखना चाहिए कि प्रतिदर्श का चुनाव निष्पक्ष तथा यादृच्छिक (Randomly) किया जाता है, ताकि वह अपनी जनसंख्या का प्रतिनिधित्व कर सकें।

रेबर तथा रेबर (Reober & Rober, 2001) के शब्दों में ''प्रतिदर्श किसी जनसंख्या का वह भाग है जिसका चुनाव कुछ इस तरह से किया जाता है कि उसे उस जनसंख्या का सामूहिक रूप से प्रतिनिधि समझा जाए।''

जब सम्पूर्ण समूह में से किसी विशिष्ट आधार पर थोड़ा सा भाग जॉच के लिए (जैसा की उपरोक्त चित्र 5.2 क में स्पष्ट किया गया है) लिया जाता है तो उसे नमूना, बानगी, निदर्शन अंश अथवा प्रतिदर्श कहते है। समग्र की प्रत्येक इकाई को निदर्शन इकाई कहते है।

सिम्पसन एवं काफका के अनुसार, ''प्रतिदर्श, समग्र की इकाइयों का वह अंश है जो पूर्ण समग्र के अध्ययन हेतु चुना जाता है।'' उपरोक्त उदाहरण में यदि 5000 छात्रों में से 50 छात्रों को छॉटा गया है और उनके

मासिक व्यय का अध्ययन किया जाये तो यह प्रतिदर्श अनुसंधान होगा। उन 50 विद्यार्थियों के व्यय के प्रतिदर्श अध्ययन के आधार पर 5000 विद्यार्थियों के व्यय के बारे में निष्कर्ष निकाले जा सकते है।

स्पष्ट है कि जनसंख्या की तुलना में प्रतिदर्श का क्षेत्र काफी सीमित होते हुए भी प्रतिदर्श अपनी जनसंख्या का प्रतिनिधित्व करता है। इसी आधार पर सांख्यिकी समस्याओं के समाधान में प्रतिदर्श का ही उपयोग किया जाता है।

5.3 प्रतिदर्श की तकनीकें (Techniques of Sampling)

समग्र से प्रतिदर्श चुनने में तीन महत्वपूर्ण बातों पर विचार करना आवश्यक है, जिससे ऐसे समंकों का संकलन न हो सके जिनका समस्या से कोई संबंध हो ही न, प्रतिदर्श के चुनाव में अधिकतम मितव्ययिता हो सके तथा प्रतिदर्श के डिजाइन की योजना सर्वाधिक उपयुक्त बन सके। ये तीन बातें निम्न है–

प्रथम : प्रतिदर्श का चयन करने से पूर्व समग्र जिसका अनुसंधान करना है, उसको स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाये। शोधकर्ता को उसके आकार, भौगोलिक स्थिति, संदर्भित काल आदि का ज्ञान होना चाहिए।

दूसरे : शोध के उद्‌देश्य स्पष्ट किये जाने चाहिए।

तृतीय : प्रतिचयन से पूर्व परिशुद्धता का वांछित स्तर तथा परिणामों में आवश्यक महत्ता का स्तर बताया जाना चाहिए क्योंकि प्रतिदर्श, जिसका अन्वेषण किया जायेगा, का आकार इन बातों पर निर्भर करेगा।

यदि आप प्रतिदर्श से सम्पूर्ण समग्र के बारे में उचित निष्कर्ष निकालना चाहते हैं तो यह आवश्यक है कि प्रतिदर्श में अभिनति (Bias) से मुक्त होने का आश्वासन हो। समग्र में से प्रतिदर्श का इस प्रकार चुनाव किया जाए जिससे प्रतिदर्श पूर्ण रूप से समग्र का प्रतिनिधित्व करें तथा वे सभी विशेषताएँ जो समग्र में पायी जाती है, ठीक उसी रूप में प्रतिदर्श में भी हो।

प्रतिदर्श दो प्रकार से लिया जा सकता है :–

1. दैव प्रतिचयन/अवसर/सम्भाविता प्रतिचयन (Random Sampling or Chance or Probability Sampling)
2. गैर–दैव प्रतिचयन/सविचार/सादेश्य प्रतिचयन (Non-Random Sampling or Purposive or Reliberative)

1. **दैव प्रतिचयन (Random Sampling)** : एक प्रतिदर्श दैव विधि से उस दशा में चयन किया जाता है जब प्रत्येक सम्भव इकाई को प्रतिदर्श में चुने जाने का अवसर हो।

डॉ0 एफ0 येट्स (Dr F. Yates) के अनुसार दैव प्रतिदर्श वहीं होगा जिसमें, ''समस्त की प्रत्येक इकाई को प्रतिदर्श में शामिल होने का समान अवसर हो।''

सी0एच0 मेयर्स (C.H. Meyers) के अनुसार, ''एक प्रतिदर्श उस समय दैव कहा जाता है जब चयन की गयी प्रत्येक इकाई को चुने जाने की सम्भावना अन्य सभी इकाईयों, जिन्हें उसके स्थान पर चुना जा सकता था, की संभावना के समान हो।''

अन्य शब्दों में, ''एक दैव प्रतिदर्श वह होगा जिसका चयन इस प्रकार किया गया हो कि प्रत्येक इकाई के चुने जाने के पश्चात् समग्र की शेष इकाइयों के अगले चयन में चुने जाने की समान सम्भावना होती है। ये दो प्रकार की होती है –

अ. सरल तथा;

ब. प्रतिबन्धित

अ. सरल दैव प्रतिचयन के अनुसार

प्रतिदर्श चुनने की निम्नलिखित सरल रीतियाँ है :–

क. **वर्तन में से पर्चियॉ निकालना (Drawing Chips from a bowl)** : परिमित समग्र (Finite Population) जिसके अवयव की पहचान हो तथा संस्थाए गीनी हुई हो, में से दैव प्रतिदर्श (Random Sample) चुनने की यह सबसे सरल पद्यति है। इस विधि के अन्तर्गत समग्र की सभी इकाइयों की पर्चियों अथवा गोलियॉ बनाकर किसी निष्पक्ष व्यक्ति द्वारा या स्वयं ऑखें बन्द करके उतनी पर्चियों या गोलियॉ उठायी जायें जितनी इकाइयॉ प्रतिदर्श में शामिल करनी होती है। उदाहरण के लिए यदि किसी महाविद्यालय में 1,000 विद्यार्थी हैं जिनमें से सर्वेक्षण करने के लिए 100 विद्यार्थियों का एक प्रतिदर्श बनाना है तो उसके लिए प्रत्येक के नाम या नम्बर की 1000 पर्चियों की गोलियॉ बनाकर किसी वर्तन में रख दी जायेगी। ये आवश्यक है कि गोलियॉ या पर्चिया एक जैसी बने। इन सभी पर्चियों या गोलियों को एक वर्तन में डालकर खुब हिलाकर मिला लिया जाता है और किसी निष्पक्ष व्यक्ति द्वारा उनमें से आवश्यक संख्या में पर्चियाँ निकलवा लिया जाता है। पचिर्यो पर जो नाम या नम्बर निकले उसे लिखते रहना चाहिए। ये ही प्रतिदर्श की इकाइयाँ होगी।

ख. **ढोल घुमाकर (By Rolating the Drum)** : एक विजली चालित मशीन जिसे Electronic Random Number Indicator Equipment कहते है दैव संख्याएॅ ज्ञात करने के लिए प्रयोग में लायी जाती है। इस मशीन का प्रयोग इनामी ब्राण्डों, लॉटरी, इनाम आदि निकालने के लिए किया जाता है। लोहे या लकड़ी के गोल टूकड़ों पर 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, अंक लिखे रहते है। मशीनी प्रक्रिया से ढोल घुमाया जाता है, घुमाने से उसमें से एक टुकड़ा निकल आता है। उस पर लिखी संख्या दैव–संख्या की इकाई मानी जाती है। पुनः यही प्रक्रिया तब तक दुहरायी जाती है जब तक पर्याप्त संख्या प्राप्त न हो जाय।

ग. **दैव संख्याएॅ (Random Numbers)** : उपरोक्त दोनों विधियॉ उस समय अनुपयुक्त होने लगती है जब समग्र पर्याप्त बड़े आकार का होता है। इसलिए प्रतिदर्श बनाने के लिए दैव संख्याओं की तालिका का प्रयोग अब सामान्य हो गया है। दैव संख्याओं की तालिका में दैव विधि से चुनी गयी संख्याएँ होती है :–

विभिन्न संख्याशास्त्रियों एवं संगठनों ने दैव संख्याओं की तालिकाएॅ तैयार की है, इनमें से निम्नलिखित तालिकाएॅ प्रमुख है,

अ. **फिशर एवं थेट्स की सारणी** : इस सारणी में 15,000 दैव अंकों को 1500 समूह में बॉटकर दिया गया है।

ब. **कैण्डाल एवं बी0बी0 स्मिथ की सारणी** : इस सारणी में 1,00,000 दैव अंकों को 25,000 के चार अंकों के समूहों में बॉटकर दिया गया है।

स. **रैण्ड कारपोरेशन की सारणी** : इस सारणी में 10,00,000 दैव अंकों को 2,00,000 पॉच–पॉच अंकों के समूहों में बॉटकर दिया गया है।

द. **टिप्पेट की सारणी** : टिप्पेट ने न्यादर्श के चयन की इस दैव सारणी में चार–चार अंक वाले 10,400 समूह दे रखे हैं, जिनमें से दैव संख्याओं का चुनाव किया जाता है।

ध. **प्रतिबन्धित दैव निदर्शन विधियाँ (Restricted Random Sampling Method)** : सरल दैव निदिर्शन विधियों में प्रतिबंध लगाने की आवश्यकता इसलिए होती है कि कही ऐसा न कि हो दैव विधियों से चुना गया प्रतिदर्श समग्र के किसी एक भाग का ही प्रतिनिधित्व करें। उदाहरण के लिए यदि किसी क्षेत्र विशेष में सरल दैव निदर्शन विधि से चुनाव किया जाता है तो हो सकता है कि केवल कुछ गरीब लोग अथवा कुछ अमीर लोग या जाति विशेष के लोग ही प्रतिदर्श में चुन लिये जाएं तथा सम्पूर्ण क्षेत्र का प्रतिनिधित्व उचित प्रकार से न हो पाए। यही कारण है कि विभिन्न उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए दैव निदर्शन विधि की पवित्रता को कायम रखते हुए प्रतिचयन करते समय कुछ प्रतिबन्ध लगा दिये जायें तत्पश्चात् ही प्रतिचयन किया जाय।

प्रतिबन्धित दैव निदर्शन की प्रमुख विधियाँ निम्न प्रकार है–

अ. **व्यवस्थित दैव निदर्शन विधि (Systematic Random Sampling)** : इस विधि के अन्तर्गत समग्र की सभी इकाइयों की एक सूची तैयार कर ली जाती है, जिसका आधार वर्णानुक्रम (Alphabetical Order) आयु अथवा भौगोलिक हो सकता है, प्रतिदर्श में जितनी इकाइयॉ आपको चुनना है, उसका आधार निश्चित कर लिया जाता है। तत्पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग कर प्रतिचयन अंतर ज्ञात कर लिया जाता है।

समग्र में कुल इकाइयों की संख्या

$$\text{प्रतिचयन अन्तर} = \frac{\text{समग्र में कुल इकाइयों की संख्या}}{\text{प्रतिदर्श का आकार}}$$

जैसे किसी महाविद्यालय में 1000 छात्र है, जिसमें से 100 विद्यार्थियों का प्रतिदर्श चुना जाता है, तो उपर्युक्त सुत्रानुसार–

$$\text{प्रतिचयन अन्तर} = \frac{1000}{100} = 10$$

अर्थात् प्रतिचयन के अन्तर के आधार पर प्रत्येक 10वॉ विद्यार्थी प्रतिदर्श के रूप में चुना जायेगा। लेकिन यहॉ प्रथम विद्यार्थी के चुनाव के आधार पर ही अन्य विद्यार्थियों का चुनाव किया जा सकेगा, इसलिए पहले विद्यार्थी का चुनाव जो कि 1 से 10 तक के बीच में से होगा का चुनाव करने के लिए सरल दैव निदर्शन की दैव संख्या सारणी विधि का प्रयोग किया जा सकता है। यदि यह संख्या 7 आती है तो 10–10 के अन्तर पर क्रमशः 17, 27, 37 .... को सूची में से प्रतिदर्श में चुन लिया जायेगा।

ब. स्तरित दैव निदर्शन विधि Stratified Random Sampling Method :

कोई ऐसा समग्र जिसकी प्रतिचयन इकाइयाँ अलग–अलग विशेषताएँ रखती है तो ऐसे समय में सरल दैव निदर्शन के स्थान पर प्रतिबंधित दैव निदर्शन की स्तरित दैव निदर्शन विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि में सर्वप्रथम प्रतिचयन इकाइयों को उनकी विशेषताओं के अनुसार अलग–अलग वर्गो

में विभाजित कर लिया जाता है। इस वर्गीकरण का आधार आय, आयु, लिंग आदि हो सकता है। उसके बाद न्यादर्श के लिए चुनाव की जाने वाली इकाइयों का अलग–अलग वर्गो में विभाजित इकाइयों में से अनुपात के अनुसार चयन सरल दैव विधि से कर लिया जाता है। उदाहरण के लिए एक महाविद्यालय में 2000 विद्यार्थियों में से 400 प्रथम श्रेणी, 600 द्वितीय श्रेणी व 1000 तृतीय श्रेणी प्राप्त करने वाले समूहों में विभाजित है। अब यदि विद्यार्थियों के समग्र में से 20 प्रतिशत अर्थात् समग्र का (2000 x 20/ 100=400)।

विद्यार्थियों का न्यादर्श लेना है तो उन्हें अलग–अलग वर्गो में विभाजित इकाइयों के अनुपात के आधार पर 80 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में से 120 द्वितीय श्रेणी में से व 200 विद्यार्थी तृतीय श्रेणी वाले वर्गो में से चयनित किये जायेगें। इस प्रकार चयनित इकाइयों का न्यादर्श, समग्र का सही प्रतिनिधित्व करेगा।

स. **समूह अथवा क्षेत्रफल निदर्शन विधि (Cluster or Area Sampling Method)** : इस विधि में समग्र को विभिन्न समूहों (Clusters) में क्षेत्रानुसार (Areawise) बॉट लिया जाता है, तत्पश्चात् प्रत्येक समूह में से इकाइयों का चुनाव सरल दैव प्रतिचयन विधि से कर लिया जाता है। इसका परिणाम यह होता है कि प्रत्येक क्षेत्र को आवश्यक प्रतिनिधित्व मिल जाता है जो कि सरल दैव निदर्शन विधि में संभव नहीं होता। स्तरित दैव निदर्शन विधि में जहाँ एक ओर सभी वर्गो को प्रतिनिधित्व देने की बात कहीं जाती है, चाहे वे किसी क्षेत्र से संबंधित हो वहीं दूसरी ओर यहॉ सभी क्षेत्रों के प्रतिनिधित्व को अधिक महत्व दिया जाता है, चाहें वे किसी वर्ग से संबंधित हो।

द. **बहुस्तरीय दैव निदर्शन विधि (Multistage Random Sampling)** : जब समग्र की व्यापकता होती है तो सरल दैव निदर्शन विधि द्वारा चयनित इकाइयों से वैज्ञानिक परिणाम प्राप्त करना असम्भव होता है, क्योकि सरल दैव निदर्शन विधि में प्रतिचयन इकाइयों का चयन एक ही स्तर पर किया जाता है। अतः इस दृष्टि से जब समग्र को कई भागों में विभाजित करके प्रतिदर्श का चयन किया जाता है तो इसे वहुस्तरीय दैव निदर्शन विधि कहा जाता है। जैसे भारत में गेहूँ की प्रति एकड़ उपज ज्ञात करने के लिए प्रति चयन इकाइयॉ देश के राज्यों में, राज्यों को जिले में, जिलों को गॉवों में तथा गॉवों में से कुछ खेतों का चयन करके ज्ञात की जायेगी। अतः विभिन्न स्तरों को आधार पर किया गया निदर्शन बहुस्तरीय दैव निदर्शन कहलाता है।

य. **स्वीकृत या अनुक्रमिक (क्रमबद्ध) निदर्शन विधि (Acceptance or Sequential sampling Method)** :

इस विधि का प्रयोग उद्योगों मे प्रायः किस्म नियंत्रण के लिए किया जाता है। इस विधि से पहले निदर्शन विभ्रम का अध्ययन करके उसके आधार पर न्यादर्श का आकार निश्चित करते है।

इस विधि में प्रचय (Lots) में से न्यादर्श लिया जाता है और स्वीकृत निदर्शन के आधार पर निश्चित किया जाता है कि कौन से प्रचय (Lots) स्वीकृत किये जाएं तथा कौन से प्रचय या ढ़ेर को अस्वीकृत किया जाए।

दैव निदर्शन विधियों के गुण :

दैव निदर्शन विधि के द्वारा प्रतिचयन इकाइयों के चयन प्रक्रिया में निम्न गुण पाये जाते है–

अ. **वैज्ञानिक विधि** : इस विधि के द्वारा प्रतिचयन इकाइयों का चयन समग्र की समस्त इकाइयों के बीच में से किया जाता है। अतः समग्र की सभी इकाइयों में से प्रतिदर्श के लिए समान प्रायिकता से प्रतिचयन इकाइयों का चयन किया जाता है। इसलिए इसे वैज्ञानिक पद्यति कहा जाता है।

ब. **मितव्ययी** : इस विधि के द्वारा प्रतिचयन इकाइयों के चयन से समय, श्रम एवं धन की बचत होती है। अतः यह वैज्ञानिक पद्यति के साथ–साथ मितव्ययी भी होती है।

स. **समग्र का प्रतिनिधित्व** : इस विधि से जो भी इकाइयॉ प्रतिचयनित की गई रहती है वो समग्र का पूर्ण प्रतिनिधित्व करती है।

द. **निदर्शन विभ्रम की माप संभव** : दैव निदर्शन विधि में निदर्शन विभ्रम की माप की जा सकती है और परिणामों की सुनिश्चित सीमाओं का पता लगाया जा सकता है।

य. **सम्भावना सिद्धान्त का प्रयोग** : इस प्रणाली का एक प्रमुख गुण यह है कि इसमें सम्भावना का व्यावहारिक प्रयोग किया जाता है।

दैव निदर्शन विधियों के दोष या सीमाएँ :

दैव निदर्शन विधियों के उपर्युक्त गुण होते हुए भी कुछ दोष है जो निम्नलिखित है–

अ. शोध क्षेत्र के छोटे होने पर प्रतिचयन इकाइयों का स्वतंत्र चयन सम्भव नहीं है।

ब. यदि समग्र का आकार छोटा है तो प्रतिदर्श का चयन संभवन नहीं है।

स. समग्र में यदि विभिन्न विशेषताओं वाली इकाइयों का समावेश है, तो उचित प्रतिनिधित्व करने वाली इकाइयों का चयन सम्भव नहीं है।

द. समग्र की इकाइयों के एक दूसरे पर निर्भर होने पर इस विधि का प्रयोग सम्भव नहीं है।

2. **गैर–दैव निदर्शन विधियाँ (Non-Random Samling Method) :**

निदर्शन की ऐसी विधियॉ जहॉ पर प्रतिदर्श का चुनाव प्राथमिकता के आधार पर न होकर व्यक्तिपरक (Subjective) होता है तब ऐसी विधि को गैर–दैव निदर्शन विधि कहा जाता है। कई बार प्रतिचयन करने के लिए ये विधियॉ अधिक उपयुक्त होती है जैसे बाद–विवाद प्रतियोगिता के लिए कक्षा में छात्र का चुनाव (गैर दैव निदर्शन विधियॉ निम्न प्रकार की हो सकती है–

1. **सविचार निदर्शन विधि (Purposive or Judgement sampling Method) :**

जैसा की नाम से ही स्पष्ट है कि इस विधि में शोधकर्ता अपने विचार अर्थात् विवेक का प्रयोग करता है। दूसरे शब्दों में प्रतिचयन इकाइयों का चयन शोधकर्ता अपने विवेक के आधार पर उद्देश्यानुसार करता है। शोधकर्ता समग्र में से अपने व्यक्तिगत निर्णय के आधार पर इकाइयों का चयन अध्ययन करने के लिए करता है। न्यादर्श में किन पदों अथवा इकाइयों को शामिल करना है तथा किनकों छोड़ देना है, यह पूरी तरह शोधकर्ता की प्रकृति पर निर्भर करता है। इसलिए दो शोधकर्त्ताओं द्वारा चयन की गई इकाइयों में अन्तर होना स्वाभाविक ही होगा। फलस्वरूप परिणामों में भिन्नता रहेगी।

2. **सुविधानुसार निदर्शन विधि (Convenience Sampling Method) :**

इस विधि का अर्थ भी इसके नाम में ही छूपा है। अर्थात् शोधकर्त्ता द्वारा प्रतिचयन करते समय अपनी सुविधा का विशेष रूप से ध्यान रखा जाता है। उदाहरणार्थ गोरखपुर के राजकीय महाविद्यालय के प्राध्यापक को सम्पूर्ण उत्तर प्रदेश के छात्रों के सम्बन्ध में प्रतिचयन विधि से कोई शोध का रिपोर्ट देने के

लिए कहा जाता है। तब उन प्राध्यापक द्वारा गोरखपुर एवं निकटवर्ती क्षेत्र के छात्रों का ही प्रतिदर्श में चुनाव सुविधानुसार निदर्शन कहलायेगा।

3. **अभ्यंश निदर्शन विधि (Quota Sampling Method) :**

इस विधि के अन्तर्गत स्तरित प्रतिचयन की तरह समग्र को विभाजित कर लिया जाता है, लेकिन इस विधि में विभिन्न वर्गो में से प्रतिचयन इकाइयों का चयन, दैव आधार पर न करके प्रगणकों (Enumerators) पर छोड़ दिया जाता है। इस विधि में यह पूर्व निर्धारित होता है कि एक वर्ग में से कितनी इकाइयों का चयन किया जायेगा। अतः यह निश्चित की गई संख्या ही अभ्यंश कहलाती है। इस विधि का प्रयोग व्यापारिक तथा जनमत सर्वेक्षण (Public Opinion Polls) में व्यापक रूप से किया जाता है, जैसे यदि किसी गॉव में से 10 पुरूष एवं 15 महिलाओं का चुनाव सरपंच पर छोड़ दिया जाए तब सरपंच द्वारा व्यक्तिगत निर्णय के आधार पर चुनाव अभ्यंश निदर्शन कहलाएगा।

गैर–दैव निदर्शन विधियों के गुण :

गैर–दैव निदर्शन विधियों के गुण निम्नलिखित है–

1. जब समग्र की किसी ज्ञात विशेषता का गहन अध्ययन करना हो तो गैर–दैव निदर्शन विधियाँ उपयुक्त होती है।
2. पायलट सर्वेक्षण के लिए भी सविचार प्रतिचयन प्रणाली उपयुक्त होती है।
3. गैर–दैव–निदर्शन विधियॉ सरल व मितव्ययी होती है।

गैर–दैव–निदर्शन विधियों के दोष : प्रमुख दोष निम्नलिखित है–

1. इकाइयों के चुनाव में व्यक्तिगत झुकाव (Personal inclination) का अधिक महत्व रहता है।
2. प्रतिदर्श अनुमानों की सत्यता की गारंटी नहीं होती है।
3. न्यादर्श की इकाइयों के चुनाव में शोधकर्ता को पक्षपात बरतने का पूर्ण अवसर रहता है। अतः यह संभव है कि न्यादर्श समग्र का पूर्ण प्रतिनिधित्व न करें।

5.4 प्रतिदर्श के लाभ Advantages of Sample

ए0सी0 रोसेण्डर (A.C. Rosander) के अनुसार, ''संगणना अथवा पूर्ण आगणन की अपेक्षा प्रतिदर्श के अनेक लाभ होते है, अतः सावधानी से चयन किया जाय तो प्रतिदर्श पर्याप्त सस्ता ही नहीं रहता बल्कि ऐसे परिणाम देता है, जो विल्कुल सही होते हैं और कभी–कभी तो संगणना के परिणामों से भी अधिक सही होते हैं, यदि सावधानीपूर्ण चयन किया गया हो तो प्रतिदर्श वास्तव में त्रुटिपूर्ण नियोजित व क्रियान्वित संगणना से श्रेष्ठतर रहता है। **प्रोफेसर रोनाल्ड फिशर (Prof. Ronald Fisher)** ने भी प्रतिदर्श के चार प्रमुख गुण बताएं है। प्रथम तीन गुणों अनुकूलता, गति एवं मितव्ययिता के बारे में तो कुछ कहना ही नहीं है, परन्तु यह विधि पूर्ण आगणन से अधिक वैज्ञानिक है। विक्रयों के गणितीय सिद्धान्त पर आधारित होने के कारण प्रतिदर्श में सूक्ष्मता व परिशुद्धता की व्याख्या आरम्भ से ही प्रधान रहती है। पूर्ण आगणन की तुलना में प्रतिदर्श के कुछ प्रमुख लाभ है जो इस प्रकार है–

1. **समय की बचत** : यदि इसे संगणना अनुसंधान से तुलना किया जाय तो इसमें कम इकाइयों का अध्ययन किया जाता है, जिससे समय की काफी बचत होती है। यदि परिणाम को शीघ्र प्राप्त करना हो तो यह विधि उत्तम होती है।
2. **धन की बचत** : जहाँ पर समग्र के एक अंश का अध्ययन करना हो तो वहाॅ समय के साथ–साथ घर की बचत अवश्यम्भावी हो जाता है।
3. **विस्तृत जॉच** : शोध के क्षेत्र में इकाइयों की अधिक संख्या होने पर विस्तृत अन्वेषण संभव नहीं होता है, वहीं इकाइयों की संख्या कम होने पर उसका गहन अध्ययन संभव होता है, जिससे निष्कर्ष सत्यता के अत्यन्त करीब हो जाता है।
4. **अधिक परिशुद्धता** : प्रशिक्षित व्यक्तियों की सेवाएं लेने तथा उन्हें गहन प्रशिक्षण देने के कारण प्रतिदर्श अनुसंधान का स्तर अधिक रहता है। संगणना, अनुसंधान की अपेक्षा, प्रतिदर्श अनुसंधान में परिणामों में अधिक परिशुद्धता पायी जाती है।

. **कुछ विशेष दशाओं में उपयुक्तता** : जहाँ पर समग्र परिभाषित नहीं होता, समग्र की विशालता एवं अनंन्तता पायी जाती है, वहाॅ पर यह प्रणाली उपयुक्त होती है, जैसे मत संग्रह सर्वेक्षण (Opinion Surveys) आदि।

5.5 प्रतिदर्श की सीमाएं (दोष) Advantages of Sample

प्रतिदर्श अनुसंधान के निम्नलिखित दोष है –

1. **भ्रमात्मक निष्कर्ष** : यदि प्रतिदर्श की इकाइयों का चुनाव निष्पक्ष तरीके से नहीं किया गया तो भ्रमात्मक निष्कर्ष निकाले जा सकते है।

2. **प्रतिनिधि प्रतिदर्श बनाने में कठिनाइयाँ** : प्रतिदर्श अनुसंधान के परिणाम उसी दशा में शुद्ध हो सकते हैं, जबकि प्रतिदर्श समग्र का पूर्ण रूप से प्रतिनिधित्व करता हो। प्रतिनिधि प्रतिदर्श बनाना कठिन होता है।

3. **विशिष्ट ज्ञान की आवश्यकता** : इस अनुसंधान विधि का प्रयोग वही व्यक्ति कर सकता है जो विशिष्ट ज्ञान रखता हो अन्यथा शोधकर्ता भयंकर त्रुटियॉ कर सकता है।

4. **प्रतिचयन की असम्भवता** : कभी– कभी समग्र इतना छोटा होता है कि इसमें प्रतिदर्श बनाना संभव नहीं होता।

5. **प्रतिदर्श तक ही सीमित रहने में कठिनाई** : प्रतिदर्श में चुनी गयी इकाइयों तक ही शोध को सीमित रखना एक कठिन कार्य है, यदि उसमें से कुछ इकाइयों का सहयोग प्राप्त न हो। सामाजिक अनुसंधानों में प्रायः ऐसा होता है कि प्रतिदर्श की अनेक इकाइयॉ आवश्यक जानकारी देने से मना कर देती है।

प्रतिदर्श अनुसंधान की जो भी सीमाएं हो, उनके कारण उसकी उपयोगिता पर संदेह नहीं किया जा सकता। आवश्यकता इस बात की है कि प्रतिदर्श का चयन सावधानी से किया जाय।

5.6 बोध–प्रश्न

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें :–

1. जनसंख्या का यह भाग जो प्रतिनिधिक होता है......... कहा जाता है।

2. प्रतिदर्श को पूर्ण रूप से समग्र का .... करना चाहिए।

3. जहाँ समग्र इकाइयों की चुनने की समान अक्सर हो वह .... प्रतिचयन कहलाता है।

4. टिप्पेट की दैव सारणी में चार–चार अंक वाले .... समूह हैं।

5. स्तरित दैव निदर्शन विधि .... में से एक है।

सत्य एवं असत्य कथन छाटिएँ :–

1. उचित निष्कर्ष निकालने के लिए प्रतिदर्श में अभिनति का होना आवश्यक है।

2. दैव–प्रतिचयन दो प्रकार के हो है सरल एवं प्रतिबंधित।

3. प्रतिबंधित दैव निदर्शन विधि में प्रतिबंध लगाने की आवश्यकता नही होती है।

4. ढ़ोल घुमाकर निदर्शन निकालने की विधि गैर–दैव निदर्शन विधि है।

5. गैर–दैव–निदर्शन विधियाँ सरल व मितव्ययी होती है।

5.7 बोध–प्रश्नों के उत्तर

खाली स्थान वाले प्रश्नों के उत्तर :–

1. निदर्शन, 2. प्रतिनिधित्व, 3. दैव, 4. 10400, 5. दैव निदर्शन विधियों

सत्य एवं असत्य वाले प्रश्नों के उत्तर :–

1. असत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. असत्य, 5. सत्य।

5.8 स्वपरख प्रश्न

1. सांख्यिकीय प्रतिचयन (प्रतिदर्श) क्या है? सांख्यिकीय प्रतिचयन की विभिन्न रीतियों का विवरण दीजिए।
2. दैव तथा सविचार प्रतिदर्शो में अन्तर कीजिए।
3. समग्र और प्रतिदर्श में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
4. प्रतिदर्श के लाभ एवं दोषों का उल्लेख कीजिए।

/ / / /

इकाई 06 अनुमापन एवं समंक विश्लेषण

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप में निम्न के लिए समझ विकसित हो जायेगी।

- शोध में मापन की भूमिका
- मापन की तकनीकें या मापन पैमाने
- लिकर्ट की अभिवृत्ति मापनी के बारे में
- मापनी के कौन–कौन से आयाम है तथा
- एक उचित अभिवृत्ति मापनी का चयन कैसे किया जाता है।

6.1 शोध में मापन और अनुमापन (Measurement and Scaling in Research)

कोई भी विज्ञान कितनी भी उन्नति कर चुका हो, इसका अनुमान इसी बात से लगाया जा सकता है कि उस विषय से सम्बन्धित अध्ययनों के लिए परिशुद्ध एवं सही माप करने की क्षमता का विकास कितना हुआ है? सामाजिक विज्ञानों में वो भी वाणिज्य जैसे विषयों में उपभोकतओं की प्राथमिकताएं, मनोवृत्ति, पसंद, नापसंद, विचार आदि अमूर्त व गुणात्मक घटनाओं को मापना पड़ता है और इनका प्रत्यक्ष व सही माप संभव नहीं है। भौतिक बस्तुओं का भार, लम्बाई आदि ज्ञात करना सरल है, परन्तु उपभोक्ताओं का उत्पाद के प्रति मनः स्थिति का मापना बहुत कठिन है। क्योंकि इनकी प्रकृति गुणात्मक है। अतः गुणात्मक होने के कारण उनका निष्पक्ष एवं गणनात्मक माप बहुत कठिन है।

माप का विचार विशेष रूप से प्रगतिशील मनुष्य से संबंधित रहा है। माप द्वारा मनुष्य के अभिप्रेरण (Motivation) इन्द्रियग्राह्ता (Perception) प्रवृत्ति (Aptitude), तथा प्राथमिकताओं (Preference) को मापा जा सकता है।

<u>आर0एल0 एकौफ (**R.L. Ackof**)</u> के अनुसार ''माप (Measurement) ऐसी विधि है जिसमें वस्तुओं (Objects) घटनाओं (Events) तथा चरणों (Steps) की विशेषताओं को चिन्हों (Symbols) द्वारा दर्शाया जाता है, इन चिन्हों का आपस में वही सम्बन्ध होता है जो कि वस्तुओं का, जिनका ये प्रतिनिधित्व करते है।''

सी0डब्ल्यू0 चर्चमेन (C.W. Churehman) के अनुसार ''माप वे सूचनाएं है जिनका उपयोग विभिन्न स्थानों व समयों पर किया जाता है।'' अतः माप के द्वारा हम संख्याओं तथा किसी विषय या क्रियाओं के बीच सम्बन्ध पता लगाने का प्रयत्न करते है। यहाँ पर यह ध्यान रखने योग्य है कि संख्याओं व क्रियाओं के बीच का बिल्कुल सही पता लगाना, बहुत ही कठिन है। इसी सम्बन्ध के नियम का निर्धारण ही अनुमापन (Scale) कहलाता है।

अनुमान एक विधि है जिसके द्वारा वस्तुओं का माप किया जाता है, जैसे ऊँचाई व लम्बाई नापने के लिए मीटर, भार नापने के लिए किलो लीटर, मात्रा नापने के लिए घन मीटर आदि। अतः माप का अर्थ एक भली प्रकार परिभाषित अनुमापन, जिसमें शून्य से लेकर नियमित इकाइयों के माप की व्यवस्था हो, से लिया जाता है। परन्तु मानवीकी विषयों में शोधकर्ता को कम सूचना या अपूर्ण अनुमापन से काम चलाना पड़ता है।

समंकों में मात्रात्मक चर जैसे मूल्य, आय–व्यय क्रय–विक्रय आदि और गुणात्मक चर जैसे ज्ञान, प्रदर्शन, सुन्दरता, प्रसन्नता, चरित्र आदि शामिल होते है। गुणात्मक चरों का विश्लेषण करने के लिए उसे संख्यात्मक रूप में परिवर्तित करना आवश्यक होता है। यह मापन (Measurement) और अनुमापन (Scale) तकनीकों के माध्यम से

संभव है। सर्वेक्षण आधारित शोध की एक सामान्य विशेषता यह है कि उत्तरदाता की भावनाओं, दृष्टिकोणों, विचारों आदि को किसी मापन योग्य रूप में रखा जाए। उदाहरणार्थ– एक बैंक प्रबन्धक को बैंक द्वारा प्रदान की जाने वाली, सेवाओं के बारे में ग्राहकों की राय जानने में रूचि हो सकती है। इसी तरह प्रयागराज शहर में आन लाइन बिक्री करने वाली फास्ट फूड कम्पनी उनके द्वारा प्रदान की जाने वाली गुणवत्ता और सेवा का आकलन करने में रूचि ले सकती है। एक शोधकर्ता के रूप में लखनऊ मेट्रो रेल की सरकारी घोषणा के प्रति लोगों के रवैये को जानने में रूचि हो सकती है। इस इकाई में हम माप से संबंधित मुद्दों, माप के विभिन्न स्तरों या तकनीकों, विभिनन प्रकार के अनुमानों तकनीकों और एक उपयुक्त अभिवृत्ति अनुमाप तकनीक के चयन पर चर्चा करेंगे। आइये आगे बढ़ने से पहले, निम्नलिखित दो शब्दों को समझना आवश्यक है–

अ. मापन (Measurement)

ब. अनुमापन (Scaling)

अ. **मापन (Measurement)** : मापन उन अवलोकनों को देखने और रिकार्ड करने की प्रक्रिया है जो अनुसंधान के हिस्से के रूप में एकत्र किये जाते है। अवलोकनों का रिकार्ड कुक्ष निर्धारित नियमों के अनुसार वस्तुओं की विशेषताओं के लिए संख्याओं या अन्य प्रतीकों के सन्दर्भ में हो सकता है। उत्तरदाता की विशेषताएँ, दृष्टिकोण, राय, विचार आदि जैसी विशेषताएँ हो सकती है। जैसे–आप पुरूष के लिए '1' और महिला उत्तरदाता के लिए '2' निर्दिष्ट कर सकते है। इस सवाल के जबाव में कि क्या वह किसी भी प्रकार के भुगतान के लिए डेविट कार्ड का उपयोग कर रहा है। प्रतिवादी (उत्तरदाता) 'हाँ' या 'नहीं' कह सकता है। आप 'हाँ' प्रतिक्रिया के लिए संख्या '1' चिन्ह प्रदान करना चाह सकते हैं तथा 'नहीं' प्रतिक्रिया के लिए संख्या '2'। हम इन विशेषताओं को दो कारणों से संख्याएं प्रदान करते है। सबसे पहले संख्याएं प्राप्त ऑकड़ों के आगे सांख्यिकीय विश्लेषण की सुविधा प्रदान करती है और दूसरा संख्याएं माप नियमों और परिणामों के संचार की सुविधा प्रदान करती है। माप का सबसे महत्वपूर्ण पहलू विशेषताओं के लिए संख्या निर्दिष्ट करने के लिए नियमों का विनिर्देश है। संख्या निर्धारित करने के नियमों को मानवीकृत किया जाना चाहिए और समान रूप से लागू किया जाना चाहिए। यह समय और वस्तुओं के साथ नहीं बदलना चाहिए।

ब. **अनुमापन (Scaling)** :

अनुमापन एक नियम के अनुसार वस्तुओं को संख्याओं या शब्दार्थो को सौपना है। अनुमाप में जो सामग्री होती है वह एक लेखन कथन के रूप में होता है आम तौर पर आदत, राय या भावना के कथन। उदाहरण के लिए किसी ''शाखा द्वारा प्रदान की जाने वाली सेवा की संतोषजनक गुणवत्ता के लिए समझौता'' विशेषता के अनुसार बैंक अपने ग्राहकों से पता लगाने वाले पैमाने पर विचार करें। इसके लिए प्रत्येक उत्तरदाता से साक्षात्कार लिया जाता है। उत्तरदाता से जो प्रतिक्रिया प्राप्त होती है, वह शब्दावली के रूप में पूरी तरह से सहमत, कुछ हद तक सहमत' या कुछ हद तक असहमत के रूप में हो सकती है। हम प्रत्येक प्रतिक्रिया को एक संख्या भी निर्दिष्ट कर सकते हैं जैसे हम '1' को दृढता से सहमत '2' को असहमत तथा तीन '3' को दृढता के साथ असहमत। इसलिए प्रत्येक उत्तरदाता 1, 2 तथा 3 या 4 को चिन्हित कर सकता है।

6.2 मापन के स्तर :

मापन की तकनीकें या मापन पैमाने या स्तर सभी एक ही अर्थो में प्रयुक्त होने वाले अलग–अलग शब्दावली है। माप का स्तर इन मूल्यों के बीच संबंध को सन्दर्भित करता है जो एक चर के लिए विशेषताओं,

भावनाओं या विचारों को चिन्हित करता है। जैसे—'चर' क्या जंक फूड का स्वाद अच्छा है, ये कई गुण है, अर्थात् बहुत अच्छा, न अच्छा और न ही बुरा—बुरा और बहुत बुरा। इस चर के परिणामों का विश्लेषण करने के उद्देश्य से हम क्रमशः 1,2,3,4, और 5 को पाँच विशेषताओं के लिए मान निर्दिष्ट कर सकते है। माप का स्तर इन पाँच मूल्यों के बीच संबंध का वर्णन करता है। विशेषताओं के आधार पर निर्दिष्ट मूल्य समंक और सांख्यिकी विश्लेषण के लिए शोधकर्ता आगे के शोध के लिए ज्यादा से ज्यादा क्षेत्र उपलब्ध कराते है।

<u>गिलफोर्ड के अनुसार,</u> ''मापन वस्तुओं या घटनाओं का तर्कपूर्ण ढंग से संख्या प्रदान करने की क्रिया है''।

आम तौर पर पैमाने के चार स्तर होते हैं या ये कहे कि संख्या निर्दिष्ट (Assigning) करने के चार तकनीके होते है—

क). नाम मात्र अनुमापन (Nominal Scale)
ख). क्रम सूचक अनुमापन (Ordinal Scale)
ग). अन्तराल अनुमापन (Internal Scale)
घ). अनुपात अनुमापन (Ratio Scale)

क). नाम मात्र अनुमापन (Nominal Scale) :

इस प्रकार के अनुमापन से वस्तुओं, विशेषताओं अथवा घटनाओं को पहचानने के लिए एक संख्या दे दी जाती है। यह पैमाना सबसे कच्चा और सबसे सरल पैमाना है। नाममात्र का पैमाना चर के बीच कोई मूल्य या संबंध व्यक्त नहीं करता है। उदाहरण के लिए पुरूषों को '1' और महिलाओं को '2' के रूप में लेबिल या टैग लगा देना। नामपात्र के पैमाने को अक्सर श्रेणीबद्ध पैमाने के रूप में भी जाना जाता है। निर्दिष्ट संख्याओं में कोई अंकगणितीय गुण नहीं होते हैं और वो मात्र लेबिल के रूप में कार्य करते है। इसमें एक मात्र सांख्यिकी रीति का उपयोग होता है और वह है बारंबारता की गणना अर्थात् बहुलक।

ख). क्रम सूचक अनुमापन (Ordinal Scale) :

इसे क्रमानुसार अनुमापन भी कहा जाता है। इस अनुमापन का प्रयोग करके तत्वों की एक ही दिशा के अनुसार भिन्नता बताई जा सकती है, उदाहरणार्थ— साड़ियाँ कितने समय तक, प्रयोग करने पर चल सकती है इस दृष्टिकोण से विभिन्न ब्रांडों की साड़ियों को क्रमानुसार व्यवस्थित करना जैसे—

1. सबसे अधिक समय तक चलने वाली साड़ी
2. सबसे कम समय तक चलने वाली साड़ी
3. उससे कम समय तक चलने वाली साड़ी आदि

दो ब्राण्डों की साड़ियों के टिकाउपन में कितना अन्तर है यह पता नहीं होता। क्रमसूचक अनुमापन के नाममात्र अनुमापन की सभी सूचनाएँ होती है।

ग). अन्तराल अनुमापन (Internal Scale) :

अन्तराल अनुमापन में माप की नियमित इकाइयाँ होती है। इसके शून्य बिन्दु अपनी इच्छा से तय किया जा सकता है। इसके अनुमाप का सबसे अच्छा उदाहरण गर्मी नापने का सेन्टीग्रेड, या फारेनहाइट, थर्मामीटर। इस मापक में एक निश्चित बिन्दु को शून्य मान लिया जाता है, और थर्मामीटर में जो तरल पदार्थ (पारा) प्रयोग में लाया जाता है, उसके ताप के बढ़ने के साथ—साथ बराबर की मात्रा में बढने पर बिन्दु अंकित कर दिये जाते है। साधारण सांख्यिकी मापों जैसे अंकगणित प्रमाप (Airthmetic

Measurement), पमाप विचलन (Standerd Division) सह सम्बन्ध (Corelation), गुणंक (Coefficient) आदि की गणना के लिए अन्तराल अनुमापन की ही आवश्यकता पड़ती है। कुछ सांख्यिकीय गणनाओं में जैसे– गुणोत्तर माध्य (Geomatric Mean), परिवर्तनीय गुणन (Co-efficient of Variation) यदि अन्तराल अनुमापन का प्रयोग किया जाये तो परिणाम त्रुटिपूर्ण आएँगें।

घ). अनुपात अनुमापन (**Ratio Scale**) :

अनुमापन का यह माप सर्वोत्तर माप माना जाता है तथा गणित की सभी गणनाऍं अनुपात अनुमापन द्वारा ही की जा सकती है। इसमें निश्चित शून्य बिन्दु होता है और भौतिक विज्ञान में इस अनुमापन का प्रयोग किया जाता है, जैसे–लम्बाई, भार आदि नापने के अनुमापन। अनुपात अनुमापन मूल्यों के अनुपातों में तथा जिन वस्तुओं अथवा गुणों को मापा जा सकता है, उनके मूल्यों के अनुपातों में समता होती है।

अनुपात अनुमापन की विशेषताओं के संबंध में यह कहा जा सकता है कि जैसे 3 किग्रा, 1 किग्रा का तीन गुना है। यदि यह इसी को केवल ग्राम में परिवर्तन कर दें, तो हम यह कह सकते है कि 3000 ग्राम, 1000 ग्राम के उसी अनुपात में है (अर्थात् 3:1)।

इसमें एक अनुपामन से दूसरे अनुमापन में केवल गुणात्मक आधार का प्रयोग करके बदला जा सकता है और यही किया जाता है जबकि रूपये से पैसे तथा मीटर से सेन्टीमीटर अथवा किलोग्राम से ग्राम में परिवर्तन करते है। अनुपात अनुमापन में वर्ग समता (Class Equity) तथा भिन्नता की समता (Equality of Difference) पाई जाती है। सांख्यिकी की सभी सामान्य गणनाएँ अनुपात अनुमापन द्वारा की जा सकती है।

6.3 मापन की तकनीकें / मापन पैमाने :

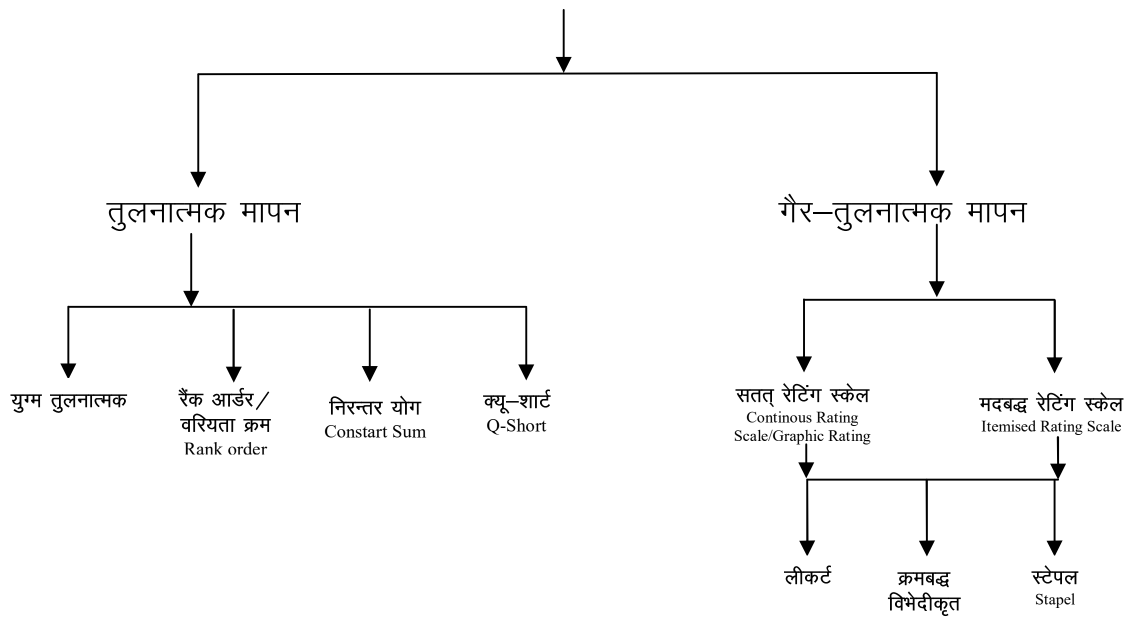
शोध में विभिन्न प्रकार की मापन की तकनीकों का प्रयोग किया जा सकता है। इनका वर्गीकरण दो प्रमुख आधारों पर किया जा सकता है–

क. तुलनात्मक मापन (Comparative Scale)

ख. गैर तुलनात्मक मापन (Non-Comparative Scale)

तुलनात्मक मापन में, उत्तरदाता को एक वस्तु की दूसरी वस्तु से तुलना करने के लिए कहा जाता है। उदाहरण के लिए शोधकर्ता उत्तरदाताओं से पूछ सकता है कि क्या वे रेफ्रिजेरटर का ब्रांड A या ब्रांड B पसंद करते है? दूसरी ओर गैर तुलनात्मक मापन में उत्तरदाताओं को केवल एक ही वस्तु का मूल्यांकन करने की आवश्यकता होती है। उनका मूल्यांकन उस अन्य वस्तु से स्वतंत्र है, जिसका शोधकर्ता अध्ययन कर रहा है। एक गैर–तुलनात्मक पैमाने का उपयोग करके उत्तरदाताओं को जो भी श्रेणी मापन उपयुक्त लगता है उसे वे लागू करते है। गैर तुलनात्मक तकनीकों में निरंतर और मदबद्ध श्रेणी मापन शामिल है, चित्र 6.1 इन मापन तकनीकों के वर्गीकरण को दर्शाता है।

चित्र 6.1मापन तकनीके



6.3.1 तुलनात्मक मापनी मापन की तकनीके **Comparatove Scales** :

तुलनात्मक मापनी को निम्नलिखित चार भागों में विभक्त किया जा सकता हैः (क) युग्म तुलनात्मक मापन, (ख) रैंक आर्डर या वरियता क्रम, (ग) निरंतर योग (घ) क्यू–सार्ट मापन।

(क). युग्म तुलनात्मक मापन :

इस विधि का विकास सन् 1927 में थर्स्टन ने किया था। इन्होंने युग्म रूप से कुछ कथनों की सूची बनाई जिसमें उत्तरदाता से कहा जाता है कि वह यह बताए कि प्रत्येक जोड़ (यागुम) में दिये गये कथनों में से उसकी सहमति किसके साथ है तथा किस कथन के साथ उसकी असहमति है। इस प्रविधि में प्रत्येक कथन का अन्य सभी कथनों के साथ जोड़ा बनाया जाता है, और जोड़े के संबंध में उसकी सहमति–असहमति पूछी जाती है। दूसरे शब्दों में एक उत्तरदाता को एक समय में दो वस्तुएं दी जाती है, और उससे एक वस्तु को चुनने के लिए कहा जाता है। (मानदण्ड के अनुसार चुनाव) प्राप्त समंक की प्रकृति क्रमिक है। उदाहरण के लिए कोल्ड ड्रिंक्स के चार प्रकार लिये गये हैं– कोक, पेप्सी, स्प्राईट और लिम्का। उत्तरदाता पेप्सी को कोक या कोक से स्प्राईट आदि पसंद कर सकते है।

कोक – पेप्सी
कोक – स्प्राइट
कोक – लिम्का
पेप्सी – स्प्राइट
पेप्सी – लिम्का
स्प्राइट – लिम्का

सामान्य तौर पर n ब्रांडो के साथ हमारे पास $n(n-1)/2$ युग्मित तुलना निर्णय होंगें। युग्मित तुलनाओं का उपयोग करने पर निम्नलिखित संमेंकों को प्राप्त किया गया–

सारणी 6.1

ब्राण्ड	कोक	पेप्सी	स्प्राइट	लिम्का
कोक	–	√		
पेप्सी		–		
स्प्राइट	√	√	–	
लिम्का	√	√	–	
पंसदीदा बार की संख्या/ बारंबारता	2	3	1	0

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट हो रहा है कि √ चिन्ह का अर्थ है कि उस कालम के ब्राण्ड को संबंधित पक्ति में दिये गये ब्राण्ड पर पसंद किया गया है। कोक व पेप्सी में कोक को वरियता नहीं मिली। कोक तथा स्प्राइट में कोक को पुनः कोक लिम्का में कोक को वरियता (पसंद) किया गया। इसी तरह पेप्सी कोक में पेप्सी को, पेप्सी स्प्राइट में पेप्सी को तथा पेप्सी एवं लिम्का में पेप्सी को पसंद किया गया है। यदि लिम्का की बात की जाय तो लिम्का का कोक, पेप्सी तथा स्प्राइट की तुलना में कोई पसंद नहीं किया है। कोक को पसंद किये जाने की संख्या 2 गुनी थी। इसी तरह पेप्सी को 3 गुना पसंद किया गया। इस प्रकार, किसी ब्रांण्ड को जितनी बार पसंद किया गया, प्रत्येक कालम में पसंद के चिन्ह (√) को जोड़कर प्राप्त किया जाता है।

निम्न सारणी शीतल पेय के चारों ब्रॉड के प्राप्त ऑकड़े (अनुमानित) की युग्मित तुलना देती है–

सारणी 6.2

ब्राण्ड	कोक	पेप्सी	स्प्राइट	लिम्का
कोक	–	0.90	0.64	0.14
पेप्सी	0.10	–	0.32	0.02
स्प्राइट	0.36	0.68	–	0.15
लिम्का	0.86	0.98	0.85	–

बाक्स में प्रविष्टियाँ 'कालम ब्रॉंड' और 'पंक्ति ब्रॉंड' को प्राथमिकता देने वाले उत्तरदाताओं के अनुपात का प्रतिनिधित्व करती है। उदाहरण के लिए 90% पेप्सी को पसंद करते है तो 10% कोक को पसंद करते हैं, इसी तरह अन्य।

जब ब्रांण्डों की संख्या सीमित होती है तो युग्म तुलनात्मक मापन उपयोगी होती है, क्योंकि इसके लिए प्रत्यक्ष तुलना और खुले विकल्प की आवश्यकता होती है। युग्मित तुलना पैमाने के दोषों में से एक यह है कि पारगमनशीलता की घारणा (Voilation of the sssemption of transitivity) का उलंघन हो सकता है। सारणी 6.1 में उत्तरदाता ने कोक को 2 बार, पेप्सी को 3 बार, स्प्राइट को 1 बार तथा लिम्का को 0 बार पसंद किया। यानी वरियता बार, पेप्सी > कोक, कोक > स्प्राइट और स्प्राइट > लिम्का। हालांकि जितनी बार स्प्राइट को प्राथमिकता दी गयी वह कोक की संख्या नहीं होनी चाहिए। दूसरे शब्दों में, यदि A>B और B > C तो C>A संभव नहीं होना

चाहिए, साथ ही जिस क्रम में वस्तुओं को प्रयुक्त किया जाता है, वह परिणामों को पूर्वाग्रहित कर सकता है। तुलना के लिए मदों ब्रांडो की संख्या बहुत अधिक नहीं होनी चाहिए। जैसे–जैसे वस्तुओं की संख्या बढ़ती है, तुलनाओं की संख्या ज्यामितीय रूप से बढ़ती है। यदि तुलनाओं की संख्या बहुत अधिक है तो उत्तरदाता थके हुए हो सकते है और उनके बीच सावधानीपूर्वक भेदभाव करने में सक्षम नहीं होंगे। यूग्मित तुलना की अन्य सीमा यह है कि इस पैमाने का बाजार की स्थिति से बहुत कम समानता है, जिसमें कई विकल्पों में से चयन शामिल है। साथ ही, उत्तरदाता एक वस्तु को कुछ अन्य दर पसंद कर सकते है। लेकिन वे इसे पूर्ण अर्थ में पसंद नहीं कर सकते है।

ख. वरीयता आदेश (**Rank Order**) पैमाना :

यह एक अन्य प्रकार की तुलनात्मक तकनीक है जिसमें उत्तरदाताओं को एक साथ कई वस्तुओं के साथ प्रस्तुत किया जाता है और उन्हें प्राथमिकता में क्रम वरीयता देने के लिए कहा जाता है। यह एक क्रमिक पैमाना है जो अनुकूल और प्रतिकूल के परिस्थितियों का वर्णन करता है। लेकिन वस्तुओं की दूरी को प्रकट नहीं करता है। उदाहरण के लिए, यदि आप, कोल्ड ड्रिंक के कुछ चुनिन्दा ब्रांडो की वरीयता श्रेणी में रूचि रखते हैं, तो आप प्रतिक्रियाओं को उल्लिखित Record करने के लिए निम्न प्रारूप का उपयोग कर सकते है।

सारणी 6.3

वरीयता आदेश पैमाने के अन्तर्गत कोल्ड ड्रिंक ब्रांडो की वरीयता

निर्देश :

शीतल पेय के निम्नलिखित ब्रांड़ों को वरीयता के क्रम में क्रमबद्ध करें। अपनी पसंद का एक ब्रांड चुनकर शुरूआत करें और उसे नंबर '1' दे, फिर दूसरा सबसे पसंदीदा ब्रांड चुने और उसे नम्बर '2' दे इस प्रक्रिया को क्रमशः अंतिम ब्रांड तक जारी रखे।

प्रारूप

ब्राण्ड	श्रेणी
कोक	3
पेप्सी	1
लिम्का	2
स्प्राइट	4

युग्मित तुलना की तरह वरीयता आदेश पैमाना भी तुलनात्मक प्रकृति की ही तरह है। इस पैमाने में परिणामी संमंक क्रमिक समंक है। प्रतिक्रियाओं को प्राप्त करने में यह विधि अधिक यथार्थवादी है और यह वेहतर परिणाम देती है। जब दी गयी वस्तुओं के बीच प्रत्यक्ष तुलना की आवश्यकता होती है। इस तकनीक का प्रमुख दोष यह है कि केवल क्रमिक समंक प्राप्त किये जा सकते है।

ग. लगातार योग पैमाना (**Constant Sum Scale**)– इस पैमाने में उतरदाताओं को कुछ मानदण्ड के संबंध में उद्दीपक (Stimulus) वस्तुओं के एक समूह (Set) के बीच अंक, रूपये या चिप्स जैसी इकाइयों की एक निरंतर राशि आवंटित करने के लिए कहा जाता है। उदाहरण के लिए आप यह निर्धारित करना चाह

सकते है कि उपभोक्ताओं के लिए कीमत, सुगंध, पैकेजिंग, सफाई, शक्ति और डिटर्जेण्ट के झाग के गुण कितने महत्वपूर्ण है। उत्तरदाताओं को निम्नलिखित प्रारूप का उपयोग करके विशेषताओं के सापेक्ष महत्व को इंगित करने के लिए एक स्थिर राशि को विभाजित करने के लिए कहा जा सकता है।

सारणी 6.4
स्थिर योग/लगातार योग पैमाने का उपयोग
(डिटर्जेण्ट गुणों के लिए)

निर्देश :

डिटर्जेण्ट की विशेषताओं के बीच 100 अंक आवंटित करें। ताकि आपका आवंटन प्रत्येक विशेषता (गुणों) से जुड़े सापेक्ष महत्व को दर्शाता हो। एक गुण को जितने अधिक अंक मिलते हैं वह गुण उतना ही महत्वपूर्ण गुण है। यदि कोई गुण महत्व का नहीं है तो वहाँ '0' लिखा जाय। यदि कोई गुण किसी अन्य गुणों से दो गुनी महत्त्वपूर्ण है तो उसे दो गुना अधिक अंक प्राप्त करनी चाहिए।

प्रारूप

क्र.सं.	गुण **Attributes**	विन्दुओं की संख्या (**No of points**)
1.	मूल्य	50
2.	सुगन्ध	05
3.	पैकेजिंग	10
4.	सफाई शक्ति	30
5.	झांग	05
	कुल मांग	100

यदि किसी गुण को अधिक अंक दिये गये है, तो यह इंगित करता है कि वह सबसे अधिक महत्वपूर्ण है जैसा उपरोक्त सारणी में डिटर्जेण्ट के लिए कीमत। उसके बाद सफाई शक्ति, पैकेजिंग और झाग को कम ध्यान में रखा गया है। इस तकनीक का लाभ समय बचत है। हॉलांकि दो मुख्य दोष है– प्रथम–उत्तरदाता निर्दिष्ट बिन्दुओं की तुलना में अधिक या कम अंक आवंटित कर सकते है। दूसरी समस्या त्रुटि को पूर्ण करने की है, यदि बहुत कम गुणों का उपयोग किया जाता है या बड़ी संख्या में गुणों का उपयोग किया जाता है तो दोनो दशाओं में उत्तरदाता भ्रमित और थकान में हो सकता है।

अ. क्यू–सार्ट पैमाना (Q-Sort Scale) :

कुछ मानक के साथ समानता के आधार पर वस्तुओं को क्रमबद्ध करने के लिए वरीयता आदेश Rank Order प्रक्रिया का उपयोग क्यू–सार्ट पैमाना में किया जाता है। इस पद्धति की महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि विभिन्न उत्तरदाताओं के बीच प्रतिक्रियाओं की तुलना में उत्तरदाताओं की विभिन्न प्रतिक्रियाओं के बीच तुलना करना अधिक महत्वपूर्ण है। इसलिए यह निरपेक्ष रेटिंक पैमाने के बजाय मापन का एक तुलनात्मक तरीका है। इस पद्धति में उत्तरदाताओं को किसी उत्पाद की विशेषताओं (गुणों) या किसी उत्पाद की बड़ी संख्या में ब्रांडों का वर्णन करने के लिए बड़ी संख्या में कथन दिये जाते है। उदाहरण के लिए आप बड़ी संख्या में पत्रिकाओं में से वरीयता निर्धारित करना चाहते है। सारणी 6.5 में दिखाया गया है।

सारणी 6.5

क्यू–सार्ट पैमाना प्रक्रिया का उपयोग करने वाली पत्रिकाओं की वरीयता

निर्देश :

आपको दिये गये बैग में 90 पत्रिकओं के चित्र है। कृपया 10 पत्रिकाएं चुने, जिन्हें आप सबसे अधिक पसंद करते है। 20 पत्रिकाएं जिन्हे आप 'पसंद करते है' 30 पत्रिकाएँ जिनसे आप 'तटस्थ' है (न तो पसंद करते है और न ही नापसंद), 20 पत्रिकाएॅ जिन्हें आप नापसंद करते हैं और 10 पत्रिकाएं जिन्हें आप सबसे कम पसंद करते है। कृप्या क्रमबद्ध पत्रिका नामों को संबंधित में सूचीबद्ध करे। आपको प्रदान किये गये फार्म के कालम है।

प्रारूप

अधिक पसंद	कम	तटस्थ	नापसंद	सबसे कम पसंद
(10)	(20)	(30)	(20)	(10)

ध्यान दे कि सार्ट किये जाने वाले उत्तरों की संख्या 60 से कम या 140 से अधिक नहीं होनी चाहिए। एक उचित श्रेणी में 60 से 90 प्रतिक्रियाएं होती है, जिसके परिणाम स्वरूप सामान्य या अर्द्ध सामान्य वितरण होता है। युग्मित तुलना तकनीक की तुलना में यह विधि तेज और कम थकाऊ है। यह विषय को पैमाने के प्रत्येक बिन्दु पर कोटा के अनुरूप होने के लिए भी मजबूर करता है ताकि एक अर्द्ध सामान्य वितरण प्राप्त किया जा सके। विपणन अनुसंधान में क्यू प्रकार की उपयोगिता ऐसे व्यक्तियों के समूहों को प्राप्त करना है जो समान प्राथमिकताएं प्रदर्शित करते है। इस प्रकार अद्वितीय (Unique) बाजार खण्डों का प्रतिनिधित्व करते हैं।

6.3.2 गैर तुलनात्मक पैमाने (Non-Comparative Seales) :

ये पैमाने बहुत ही सरल और अत्यधिक उपयोगी हैं, इन्हें दो भागों में विभाजित करके अध्ययन किया जा सकता है :–

अ. सतत् रेटिंग स्केल (Continuous Rating Scale)

ब. मदबद्ध रेटिग पैमाने (Intemised Rating Scale)

अ. सतत् रेटिंग स्केल (Continuous Rating Scale) : यह पैमाना बहुत ही सरल और अत्यधिक उपयोगी है। निरंतर श्रेणी पैमाने में, उत्तरदाता एक सत्त रेखा पर उपयुक्त स्थिति पर एक निशान लगाकर वस्तुओं को श्रेणी प्रदान करता है जो निर्धारित चर के एक चरम से दूसरे चरम तक चलता है। निरन्तर श्रेणी पैमाने के उदाहरण नीचे दिये गये है :

प्रश्न : आप टी0वी0 को खरीदने के लिए एक विज्ञापन को एक पथ–प्रदर्शक के रूप में कैसे आँकेंगे?

स्केट टाइप A

दृढ़ता पूर्वक सहमत — दृढ़ता पूर्वक असहमत

स्केट टाइप B

दृढ़ता पूर्वक सहमत — दृढ़ता पूर्वक असहमत

स्केट टाइप C

दृढ़ता पूर्वक सहमत | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | दृढ़ता पूर्वक असहमत

स्केट टाइप D

दृढ़ता पूर्वक असहमत | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | दृढ़ता पूर्वक सहमत

जब पैमाना A और B का उपयोग किया जाता है, तो उत्तरदाताओं का स्कोर या तो रेखा को वांछित के रूप में कई श्रेणियों में विभाजित करके और उत्तरदाता को उस श्रेणी के आधार पर एक अंक प्रदान करके निर्धारित किया जाता है, जिसमें उसका निशान पड़ता है, या दूरी को मिलीमीटर में मापकर निर्धारित किया जाता है। परिणामों का सामान्य रूप से अन्तराल मापन के रूप में विश्लेषण किया जाता है।

ब. **मदबद्ध वरीयता पैमाने (Itemised Rating Scales)** : इस विधि में प्रत्येक वर्ग या समूह के साथ संख्याएं अथवा व्याख्याएँ (कथन) जुड़े होते है। समूह या वर्ग पैमाने की स्थिति में जमे होते है। उत्तरदाता को किसी एक वर्ग या समूह को चुनने के लिए कहा जाता है जो उत्पाद के गुणधर्मो को पूर्णतः परिभाषित करता हो। इस विधि का प्रयोग विपणन अनुसंधान में व्यापक रूप से किया जाता है। इकाई वरीयता पैमाना निम्न प्रारूप में हो सकते है। (1) रेखित प्रारूप में, (2) लिखित प्रारूप में तथा (3) संख्याओं के रूप में।

तीनों का उदाहरण निम्न है–

रैखिक	लिखित	संख्यात्मक
 अनुकूल  तटस्थ  विपरीत	पूर्णतया संतुष्ट संतुष्ट न संतुष्ट न असंतुष्ट कुछ असंतुष्ट पूर्णतया असंतुष्ट	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 – 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10

कुछ वरीयता पैमाने में दो ही वर्ग होते है। सहमत तथा असहमत। जितना अधिक वर्ग होता है, उसमें उतना ही लोचशीलता पाया जाता है। एक प्रश्न– आप अपने शहर में स्थित माल में कितनी बार जाते है?

कभी नहीं बमुश्किल कभी–कभी अक्सर बार–बार

उपरोक्त प्रश्न से स्पष्ट है कि अधिक वस्तुनिष्ठता उपयुक्त जानकारी प्राप्त करने में सहायक है। इस पैमाने में शब्दों का महत्वपूर्ण उपयोग होता है।

इसमें तीन प्रकार के वरीयता पैमानों का व्याख्या निम्नलिखित है–

(अ). लिकर्ट स्केल,

(ब). अर्थ विभेदक पैमाना,

(स). स्टेपल पैमाना

नोट – अलग से लिकर्ट पैमाने का व्याख्या इसी अध्याय में किया जा चुका है।

(ब). अर्थ विभेदक पैमाना–

यह एक सात अंकों का वरीयता पैमाना है जिसका अंतिम वाक्य प्रथम वाक्य के विपरीत अर्थ रखता है। जैसे– अच्छा तथा बुरा, कठिन और सरल। यह पैमाना उत्तरदाता के किसी वस्तु अथवा अन्य के प्रति सकारात्मक अथवा नकारात्मक दृष्टिकोण का प्रदर्शन करता है। इस पैमाने को ब्रोड, उत्पाद तथा कम्पनी की छबि तुलना करने हेतु उपयोग लाया जाता है। इसके अतिरिक्त विज्ञापन, विपणन, विधियों एवं नये उत्पाद के विकास में भी इस पैमाने का उपयोग किया जाता है। इसके उदाहरण निम्न है –

सारणी 6.6

नवीन	————	————	————	————	————	————	————	पुराना
अच्छा	————	————	————	————	————	————	————	बुरा
साफ	————	————	————	————	————	————	————	गन्दा
महत्त्वपूर्ण	————	————	————	————	————	————	————	व्यर्थ
महँगा	————	————	————	————	————	————	————	सस्ता
मजबूत	————	————	————	————	————	————	————	कमजोर
तुरन्त	————	————	————	————	————	————	————	धीरे
महँगा	————	————	————	————	————	————	————	सस्ता

अर्थ विभेदक पैमाने में विपरीत अर्थो वाले शब्दों का प्रयोग उपरोक्तानुसार किया जाता है। बीच में रिक्त स्थान होते है। पैमाने के प्रत्येक स्तर पर भार आवंटित किये जाते है। ये भार +3, +2, +1, –1, –2, –3 अथवा 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 व 1 हो सकते है।

निम्नलिखित उदाहरण एक विशेष ब्रांड से संबंधित नहाने वाले साबुन के उपयोग के संबंध में अनुभव किया गया है–

नहाने वाले वाबुन **X** ब्राण्ड के संबंध में प्राप्त अनुभव

	+3	+2	+1	0	–1	–2	–3	
उपयोग	——	——	——	——	——	——	——	अनुपयोग
आकर्षक	————	————	————	————	————	————	————	प्रतिकर्षण
सकारात्मक	————	————	————	————	————	————	————	नकारात्मक
लाभकारी	————	————	————	————	————	————	————	हानिकारक
ठण्डा	————	————	————	————	————	————	————	गर्म
अच्छा	————	————	————	————	————	————	————	बुरा
रूचिकर	————	————	————	————	————	————	————	अरूचिकर

अर्थ विभेदक पैमाने में आप पायेगे कि बॉयें तरफ सामान्यतः सकारात्मक विशेषताएं होती है। इस प्रकार उत्तरदाता यथोचित शब्दों की व्याख्या न होने पर गलती नहीं करता है। उत्तरदाता के प्रत्येक खाने का निरीक्षण किया जाता है उसके बाद भार देकर तुलना हेतु माध्य अंक निकाला जाता है।

स. स्टेपल पैमाना (Stapel) :

यह एक (Unipolar) एक ध्रुवीय (Rating) पैमाना होता है, इसमें 10 संख्याओं की वर्गो का उपयोग किया जाता है, जो– 5 से +5 तक होता है। इस पैमाने में शून्य नहीं होता है। उत्तरदाता श्रेणी प्रदान करते समय उचित संख्या को ही चुनता है। +5 का मतलब उच्च डिग्री अर्थात् आप बहुत ज्यादा प्रसन्न है, वही – 5 का मतलब निम्न डिग्री अर्थात् आप बहुत ज्यादा अप्रसन्न है।

उदाहरण के लिए वाक्यांशों पर विचार करें (i) स्वादिष्ट भोजन, (ii) तीव्र सेवा (Fast serivce) रेस्तरा के लिए अच्छा माहौल। एक उत्तरदाता से यह मूल्यांकन करने के लिए कहा जाता है कि ये शब्द या वाक्यांश किसी निर्दिष्ट रेस्तरा का कितना सटीक वर्णन करते है।

+5	+5	+5
+4	+4	+4
+3	+3	+3
+2	+2	+2
+1	+1	+1
स्वादिष्ट भोजन	तीव्र सेवा	अच्छा माहौल
–1	–1	–1
–2	–2	–2
–3	–3	–3
–4	–4	+4
–5	–5	–5

आपने खाना खाया अच्छा लगा तो +3, +4 यदि बहुत अच्छा लगा तो +5 तक दे सकते है। यदि खाना अच्छा नहीं लगा तो–1 यदि अत्यधिक, खराब लगा तो– 5, तक दे सकते है।

तीव्र सेवा के संदर्भ में यदि रेस्तरा में सेवा अच्छी है तो +3, +4 यदि अधिक अच्छी है तो +5 तक दे सकते है। यदि सेवा की तीव्रता खराब है तो–1 दे सकते है, यदि बहुत तीव्र नहीं है तो –5 दे सकते है।

रेस्तरा के माहौल का भी श्रेणीयन करने के लिए यदि माहौल अच्छा है तो +5 तक दे सकते है, इसी प्रकार यदि खराब माहौल है तो– 1 तथा बहुत खराब है तो– 5 श्रेणी प्रदान किया जा सकता है। स्टेपल पैमाना का गुण दोष अर्थ–विभेदक पैमाने के समान ही है, यह सरलता से सृजित किया जा सकता है।

6.4 लिकर्ट का अभिवृत्ति मापनी (अनुमापन) :

अभिवृत्ति किसी घटना के प्रति व्यक्ति की आंतरिक अनुभूति (Feeling) तथा विश्वास होता है। इसका मापन बड़ा ही कठिन है। अतः शोधकर्ता को प्रश्नावली आदि विधियों द्वारा उसके मत को ज्ञात कर अभिवृत्ति के संबंध में अनुमान लगाना पड़ता है।

सामाजिक अभिवृत्ति के मापन के लिए लीकर्ट अभिवृत्ति मापन पद्धति का उपयोग किया जाता है। जिसका विषद् व्याख्या निम्नलिखित है–

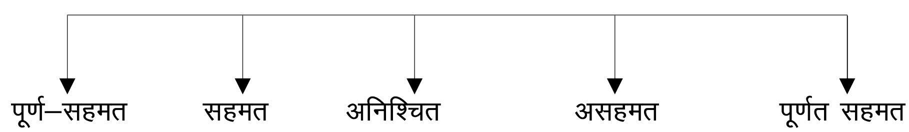
लीकर्ट की अभिवृत्ति मापन पद्धति को निम्नचरणों में विभाजित किया जा सकता है–

1. **कथनों का एकत्रीकरण** : सबसे पहले जिस अभिवृत्ति का मापन करना होता है। उस अभिवृत्ति के संबंध में घनात्मक (अनुकूल) और ऋणात्मक (प्रतिकूल) कथनों को एकत्र किया जाता है। ये कथन (प्रश्न) पुस्तकों, लेखों, पत्रिकाओं तथा विद्वानों से विचार–विमर्श के आधार पर ज्ञात किये जाते है। ये कथन अभिवृत्ति से जितने अधिक संबंधित होंगे उतने अच्छे होंगे। कथनों को सरल संक्षिप्त और स्पष्ट बनाने का प्रयास किया जाता है।

2. **कथनो का संपादन** : जब आप कथनों को एकत्रित कर लेते हैं उसके बाद उस कथनों को सार्थक, स्पष्ट, सरल व संक्षिप्त बनाया जाता है। संपादन में यदि कोई कथन मापी जा रही अभिवृत्ति से संबंधित प्रतीत नहीं होता हो उसे सुधारने का प्रयास किया जाता है और यदि सुधार संभव नहीं हो तो ऐसे प्रश्न को हटा दिया जाता है। मापी जाने वाली अभिवृत्ति के यदि कुछ उपभाग या पक्ष है तो प्रत्येक उपभाग या पक्ष के संबंध में उपयुक्त संख्या में प्रश्न रखे जाते हैं फिर उन्हें प्रत्येक उपभाग या पक्ष के क्रम में क्रमबद्ध किया जाता है।

3. **मापनी का आरंभिक स्वरूप** : प्रश्न (कथन) एकत्रित करने तथा उनके संपादन के बाद सभी प्रश्नों को साफ–साफ क्रमानुसार लिख लिया जाता है और लिखने के पश्चात् प्रत्येक कथन के सामने एक पाँच बिन्दु मापनी भी बनायी जाती है। इस पाँच बिन्दु मापनी की सहायता से एक निश्चित अभिवृत्ति को पाँच भिन्न मात्राओं में मापा जा सकता है। यह पाँच बिन्दु मापनी निम्न प्रकार से होती है–

पाँच बिन्दु मापनी



4. **आरंभिक स्वरूप का प्रशासन** : आरंभिक स्वरूप तैयार होने के बाद 300–400 उत्तरदाताओं के समूह पर इस मापनी का प्रशासन कर समूह के प्रत्येक सदस्य से आरंभिक प्रारूप के कथनों के उत्तर प्राप्त कर लिये जाते है। मापनी के आरंभिक प्रारूप में जितने कथन (प्रश्न) आवश्यक हों उससे दो गुने कथन रखने चाहिए। जिससे कि जब कथनों का चयन पद विश्लेषण के आधार पर किया जाये तब उपयुक्त संख्या में कथनों के चयनों में आसानी हो।
5. **मापनी के आरंभिक प्रारूप पर प्राप्त प्रत्युत्तरों का फलांकन (Scoring)** : फलांकन में यदि कथन धनात्मक (अनूकूल) है तो पूर्णतः सहमत प्रत्युत्तर पर 4 अंक, सहमत प्रत्युत्तर पर 3 अंक, अनिश्चित प्रत्युत्तर को 2 अंक तथा असहमत प्रत्युत्तर को 1 अंक तथा पूर्णतः असहमत प्रत्युत्तर को '0' अंक देते है। इसी प्रकार प्रतिकूल अभिवृत्तियों के लिए ऋणात्मक (प्रतिकूल) कथनों के लिए फलांकन में पूर्णतः असहमत प्रत्युत्तर को 4 अंक, असहमत प्रत्युत्तर को 3 अंक अनिश्चित प्रत्युत्तर को 2 अंक, सहमत प्रत्युत्तर को 1 अंक तथा पूर्णतः सहमत प्रत्युत्तर को '0' अंक दिया जाता है। एक प्रयोज्य को सभी प्रत्युत्तरों को फलांकन कर इस प्रयोज्य का सम्पूर्ण प्राप्तांक प्राप्त कर लेते है। सभी कथनों के प्राप्तांकों को जोड़ने से सम्पूर्ण प्राप्तांक प्राप्त हो जाता है।
6. **पद विश्लेषण और पदों या प्रश्नों का चयन** : जब एक समूह के प्रयोज्यों से अभिवृत्ति मापनी के प्रारूप को भरवाकर प्रत्युत्तर प्राप्त कर लेते है तथा उनका फलांकन कर लेते हैं तब सांख्यिकीय विश्लेषण के आधार पर कथनों का चयन करते है। कथनों के चयन के लिए पद विश्लेषण विधि (Item Analysis) का उपयोग करते है, प्रत्येक कथन का पद विश्लेषण करने के लिए ही मूल्य या विभेदन मूल्य (T-value or Discriminative Value) ज्ञात करते है। अंतिम रूप से किसी कथन का चयन तभी करते है। जब उसका

टी मान 1.75 अथवा इससे अधिक प्राप्त होता है। जिन कथनों का T–मान 1.75 से कम होता है उसे निकाल दिया जाता है। इस प्रकार पद विश्लेषण के आधार पर जो कथन (प्रश्न) चुने जाते है, वहीं अन्तिम रूप से अभिवृत्त मापनी में सम्मिलित किये जाते है।

पद विश्लेषण में ही मूल्य ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम परीक्षण को समूह पर प्रशासित करने से जो प्रत्युत्तर प्राप्त हुए है, इन प्रत्युत्तर के आधार पर प्राप्ताकों का आवृत्ति वितरण बनाया जाता है। इस आवृत्ति वितरण में अधिकतम प्राप्तांक प्राप्त करने वाले 25 प्रतिशत और न्यूनतम प्राप्तांक प्राप्त करने वाले 25 प्रतिशत प्रयोज्यों का चयन करके दो समूह बना लिये जाते हैं उच्च समूह तथा निम्न समूह। फिर प्रत्येक कथन के प्रति दोनों समूहों के प्राप्तांकों में सार्थक अन्तर टी मूल्य के आधार पर करते है। टी–मूल्य ज्ञात करने के सूत्र निम्नलिखित है –

$$t = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$$

जिसमें m_1 = एक कथन पर उच्च समूह का मध्यमान मान

m_2 = एक कथन पर निम्न समूह का मध्यमान मान

s_1^2 = एक कथन के प्रति उच्च समूह के प्रत्युत्तर वितरणों के प्रसरण वर्ग

s_2^2 = एक कथन के प्रति निम्न समूह के प्रत्युत्तर वितरणों के प्रसरण वर्ग

N_1 = उच्च समूह में प्रयोज्यों की संख्या

N_2 = निम्न समूह में प्रयोज्यों की संख्या

7. **अभिवृत्ति मापनी का अंतिम प्रारूप** : अंतिम प्रारूप में वेदी कथन (प्रश्न) रखे जाते हैं जिनका टी–मूल्य 1.75 या इससे अधिक होता है। इस प्रकार चुने हुए कथन अभिवृत्ति मापनी के अन्तिम प्रारूप में सम्मिलित कर लिये जाते है और अन्तिम प्रारूप तैयार कर लिया जाता है।

6.5 मापनी के विविध आयाम (**Mullidimensional scaling**) :

बहुआयामी मापन अपेक्षाकृत अधिक जटिल मापनी यंत्र (Device) है लेकिन इस प्रकार के मापन के साथ वस्तुओं, व्यक्तियों या दोनों को न्यूनतम जानकारी सूचना के साथ मापन किया जा सकता है। बहुआयामी मापन को वास्तविक रूचि के अवधारणात्मक या भावात्मक आयामों को चित्रित करने के लिए प्रक्रियाओं को एक सेट के रूप में वर्णित किया जा सकता है। यह विविध प्रकार के व्यक्तिपरक निर्णयों को चित्रित करने के लिए अच्छा पद्वति है। इस मापन का उपयोग तब किया जाता है जब एक अध्ययन में सभी चरों (चाहे–मिट्रिक या गैर मीट्रिक) का विश्लेषण एक साथ किया जाता है और ऐसे सभी चर स्वतंत्र होते है। बहुआयामी मापन में अन्तर्निहित धारणा यह है कि लोग (प्रतिवादी) वस्तुओं के एक समूह को केवल एक के बजाय कई आयामों (एक दूसरे के साथ असंबंधित) पर एक दूसरे के समान कमोवेस समान मानते है। बहुआयामी मापन तकनीकों के माध्यम से कोई भी विन्दुओं के एक समूह के बीच ज्यामितीय रूप से स्थानों और अन्तर्सबन्धों का प्रतिनिधित्व कर सकता है। वास्तव में ये तकनीक एक या एक से अधिक तथ्यों का मापने के लिए उपयोग में लायी जाती है।

6.6 एक उचित अभिवृत्ति मापनी का चयन :

इस इकाई में मापन की कुछ विधियों का अध्ययन किया गया। प्रत्येक विधि के कुछ गुण है, तो कुछ दोष भी है। अब आपसे पूछा जा सकता है कि अभिवृत्ति मापने हेतु कौन से विधि अधिक उपयुक्त है। सामान्यतः अभिवृत्ति के मापन हेतु किसी भी विधि का प्रयोग किया जा सकता है, किन्तु सभी उद्देश्यों हेतु सभी विधियाँ उपयुक्त नहीं होती है। अतः उसी तकनीक का उपयोग करना चाहिए जो आपको अधिकतम सूचनाएॅ उपलब्ध करवाए। मापन विधि का चयन कई घटकों पर निर्भर करता है। ये घटक निम्नलिखित है–

1. **समस्या (प्रश्न) का प्रकार एवं सांख्यिकीय विश्लेषण–**

वरीयता वर्गीकरण एवं भार विधियाँ प्रश्न की प्रकृति एवं उपयोग में लाए जाने वाले सांख्यिकी विश्लेषण पर भी निर्भर करता है। उदाहरण के लिए, वरीयता केवल माषायी समंक होने पर सांख्यिकी विश्लेषण हेतु समस्या उत्पन्न करती है।

2. **तुलनात्मक एवं गैर–तुलनात्मक पैमानों के बीच चयन–**

प्रायः पाया गया है कि गैर–तुलनात्मक पैमाने की बजाय तुलनात्मक पैमानों का उपयोग अच्छा रहा है। निम्नलिखित उदाहरण का अवलोकन करें। आप ब्रांड ए के साबुन के उपयोग से कितना संतुष्ट है–

पूर्णतः संतुष्ट आंशिक संतुष्ट पता नहीं आंशिक असंतुष्ट पूर्णतः असंतुष्ट

यह एक गैर तुलनात्मक पैमाना है तथा केवल एक सिद्धान्त का ही व्याख्या कर रहा है। वही तुलनात्मक पैमाना उत्तरदाता को किसी आयाम को वरीयता देने हेतु बाध्य करता है।

उदाहरणार्थ : निम्न में से कौन सा साबुन का ब्रांड आप पसंद करते है। ब्रोड ए या ब्रांड बी उपरोक्त उदाहरण में आप दो ब्रांडो की तुलना कर रहे है। अतएव कई स्थितियों में आपके लिए तुलनात्मक पैमाना अधिक उपयोगी होता है।

3. **वर्ग चिन्हों के प्रकार–**

मापन एवं पैमाने के इस अध्याय में कई वर्ग चिन्हों यथा, मौखिक तथा आंकिंक की चर्चा की गयी है। कई शोधकर्ता मौलिक चिन्हों का उपयोग करते है ताकि वर्गो का उत्तरदाता सरलता से समझ ले। उत्तरदाता की समझ तथा शिक्षा का स्तर इस निर्णय को प्रभावित करता है।

4. **वर्गो की संख्या–**

चूँकि कोई एक अनुकूलतम वर्ग संख्या नहीं होती। अतः वर्गो की संख्या 5 से 9 के बीच में होनी चाहिए। इसके अलावा यदि कुछ उत्तरदाता हेतु तटस्थ पैमाना संभव हो तो विषय संख्या में वर्गो का उपयोग करना चाहिए।

5. **संतुलित एवं असंतुलित पैमाना–**

सामान्यतः वस्तुपरक समंक हेतु संतुलित पैमाने का उपयोग करना चाहिए।

6. दबाव एवं गैर–दबाव वर्ग–

यदि उत्तरदाता कोई अपना दृष्टिकोण नहीं रखता है तो समंकों की शुद्धता है। गैर–दबाव वाले वर्गो का उपयोग करना चाहिए जो कि ''पता नहीं'' विकल्प सुलभ करवाएं।

6.7 सैद्धान्तिक प्रश्न :

खाली स्थानों की पूर्ति करें–

1. आम तौर पर पैमाने के.......................... स्तर होते हैं।
2. युग्म तुलनात्मक मापन का विकास................ ने किया था।
3. ....एक गैर–तुलनात्मक पैमाना है।
4. .... के मापन के लिए तीकर्ट अभिवृत्ति मापन पद्धति का उपयोग किया जाता है।
5. अनुकूलतम वर्गों की संख्या................. से....................... के बीच मे होनी चाहिए।

सत्य एवं असत्य छाटिएँ :

1. मापन और अनुपमान में अंतर नहीं होता हैं।
2. क्रम सूचक अनुमापन का प्रयोग करके तत्वों की एक ही दिशा में अनुसार भिन्नता बताई जा सकती है।
3. क्य–सार्ट मापन तकनीक गैर तुलनात्मक मापनी है।
4. वरीयता आदेश पैमाना तुलनात्मक तकनीक है।
5. अभिवृत्ति किसी घटना के प्रति व्यक्ति की आंतरिक अनुभूति तथा विश्वास होता है।

6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर :

खाली स्थानों की पूर्ति करें–

1. चार, 2. थर्स्टन, 3. सतत् रेटिंग स्केल, 4. सामाजिक अभिवृत्ति 5.5,9 ?

सत्य एवं असत्य वाले प्रश्नों के उत्तर

1. असत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. सत्य, 5. सत्य

6.9 स्वपरख प्रश्न :

1. मापन एवं अनुमापन से आप क्या समझते हैं, ये दोनों एक दूसरे से किस प्रकार भिन्न है।
2. मापन के विभिन्न स्तरों की व्याख्या कीजिए।
3. लीकर्ट के अभिवृत्ति मापनी का वर्णन कीजिए।
4. तुलनात्मक मापन और गैर–तुलनात्मक मापन में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
5. वरीयता आदेश पैमाना क्या है, यह युग्म तलनात्मक पैमाने से किस प्रकार भिन्न है।
6. अर्थ–विभेदक पैमाने को समझाइए।
7. मापनी के विविध आयामों का संक्षिप्त वर्णन कीजिए तथा एक उचित अभिवृत्ति मापनी के चयन पर किन–किन विन्दुओं का ध्यान रखना आवश्यक होता है। स्पष्ट कीजिए।

/ / / /

इकाई 07 रेखा एवं चित्र (रेखांकन एवं आरेख) **Graphs & Diagrams** :

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य

यह इकाई माप में निम्नलिखित समझ विकसित करने में सक्षम होगी –

- समंकों के प्रस्तुतीकरण की समझ।
- चित्रों द्वारा प्रदर्शन की उपयोगिता एवं उसकी सीमाओं की समझ।
- चित्र रचना के नियम की समझ।
- चित्रों के प्रकार एवं चित्रलेख की समझ।
- आवृत्ति आयत चित्र की समझ।
- विभिन्न प्रकार के रेखाचित्र की समझ तथा,
- काल श्रेणी के रेखाचित्र की समझ विकसित हो पायेगी।

7.1 सारणीयन, चित्र व रेखाचित्र :

समंकों को प्रस्तुत करना एक कला है। सारणी, चित्र एवं रेखाचित्र तीनों ही समंकों के प्रस्तुतीकरण की विधियाँ है, परन्तु तीनों में अनेक अनतर है, जिसका उल्लेख करना इस अध्याय मे ठीक से समझने के लिए समीचीन होगा।

7.1.1 सारणी– समंकों के प्रस्तुतीकरण के लिए सारणीयन प्रारम्भिक और आवश्यक क्रिया है। सारणी सांख्यिकी विश्लेषण का आधार है। विभिन्न सांख्यिकी माप ज्ञात करने के लिए पहले तथ्यों को संक्षिप्त करके सारणी के रूप में रखा जाना आवश्यक है। इसके विपरीत चित्र एवं विन्दुरेख समंकों का प्रदर्शन मात्र करते है। वास्तव में, जहॉ सारणी का कार्य समाप्त होता है, वहॉ से चित्र व रेखाचित्र का कार्य आरम्भ होता है। सारणी में प्रस्तुत किये जाने से समंकों का यथार्थ गणितीय रूप नष्ट नहीं होता जबकि चित्रों व बिन्दुरेखों में अत्यधिक शुद्धता नहीं होती तथा उनके द्वारा तथ्यों के सूक्ष्म अन्तर प्रदर्शित नहीं किये जा सकते। सारणी द्वारा बहुगुणी समंकों की परस्पर तुलना की जा सकती है, परन्तु चित्रों व रेखाचित्रों द्वारा अनेक गुणों की तुलना संभव नहीं है। सारणी बनाना चित्र व रेखाचित्र की रचना की अपेक्षा सरल है। चित्रों व रेखाचित्रों के लिए उचित मापदण्ड निर्धारित करना विशेष योग्यता का अनुभव का काम है। सारणी में लोच होता है। अतः उसे आवश्यकतानुसार परिवर्तीत किया जा सकता है, परन्तु चित्र व रेखांचित्र में परिवर्तन करना सरल नहीं है।

सारणी में कुछ दोष भी होते है। प्रथम सारणी में आकर्षण का अभाव होता है जबकि चित्र व रेखाचित्र आकर्षक होते है और मस्तिष्क पर स्थायी प्रभाव डालते है। दूसरे, सारणी को समझने व उससे निष्कर्ष निकालने के लिए गणितीय ज्ञान की आवश्यकता होती है जबकि चित्र व रेखाचित्र को सामान्य व्यक्ति एक ही दृष्टि में समझ लेता है और वह विभिन्न तथ्यों की आपस में सरलतापूर्वक तुलना कर सकता है। तीसरे बड़ी–बड़ी सारणियों में जटिलता व अस्पष्टता होती है, परन्तु चित्रों व रेखाचित्रों में सरलता व स्पष्टता होती है।

7.1.2 चित्र : सारणी व विन्दु रेख की तुलना में चित्र अधिक सरल, आकर्षक व प्रभावशाली होते है। यही कारण है कि विज्ञापन व प्रचार कार्य में उनका विशेष उपयोग होता है। इनसे समय व श्रम की भी बचत होती है, परन्तु ये वास्तविक समंकों के स्थानापन्न नहीं हो सकते, केवल उनके सहायक होते है। मापदण्ड आदि में परिवर्तन करके इनसे भ्रमात्मक निष्कर्ष निकाले जा सकते है तथा इनका दुरूपयोग सरलता से किया जा सकता है।

7.1.3 विन्दुरेख : गणितीय दृष्टिकोण से विन्दुरेखाचित्र आरेखीय चित्रों से अधिक महत्वपूर्ण होते है। उनकी सहायता से अनेक सांख्यिकी माप जैसे मध्यका, विभाजन–मूल्य, बहुलक आदि निर्धारित किये जा सकते है तथा

आर्थिक नियमों का चित्रण किया जा सकता है। आन्तरगणन व बाध्यगणन तथा सहसम्बन्ध व प्रतीपगमन का अध्ययन करने में भी विन्दुरेखीय वक्र उपयोगी है। चित्रों की सहायता से यह कार्य संभव नहीं है।

7.2 चित्रमय प्रदर्शन की उपयोगिता एवं सीमाएँ :

आँकड़ों (समंकों) को रोचक एवं आकर्षक ज्यामितीय आकृतियों या लेखाचित्रों (Charts) अथवा चित्रों (Pictures) या मानचित्रों (Maps) के रूप में प्रदर्शित करने की क्रिया चित्रमय प्रदर्शन (diagerammatic representation) कहलाती है। समंकों के चित्रमय प्रदर्शन को लेखा चित्रीय प्रदर्शन 'या' आरेखी प्रदर्शन' भी कहते है।

किसी ने ठीक ही कहा है 'एक चित्र हजार शब्दों के बराबर होता है, (A picture is worth a thousand words) सांख्यिकी चित्रों के निम्नलिखित उपयोगिता एवं लाभ है–

1. **आकर्षक और प्रभावशाली साधन–** चित्र अत्यन्त आकर्षक और रोचक होते हैं तथा मानव मस्तिष्क पर स्थायी छाप छोड़ते है। सामान्य व्यक्तियों के लिए यह अत्यन्त उपयोगी होता है। बहुतायत संख्या में लोग संख्याओं में रूचि नहीं रखते, क्योकि उन्हें समझने, याद रखने तथा उनसे निष्कर्ष निकालने में कठिनाई होती है, वहीं पर विभिन्न रंगों के बने रोचक चित्र, अनायास ही उनका ध्यान आकर्षित करते है। उनके मस्तिष्क पर भार नहं पड़ता। अंकों की तुलना में ये अधिक स्थायी होते है। आकर्षक व प्रभावोत्पादक होने के कारण ही आधुनिक विज्ञापनों में अधिकतर चित्रों का प्रयोग होता है।

2. **सरल व बोधगम्य** : चित्र एक ऐसा साधन है जिससे जटिल तथ्य अधिक सरल और बोधगम्य बन जाते है, तथा उनकी सभी विशेषताएँ स्पष्ट हो जाती है। उदाहरण के लिए जनसंख्या वृद्धि अथवा मूल्य वृद्धि, रनों में वृद्धि जैसे समंक आसानी से समझ में नहीं आते परन्तु इन्हीं समंकों को यदि उपयुक्त सांख्यिकीय चित्र के रूप में प्रस्तुत किया जाए तो सारी स्थिति एक ही दृष्टि में स्पष्ट हो जाती है।

3. **समंकों के विशिष्ट अधिलक्षणों प्रवृत्तियों का स्पष्टीकरण** : सारणियों के जटिलता के कारण तथ्यों के विशिष्ट अभिलक्षण प्रदर्शित नहीं हो पाता है। यह कार्य चित्रों से स्पष्ट रूप से हो जाता है। चित्र समंकों के मूल अर्थ में कोई वृद्धि नहीं करते परन्तु उनकी विवेकपूर्ण रचना और अध्ययन से वर्गो और समंक श्रेणियों की प्रमुख विशेषताऍ स्वयं स्पष्ट हो जाती है।

4. **तुलनीय होना** : चित्रों की सहायता से विभिन्न समंकों की पारस्परिक तुलना सरलता से की जा सकती है, जैसे दो टीमों के द्वारा बनाये गये रनों की तुलना उपयुक्त सांख्यिकीय चित्रों द्वारा सरलता से की जाती है।

5. **समय व श्रम की बचत** : चित्रों को देखने, समझने तथा उनसे निष्कर्ष तक पहुँचने में विशेष अध्ययन व परिश्रम की आवश्यकता नहीं होती। अतः चित्रों से समण व श्रम की बचत होती है।

6. **सूचना एवं मनोरंजन के साधन** : उपर्युक्त चित्र महत्वपूर्ण सूचना देने के साथ–साथ हमारा मनोरंजन भी करते है। इनको देखने से रूचि, उत्सुकता एवं उत्साह में वृद्धि होती है।

7. **ब्रम्हाण्डीय उपयोगिता** : अनेक लाभों के कारण विभिन्न क्षेत्रों में सांख्यिकीय चित्रों का व्यापक प्रयोग होता है। व्यापार, वाणिज्य विज्ञापन तथा खेल के क्षेत्रों में चित्र बहुत उपयोगी और महत्वपूर्ण होते है। इस प्रकार सांख्यिकीय चित्रों क उपयोगिता सार्वभौमिक है। वे सभी क्षेत्रों में संमंकों को नवजीवन प्रदान करते है।

चित्रों की सीमाएँ (Limitations) : आपको सांख्यिकीय चित्रों की सीमाओं को भी जानना आवश्यक है जिससे आप इनका उपयोग सावधानी से कर सके। मोरोन ने इसके सम्बन्ध में उचित ही कहा है कि, 'किसी चित्र का अध्ययन करने में पूर्ण सजग (सावधान) रहना लाभप्रद होता है। चित्र इतना सरल निष्कपट और आकर्षक लगता है कि लापरवाह व्यक्ति आसानी से मूर्ख बन जाता है' चित्रमय प्रस्तुतीकरण की निम्नलिखित प्रमुख परिसीमायें है–

1. **सीमित परिशुद्धता** : सांख्यिकीय चित्रों की शुद्धता सीमित होती है। वास्तव में, चित्रों द्वारा यथार्थ संरचनात्मक प्रदर्शन संभव नहीं है। वे सन्निकट मूल्यों (Approximate Value)पर आधारित होते है। अतः वे तथ्यों का शुद्ध विवेचन नहीं करते।

2. **अनुपयुक्तता** : विभिन्न मूल्यों का सूक्ष्म अन्तर प्रदर्शित करने के लिए चित्रमय प्रदर्शन सर्वथा अनुपयुक्त है। उदाहरण के लिए 5940 और 5830 का अन्तर चित्रों द्वारा स्पष्ट नहीं किया जा सकता चाहे मापदण्ड कुछ भी रखा जाये।

3. **तुलनीयता की सीमित होना** : चित्रों द्वारा सही तुलनात्मक अध्ययन के लिए यह आवश्यक है कि समंक दो या दो से अधिक हो तथा स्वभाव में सजातीय हो अन्यथा भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलेंगे। विभिन्न गुणों के आधार पर बने चित्र अतुलनीय होते है।

4. **बहुगुणी प्रदर्शन में कठिनाई** : चित्रों के रूप में बहुगुणी सूचनाएत्र प्रदर्शित नहीं की जा सकती। ये सारणियों के रूप में प्रदर्शित की जा सकती है।

5. **दुरूप्रयोग (Misuse)** : चित्रों का दुरूपयोग सरलता से किया जा सकता है। गलत मापदण्ड पर बने चित्र भ्रमात्मक होते है। विज्ञापन आदि में तो इनका अत्यधिक दुरूपयोग किया जाता है।

चित्र सारणियों के सीनापन्न नहीं है– चित्र निष्कर्ष के प्राप्त करने का एक साधन है, जिसका प्रयोग सारणियों के साथ–साथ करना चाहिए। केवल चित्रों से ही यथार्थ परिणाम नहीं काले जा सकते। वास्तव में चित्र सारणियों के अनुपूरक है, स्थानापन्न नहीं।

7.3 चित्र रचना के नियम (General Rules for Constructing Diagram) :

चित्रों का रचना एक विशिष्ट योग्यता वाला कार्य है। चित्रों को आकर्षक एवं प्रभावशाली बनाने के लिए निम्न नियमों का अनुपालन करना आवश्यक होता है–

1. **शुद्ध एवं आकर्षक** : चित्र ऐसे हो जो दर्शकों का ध्यान अनायास ही आकर्षित कर सके। लेकिन आकर्षण के लिए उनकी शुद्धता का परित्याग नहीं करना चाहिए। अशुद्ध चित्रों के भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलते है। विन्दुरेखा पत्र (Graph Paper) पर बने चित्र अधिक शुद्ध होते है।

2. **उपयुक्त आकार** : चित्रों का आकार ऐसा हो जो न तो बड़ा हो न ही छोटा हो। प्रपत्र के मध्य में बने चित्र के चारों ओर मोटी रेखाएँ खींच देने से उसका आकर्षण मूल्य बढ़ जाता है।

3. **शीर्षक एवं अनुटिप्पणी (Title and Foodnote)** : प्रत्येक चित्र के उपर स्पष्ट, पूर्ण एवं संक्षिप्त शिर्षक का होना आवश्यक है, जिससे यह ज्ञात हो कि चित्र में क्या प्रदर्शित किया गया है। यदि कोई भी तथ्य चित्र के अवलोकन से स्पष्ट न हो तो उसके लिए एक व्याख्यात्मक अनुटिप्पणी नीचे बाई ओर देनी चाहिए।

4. **उपयुक्त मापदण्ड (Suitable Scale)** : चित्र रचना से पहले उचित मापदण्ड या पैमाने का निर्धारण करना आवश्यक होता है। बिना उचित मापदण्ड के चित्र नहीं बनाये जा सकते है। कागज के आकार और समंकों की प्रकृति को ध्यान में रखकर ही उचित मापदण्ड निर्धारित किया जाना चाहिए। सामान्यतया, उदग्त पैमाना (Vertical Scale) चित्र के बायी ओर तथा क्षैतिज पैमाना (Horigontal Scale) नीचे की ओर अंकित करके प्रदर्शित करना चाहिए। चित्र के शिर्षक के पास ही पैमाना लिख देना चाहिए।

5. **चित्र का खींचना (Driawing of Diagrams)** : चित्र को सदैव ज्यामितीय उपकरणों (पेंसिल, स्केल आदि) की सहायता से बनाना चाहिए। चित्र के विभिन्न विभागों या उप–विभागों के अन्तर को बिन्दुओं, उदग्त या क्षैतिज रेखाओं, चारखानों आदि द्वारा स्पष्ट कर देना चाहिए। जहॉ तक संभव हो, चित्रों या उनके विभागों के अन्दर शब्द या अंक नहीं लिखने चाहिए, इससे चित्र गन्दे प्रतीत होने लगते है। कभी–कभी विभिन्न विभागों में प्रतिशत के अंक लिखे जा सकते है।

6. **संकेत (Index)** : चित्र में चिन्हों का प्रयोग होता है, जैसे– बिन्दुओं, रेखाओं, खारखानों आदि के अर्थ को स्पष्ट करने के लिए चित्र के उपर एक कोने में संकेत देना चाहिए, जिससे चित्र के विभिन्न विभागों को समझने एवं तुलना करने में आसानी हो।

7. **स्रोत (Source)** : जो समंक चित्र में प्रदर्शित हो रहे हैं, उनके स्रोत नीचे दे देना चाहिए। इससे उसकी विश्वसनीयता बढ़ जाती है।

8. **सरलता (Simplicity)** : सरलता आरेखीय चित्रों का आवश्यक गुण है। अतः चित्र इतने सरल होने चाहिए कि सामान्य व्यक्ति भी उसे आसानी से समझ सके।

9. **'उपयुक्त' चित्र का चुनाव (Selection of a Suitable Diagram)** : उपयुक्त चित्र का चुनाव करना एक जटिल कार्य है। चित्र अनेक प्रकार के होते है, जो अलग–अलग प्रकार के समंकों के लिए उपयुक्त होते है। उचित चित्र का चुनाव समंकों की प्रकृति, प्रदर्शन का उद्देश्य, न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों का अनुपात तथा सांख्यिकी के विवेक, अभ्यास व अनुभव पर निर्भर होता है।

   अतः चित्रों की रचना के लिए उपरोक्त ध्यातों का ध्यान रखना आवश्यक होता है।

7.4 चित्र रचना के नियम (General Rules for Constructing Diagram) :

समंकों को प्रस्तुत करने के लिए जितने भी चित्रों का उपयोग किया जाता है, उन्हें मुख्यतः छः भागों में विभाजित किया जा सकता है–

- एक विस्तार वाले या एक विमा चित्र।
- दो विस्तार वाले या द्वि–विमा चित्र।
- तीन विस्तार वाले या द्वि–विमा चित्र।
- चित्र लेख।
- मान–चित्र।
- व्यावसायिक चित्र।

पाठ्यक्रमानुसार विभिन्न प्रकार के चित्रों में से केवल चित्र लेख (Pictograms or Pictures) का अध्ययन करना है।

7.5 चित्र–लेख (Pictograms or Pictures) :

चित्र–लेख अर्थात समंकों का चित्रों द्वारा प्रदर्षन इसके अन्तर्गत समंकों को सम्बन्धित वस्तुओं के आकर्षक चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। जैसे–किसी देश की जनसंख्या में मनुष्य के चित्रों द्वारा, विभिन्न योजनाओं में सरकार के कुल व्यय को रूपये की गड्डी के चित्रों द्वारा सीमेंट का उत्पादन पैकेट के चित्र बनाकर प्रदर्शित किया जा सकता है। चित्र समंकों के अनुपात में बनाये जाते है। विज्ञापन व प्रचार कार्य में इनका बहुत अधिक प्रयोग होता है। ये अत्यन्त आकर्षक एवं प्रभावशाली होते हैं। अनपढ व्यक्ति भी इसे आसानी से समझ लेते है। लेकिन इनकी रचना करना सरल नहीं है।

निम्नलिखित उदाहरण को चित्र लेखा द्वारा प्रस्तुत किया गया है।

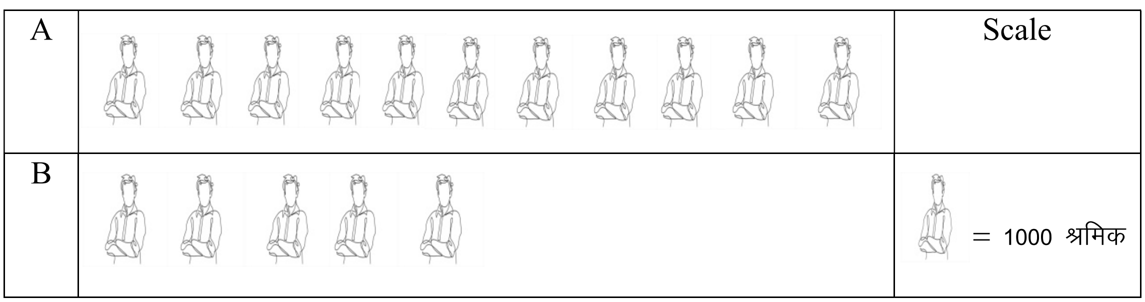
उदाहरण –1

दो चीनी मिलों में कार्यरत श्रमिकों की संख्या को उपयुक्त चित्र लेख द्वारा प्रस्तुत कीजिए–

चीनी मिल A	11,000
चीनी मिल B	5,000

हल :

दो चीनी मिलों में श्रमिकों की संख्या



7.6 आवृत्ति आयत चित्र (Frequency Historam) :

जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है कि 'आवृत्ति चित्र' उन सांख्यिकीय ऋखलाओं के चित्रीय प्रस्तुतीकरण को प्रकट करता है जिसे सांख्यिकी में 'आवृत्ति वितरण' कहा जाता है। इस प्रकार क ऋखला में चर के मूल्य की पुनरावृत्ति होती रहती है। अर्थात् चर के भिन्न–भिन्न मूल्य की कई बार पुनरावृत्ति होती है। उदाहरण के ऐ, मान लिया कि 40–50 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 50 है, 50–60 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 40 है तथा 60–70 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 20 है।

अविच्छिन्न समंक श्रेणी (सतत् श्रृंखला) का प्रदर्शन करने के लिए आवृत्ति आयत चित्र की रचना की जाती है। यह आयताकार चित्रों का वह समूह होता है, जिसमें आयतों की ऊँचाई आवृत्तियों के अनुपात में रखी जाती है। आवृत्ति आयत चित्र को सोपान चित्र (Staircase Diagram) या खण्ड चित्र (Block Diagram) भी कहते है। इसका निर्माण करने के लिए वर्गान्तरों की सीमाओं (Class Limits) को भुजाक्ष पर तथा आवृत्तियों को कोटि–अक्ष पर प्रदर्शित किया जाता है फिर प्रत्येक वर्गान्तर की सीमाओं के माप–विन्दुओं पर आवृत्ति के ऊँचाई के माप के बराबर लम्ब रेखाएं खींचकर आयत चित्र बना लिया जाता है। इस प्रकार सभी वर्गान्तरों के आयत एक दूसरे से सटे हुए रहते है। यदि वर्गान्तर समावेशी हैं तो पहले उन्हें अपवर्जी बना लेना चाहिए।

यदि वितरण में आवृत्तियों प्रतिशत के रू॰ में प्रकट की गयी है तो उन्हें प्रदर्शित करते समय मदों की संख्या के स्थान पर आवृत्तियों के प्रतिशत को अंकित किया जाता हैं आयत चित्र (Histogram) दो प्रकार के होते है।

1. समान वर्गान्तर वाले आयत चित्र
2. असमान वर्गान्तर वाले आयत चित्र

7.6.1 समान वर्गान्तर वाले आयत चित्र :

समान वर्गान्तर वाले आयत चित्र वे हैं जो समान वर्गान्तर वाले ऑकड़ों पर आधारित होते है। जब श्रृखला के वर्गान्तर एक समान हों तो आवृत्ति आयत चित्रों की चौड़ाई एक समान होती है। आयतों की लम्बाई वर्गान्तरों की आवृत्तियों के अनुपात में होती है। समझ विकसित करने के लिए निम्नलिखित उदाहरण दिया जा रहा है –

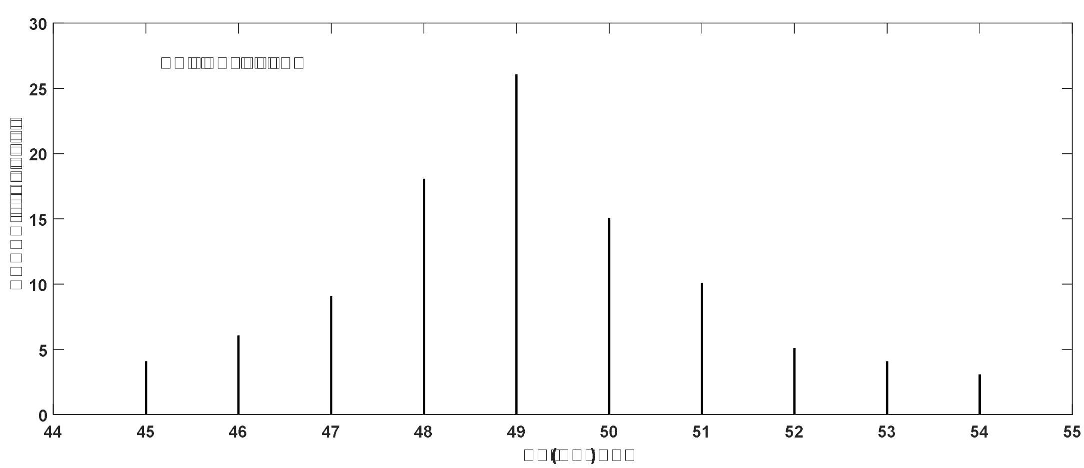
उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित तालिका में एक कालेज के विद्यार्थियों के वाणिज्य के प्रश्न–पत्र में प्राप्त अक दिए गये है। इन्हें एक आयतचित्र द्वारा प्रकट करें–

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
विद्यार्थियों की संख्या	5	10	15	20	12	8	4

हल (Solution) :

सांख्यिकी में अलग–अलग अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या–



7.6.2 असमान वर्गान्तर वाले आयत चित्र :

असमान वर्गान्तर वाले आयत चित्र वे हैं जो असमान वर्गान्तर वाले आँकड़ों पर आधारित होते है। जब वर्गान्तर असमान हो तो इनको प्रकट करने वाले आकड़ों की चौड़ाई एक समान नहीं होती। वर्गो के आकार के अनुपात में चौड़ाई बढ़ती या घटती है। इस प्रकार की आवृत्तियों को आवृत्ति चित्र बनाने से पहले समायोजित (Adjust) कर लिया जाता है। ऐसा करते समय सबसे पहले कम वर्गान्तर वाले वर्ग को लिया जाता है, और दूसरे वर्ग की आवृत्तियों को क्रय के अनुसार लिखा जाता है। समायोजित तत्व को निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात किया जाता है–

$$\text{किसी वर्ग का समायोजित तत्व} = \frac{\text{वर्ग का वर्गान्तर}}{\text{सबसे कम वर्गान्तर}}$$

उदाहरण के लिए मानलीजिए सबसे कम वर्गान्तर वाला वर्ग 5–10 है तथा उससे बड़ा वर्गान्तर 10–20 है, जिसकी आवृत्ति 12 है। इस उदाहरण में बड़ा वर्गान्तर सबसे कम वर्गान्तर की तुलना में दुगुना है। इसलिए समायोजित तत्व $\frac{10}{5} = 2$ होगा। इसलिए बड़े वर्गान्तर की आवृत्तियों को दो से भाग कर देना चाहिए अर्थात् $12 \div 2 = 6$, इस अंक को, जिसके द्वारा आवृत्ति को भाग कर दिया जाता है, समायोजित तत्व कहा जाता है। यहाँ 2 समायोजित तत्व है। असमान वर्गान्तर वाले आयतचित्र (Histogram) का उदाहरण निम्न है–

उदाहरण (Illustration):

निम्नलिखित आँकड़ों को आयत चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए :–

मासिक वेतन रू0 में	मजदूरों की संख्या
10–15	7
15–20	10
20–25	27
25–30	15
30–40	12
40–60	12
60–80	8

हल (**Salution**) :

श्रेणी को देखने से पता चलता है कि वर्गान्तर असमान है। अतः आवृत्ति चित्र बनाने से पहले आवृत्तियों का समायोजन आवश्यक है, नहीं तो वह सही चित्र नहीं होगा। प्रश्न में दिये गये न्यूनतम वर्गान्तर (पाँच) 5 का है। इसके विपरीत कुछ वर्गान्तर 10 व 20 का भी है। इसलिए रेखाचित्र बनाने से पहले आवृत्ति धनत्व (Frequency Density) की गणना करनी चाहिए। आवृत्तियों को समायोजित तत्व से भाग देने पर जो संख्या आती है, उसे आवृत्ति घनत्व कहा जाता है, अर्थात् –

$$\text{आवृत्ति घनत्व} = \frac{\text{आवृत्ति}}{\text{समायोजित तत्व}}$$

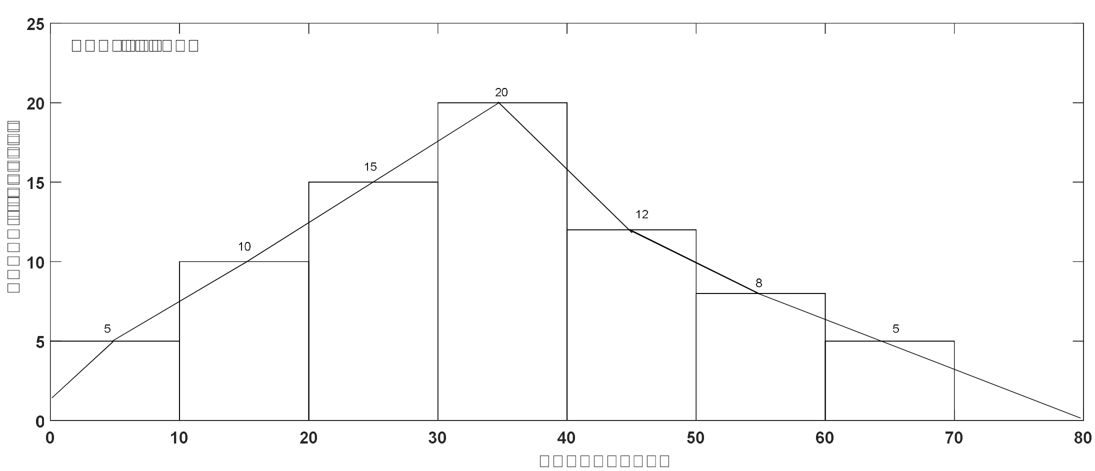
अतः समायोजित तालिका निम्न प्रकार से बनेगी।

असमान वर्गान्तर की आवृत्तियों का समायोजन

मासिक वेतन रूपये में	मजदूरों की संख्या	समायोजित तत्त्व	आवृत्ति घनत्व
10—15	7	$\frac{5}{5} = 1$	7 ÷1 = 7
15—20	10	$\frac{5}{5} = 1$	10 ÷1 = 10
20—25	27	$\frac{5}{5} = 1$	27 ÷1 = 27
25—30	15	$\frac{5}{5} = 1$	15 ÷1 = 15
30—40	12	$\frac{10}{5} = 2$	12 ÷ 2 = 6
40—60	12	$\frac{20}{5} = 4$	12 ÷ 4 = 3
60—80	8	$\frac{20}{5} = 4$	8 ÷ 4 = 2

ऊपर दी गयी तालिका में न्यूनतम वर्गान्तर 5 है, पहले चार वर्गो का अन्तर 5 है, अर्थात् न्यूनतम वर्गान्तर के बराबर है। परन्तु पाँचवें का 40—30 = 10 है।, अर्थात् न्यूनतम वर्गान्तर 5 से दुगुना है। इसकी मदों को 2 से भाग किया गया है और इस क्रम में आगे भी करके आवृत्ति घनत्व प्राप्त किया गया है। तत्पश्चात् आवृत्ति आयत चित्र का निर्माण किया जायेगा—

अलग—अलग अंतराल की वेतन प्राप्त करने वाले मजदूरों की संख्या



7.7 चित्रो तथा बिन्दुरेखा चित्रों में अन्तर :

समंकों का विन्दुरेखीय प्रदर्शन रेखा पत्र पर पूर्व निर्धारित मापदण्ड के अनुसार प्राकित बिन्दुओं को आपस में मिलाने से बनी रेखाओं व वक्रो के रूप में किया जाता है। वांडिंगटन के अनुसार 'रेखा का धुमान मस्तिष्क को प्रभावित करने मं सारणीकृत विवरण की अपेक्षा कहीं अधिक शक्तिशाली होता है। वह उतनी शीघ्रता से यह प्रदर्शित करने में समर्थ है कि क्या हो रहा है और क्या होने वाला है, जितनी शीघ्रता से हमारी आँख यह कार्य करने में समर्थ है।

चित्रमय प्रदर्शन और विन्दुरेखीय प्रदर्शन दोनों ही जटिल एवं नीरस समंकों को सरल, आकर्षक और प्रभावी ढंग से प्रस्तुत करने की प्रविधियाँ है। फिर भी इनमें निम्नलिखित अन्तर है–

1. निर्माण (Construction) रेखांचित्र बिन्दु रेखीय पत्र (Graph Paper) पर बनाए जाते हैं, जबकि चित्र का निर्माण सामान्यतः साधारण कागज पर की जाती है।

2. उपयोग (Use) सांख्यिकी चित्रों का प्रयोग विशेष रूप से स्थान संबंधी क्षेणियों (Spatial Series) के निरूपण के लिए किया जाता है। इसके विपरीत काल श्रेणी तथा (Time Series) तथा आवृत्ति बंटनों (Frequency distribution) को प्रभावशाली एवं आकर्षक ढंग से प्रदर्शित करने के लिए बिन्दु रेखाचित्रों का प्रयोग सर्वाधिक उपयुक्त है।

3. उपयुक्तता (Suitability) चित्र अधिक आकर्षक होते है इसलिए वे प्रचार और विज्ञापन के लिए बहुत उपयुक्त है। चित्रों की रचना में सन्निकटन का अधिक प्रयोग होता है। समंकों का वास्तविक अर्थ समझने में चित्रों का कोई योगदान नहीं होता। अतः एक सांख्यिकीय शोधकर्त्ता के दृष्टिकोण से सांख्यिकीय विश्लेषण में ये सहायक नहीं होते। इसके विपरीत रेखाचित्र सांख्यिक और शोधकर्ता द्वारा विश्लेषण कार्य में बहुत उपयुक्त होते है। वस्तुतः बिन्दुरेखीय विश्लेषण और प्रस्तुतीकरण के बिना शोध कार्य की कल्पना भी नहीं की जा सकती।

4. **कुछ सांख्यिकीय मापों का निर्धारण (Delermenation of some statistical measunes)** : विशेष प्रकार के आवृत्ति रेखा–चित्रों द्वारा स्थिति सम्बन्धी माध्य जैसे बहुलक (Mode), मध्यका (Medion), तथा विभाजन मूल्यों (Partition Values) का निर्धारण किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त विन्दुरेखीय विधि द्वारा कुछ मान्यताओं के अधीन समंकों का आन्तर्गणन एवं वाध्यगणन तथा पूर्वानुमान का भी आंकलन किया जा सकता है। जबकि चित्रों द्वारा ऐसा करना असंभव है।

5. **गणितीय संबंध (Malhematical Relationship)** : एक बिन्दु रेखाचित्र दो चर मूल्यों में गणितीय संबंध प्रस्तुत करता है जबकि चित्र चर–मूल्यों के मध्य केवल तुलनात्मक अध्ययन में सहायक होता है।

5. **निर्माण की जटिलता (Complixity in construction)** : बिन्दु रेखाचित्र विन्दु रेखा–पत्र पर निश्चित मापदण्ड के अनुसार बनाए जाते हैं। अतः उनकी रचना सांख्यिकीय चित्रों की रचना की अपेक्षा सरल होती है। प्रायः पाया जाता है कि एक ही प्रकार के समंकों के लिए विभिन्न प्रकार के चित्र बनाए जा सकते हैं। अतः सर्वोपयुक्त चित्र का चयन की कठिन होता है।

7.8 विभिन्न प्रकार के रेखाचित्र :

विन्दुरेखीय विधि का प्रयोग दो प्रकार भी समंक–श्रेणियों के प्रदर्शन के लिए किया जा सकता है। ये समंक–श्रेणी निम्नलिखित हैं :–

1– काले–श्रेणी (Time Series)

2– आवृत्ति बंटन (Frequencey Distribution)

पाठ्यक्रमानुसार आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र का व्याख्या यहाँ किया गया है। जो निम्न प्रकार के होते हैं –

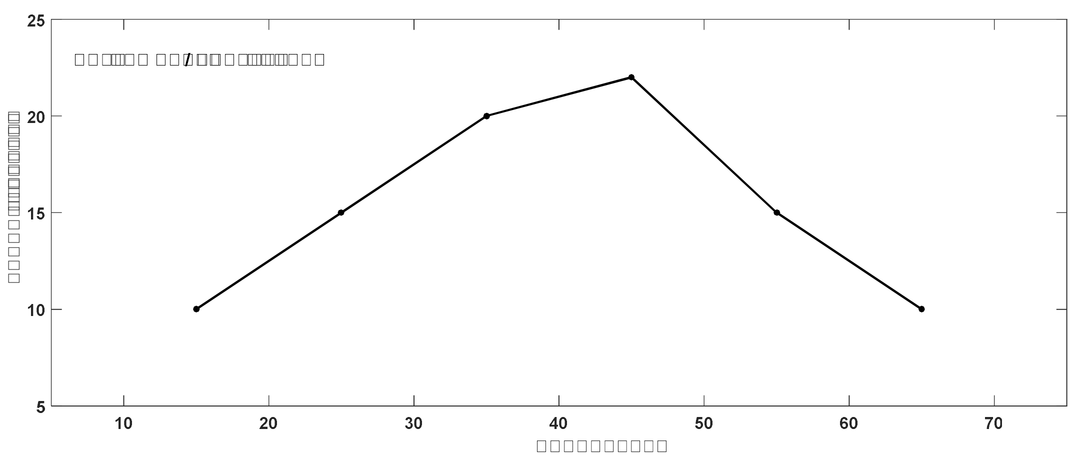
7.8.1 रेखा–आवृत्ति चित्र (**Line frequency Diagram**)

इस चित्र द्वारा खण्डित समंक मालाओं का विन्दुरेखीय प्रदर्शन किया जाता है। मूल्यों को भुजाक्ष (X-axis) पर तथा आवृत्तियों को कोटि–अक्ष (Y-axis) पर रखकर प्रत्येक मूल्य के विन्दु पर उसकी आवृत्ति के माप की ऊँचाई के बराबर लम्ब रेखा खींच दी जाती है।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्न समंकों का बिन्दुरेखीय चित्रण कीजिए–

भार (किलो)	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
विद्यार्थियों की संख्या	4	6	9	18	26	15	10	5	4	3



7.8.2 आवृत्ति–आयत–चित्र (**Histogram**)

आवृत्ति–आयत–चित्र का वर्णन इसी अध्याय में 7.6 के अंतर्गत किया जा चुका है।

7.8.3 आवृत्ति बहुभुज (Frequncey Polygon)

आँकड़ों का यह चित्रीय प्रस्तुतीकरण जो अनेक भुजाओं वाला ज्यायितीय चित्र होता है, आवृत्ति बहुभुज कहलाता है। यह आयत चित्र (Histogram) के प्रत्येक आयत के शीर्ष के मध्य–बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिलाकर बनाया जाता है। आयत चित्र को पहले बनाए बिना भी आवृत्ति बहुभुज को खींचा जा सकता है। इसके लिए हर वर्ग के मध्य–बिंदु के मूल्य को ग्राफ पेपर के X- अक्ष पर अंकित कर लिया जाता है तथा अनुज्ञपित आवृत्तियों को Y-अक्ष पर अंकित किया जाता है। पैमाने (Fast-rule) की सहायता से विभिन्न वर्गों की आवृत्तियों को दर्शाने वाले बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिला दिया जाता है। इसके फलस्वरूप जो रेखाचित्र बनता है उसे आवृत्ति बहुभुज (Frequencey Palygon) कहते हैं। आवत्ति बहुभुज के दोनों किनारों को आधार रेखा तक बढ़ा दिया जाता है। ऐसा इसलिए किया जाता है जिससे बहुभुज का क्षेत्रफल आयतचित्र के क्षेत्रफल के बराबर हो जाए। यह ध्यान रखना चाहिए कि एक ग्राफ पेपर पर एक से अधिक आवृत्ति बहुभुज खिंचे ज सकते है परन्तु एक से अधिक आयत नहीं।

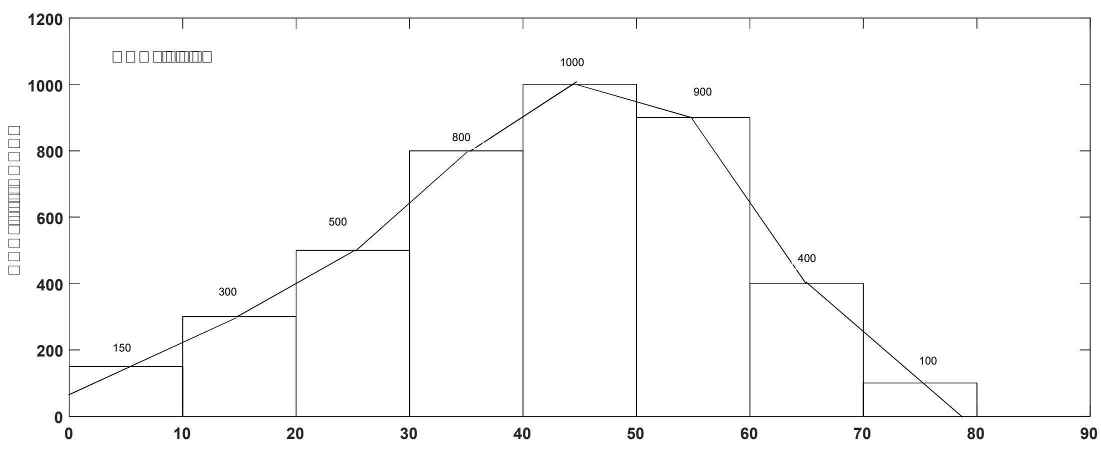
उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित तालिका में एक कॉलेज के विद्यार्थियों के गणित के पर्चे में प्राप्तांक दिये गये हैं, इन्हें आवृत्ति बहुभुज द्वारा प्रकट करें।

भार (किलो)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
विद्यार्थियों की संख्या	5	10	15	20	12	8	5

हल (Solution) :

उपरोक्त आँकड़ों के आधार पर आवृत्ति बहुभुज निम्नलिखित ढ़ंग से बनाया जा सकता है। रेखाचित्र में पहले आयत बनाया गया है, तत्पश्चात् प्रत्येक आयत की ऊपरी भुजा का मध्य–बिन्दु निकाला गया है। आयत चित्र में दिए हुए आयतों के मध्य–बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिलाया गया है। बहुभुज के अंतिम सिरों को आधार रेखा (Base Line) से मिलाया गया है। ऐसा इसलिए किया जाता है कि बहुभुज का क्षेत्रफल आयतचित्र के क्षेत्रफल के बराबर हो जाए।



उदाहरण (**Illustration**) :

निम्नलिखित आँकड़ों के आधार पर आयत चित्र के बिना (Without Histogram) आवृत्ति बहुभुज बनाइए

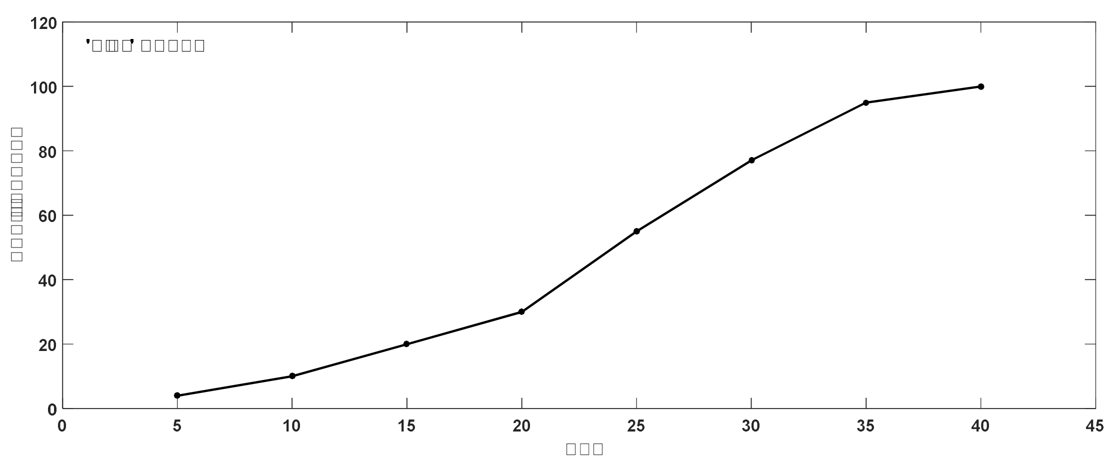
अंक	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
विद्यार्थियों की संख्या	10	15	20	22	15	10

हल (**Solution**) :

आयत चित्र के बिना आवृत्ति बहुभुज बनाने के लिए दिए हुए अंकों के वर्गान्तर के मध्य—बिन्दु (Mid-value) निकाले गये हैं। इसके बाद मध्य—बिन्दु तथा उनसे संबंधित आवृत्तियों को ग्राफ पेपर पर अंकित करके उन्हें सरल रेखा द्वारा मिलाया जाता है। प्राप्त वक्र आवृत्ति बहुभुज होगा।

अंक	मध्य—मूल्य	विद्यार्थियों की संख्या
10—20	$M.V. = \frac{L_1+L_2}{2} = \frac{10+20}{2} = 15$	10
20—30	$\frac{20+30}{2} = 25$	15
30—40	$= \frac{30+40}{2} = 35$	20
40—50	$= \frac{40+50}{2} = 45$	22
50—60	$= \frac{50+60}{2} = 55$	15
60—70	$= \frac{60+70}{2} = 55$	10

अब उपरोक्त आँकड़ों के आधार पर नीचे दिए गए चित्र में बिना आयतचित्र बनाए आवृत्ति बहुभुज बनाया गया हैं।



7.8.4 आवृत्ति वक्र (**Freqency Cerce**) :

यह बहुभुज का ही एक रूपान्तरण है। यह आवृत्ति बहुभुज का मुक्त हस्तरीति से खींचा हुआ सरलित (Smoothed) रूप है। आवृत्ति वक्र का क्षेत्रफल आवृत्ति बहुभुज के बराबर होता है। इसमें यह प्रयास किया जाता है कि आवृत्ति बहुभुज की कोणीयता (Angularity) समाप्त हो जाए।

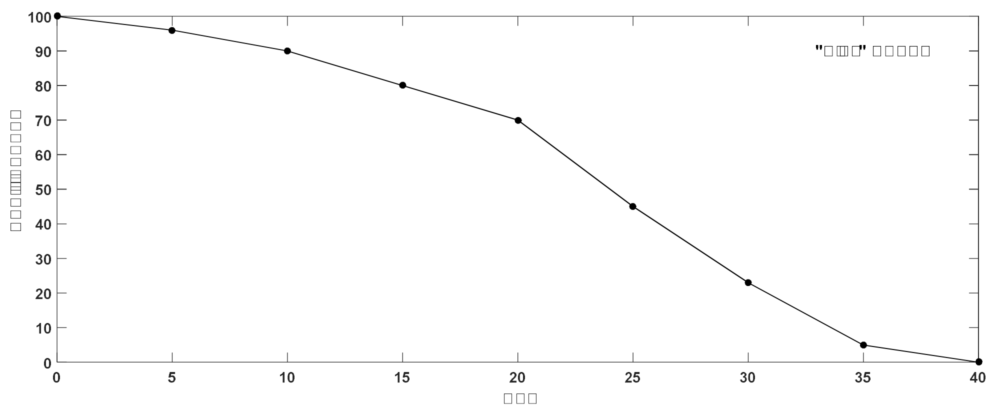
उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित समंकों के लिए एक आवृत्ति वक्र बनाइए :

वर्गान्तर (आयु वर्षों में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	50–60
विद्यार्थियों की संख्या	150	300	500	800	1000	900	400	100

हल (Solution) :

प्रश्न के सभी वर्गान्तर समान है। अतः सबसे पहले आयत बनेगा फिर आयत के शीर्ष के मध्य बिन्दु को मुक्त हस्त निष्कोण रेखाओं द्वारा मिला दिया गया है :



7.8.5 संचयी आवृत्ति वक्र या ओजाइव (तोरण) :

ओजाइव या संचयी आवृत्ति वक्र है जो ग्राफ पेपर पर संचयी आवृत्तियों को अंकित करके बनाया जाता है। इसकी रचना दो प्रकार से की जा सकती है :

1. **'से कम' विधि या ऊपरी सीमाओं की ओर बढ़ती हुई संचयी आवृत्तियाँ** : इस विधि में हम निचली सीमाओं से आरंभ करते हैं और आवृत्तियों को जोड़ते जाते हैं। उदाहरण के लिए एक श्रृंखला में 0–5, 5–10 तथा 10–15 वर्गान्तर हों, तो हम 5 से कम की आवृत्तियाँ निकालेंगे फिर 10 से कम और फिर 15 से कम की आवृत्तियां निकालेंगे। इन आवृत्तियों को जोड़कर बढ़ता हुआ वक्र बना लिया जाता है, 'से कम ओजाइव'

2. **'से अधिक' विधि या निचली सीमाओं की ओर घटती हुयी संचयी आवृत्तियाँ** : इस विधि में हम उपरी सीमाओं से आरंभ करके आवृत्तियों को घटाते जाते हैं। उदाहरण के लिए अगर एक श्रृंखला में 0–5,

5–10 तब 10–15 वर्गान्तर हो, तो हम 0 से अधिक आवृत्तियाँ निकालेगें, फिर 5 से अधिक और फिर 10, से अधिक आवृत्तियाँ निकालेगें। प्राप्त आवृत्तियों को जोड़ से एक घटता हुआ वक्र प्राप्त होता है जिसे हम 'से अधिक ओजाइव' (More than ogine) कहते हैं।

उदाहरण (Illustration) :

वाणिज्य के प्रश्नपत्र में प्राप्त अंकों का ब्योरा आवृत्ति वितरण द्वारा प्रस्तुत किया गया है। इसके आधार पर 'से कम' ओजाइव और 'से अधिक' ओजाइव बनाइए।

अंक	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
विद्यार्थियों की संख्या	4	6	10	10	25	22	18	5

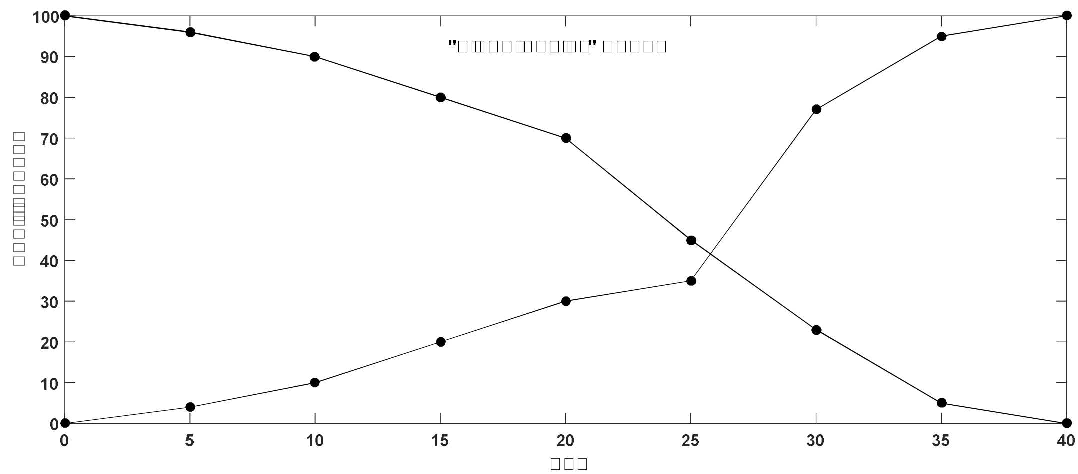
हल (Solution) :

(i) सबसे पहले 'स कम' तथा 'से अधिक' के आधार पर संचयी आवृत्ति की सारणी बना लेना चाहिए। जो निम्न है :–

संचयी आवृत्ति सारणी
(Cumulative frequency table)

से कम 'ओजाइव'		से अधिक 'ओजाइव'	
अंक	संचयी आवृत्ति	अंक	संचयी आवृत्ति
5 से कम	4	0 से अधिक	4
10 से कम	4+6 = 10	5 से अधिक	100–4 = 96
15 से कम	10+10 = 20	10 से अधिक	96–6 = 90
20 से कम	20+10 = 30	15 से अधिक	90–10 = 80
25 से कम	30+25 = 55	20 से अधिक	80–10= 70
30 से कम	55+22 = 77	25 से अधिक	70–25 = 45
35 से कम	77+18 = 95	30 से अधिक	45–22 = 23
40 से कम	95+5 = 100	35 से अधिक	23–18 = 5
		40 से अधिक	5–5 = 0

रेखाचित्र (अ), (ब) तथा (स) में X–अंक्ष पर अंक तथा Y–अंक्ष पर संचयी आवृत्तियों या विद्यार्थियों की संख्या को प्रकट किया गया है। चित्र (अ) में 'से कम' का संचयी आवृत्ति वक है। चित्र (ब) में 1 से अधिक संचयी आवृत्ति वक्र है। चित्र (स) में दोनों प्रकार के संचयी आवृत्ति के वक्र संयुक्त रूप में दिखाए गये हैं।



7.9 काल–श्रेणी के रेखाचित्र (**Time Series Graphs**) :

काल–श्रेणी अर्थात समय समंक माला को सतत् वक्रों के रूप में प्रदर्शित किया जाता है तो ऐसे रेखाचित्रों को काल–श्रेणी के रेखाचित्र कहते हैं। काल–श्रेणी के चित्रों की रचना में समय (वर्ष, माह, सप्ताह आदि) को सदा भुजाक्ष पर (X-axis) तथा मूल्यों को कोटि– अक्ष (Y-axis) पर अंकित चित्र दो प्रकार की माप श्रेणियों के आधार पर बनाये जा सकते है–

(अ). प्राकृतिक माप श्रेणी द्वारा या,

(ब). अनुपात माप श्रेणी के आधार पर।

7.9.1 प्राकृतित माप श्रेणी के कालिक चित्र (**Historigram on Natural Scale**) :

यदि समय श्रेणी से संबंधित निरपेक्ष मूल्यों (Absolute Values) को साधारण बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रदर्शित करनाहो तो प्राकृतिक माप श्रेणी का प्रयोग किया जाना उचित होता है। क्योंकि यह गणितीय वृद्धि (Arithmetic Progression) का प्रदर्शन करने के लिए उपयुक्त समझी जाती है। इसके आधार पर यदि कोटि अक्ष पर पैमाना 1 से0मी0 = 10 इकाइयात्र तो 2 से0मी0 = 20 इकाइयाँ 3 से0मी0 = 30 इकाइयाँ आदि। ये भी दो प्रकार के हो सकते हैं :–

1. निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Historigram) : जब काल श्रेणी (कालिक–चित्र) के रेखाचित्र के लिए समंक श्रेणी के ही मौलिक समंकों या मूल राशियों को प्रांकित किया जाता है तो उसे निरपेक्ष कालिक चित्र कहते हैं। इसमें निरपेक्ष मूल्यों, जैसे टन, किलोग्राम, किलोमीटर, रूपये आदि का प्रयोग किया जाता है।

3. निर्देशांक (Index Historigram) : जब वास्तविक मूल्यों के स्थान पर उन मूल्यों के सूचकांको अर्थात् सापेक्ष मूल्यों को बिन्दुरेखीय पत्र पर अंकित किया जाता है तो वह रेखाचित्र निर्देशांक कालिक चित्र कहलाता है।

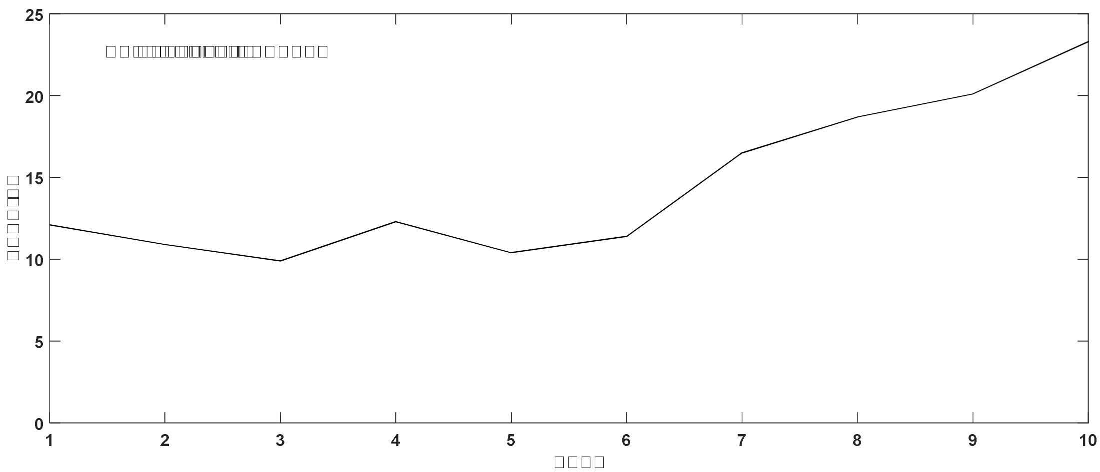
उदाहरण (Illustration) : (एक काल श्रेणी), (निरपेक्ष कालिक–चित्र) उत्तर प्रदेश में गत दस वर्षों के गेहूँ उत्पादन (दस टन में) के निम्न सूत्र आँकड़ों को उपुयक्त रेखाचित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए–

वर्ष	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
गेहूँ उत्पादन (दस लाख टन)	12.1	10.9	9.9	12.3	10.4	11.4	16.5	18.7	20.1	23.3

हल (Solution) : भुजाक्ष पर 1 से0मी0 = 1 वर्ष और कोटि अक्ष पर 1 से0मी0 = 2.5 (दस लाख टन) का मापदण्ड लिया गया है।

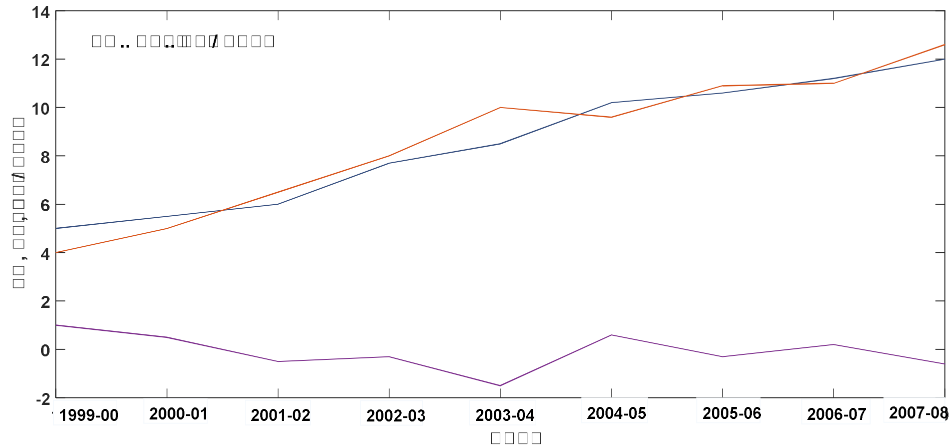
उत्तर प्रदेश में गेहूँ का उत्पादन

उदाहरण (Illustration) : (एक से अधिक काल–श्रेणी), (निरपेक्ष कालिक चित्र) नगर प्रयागराज की आय,



व्यय और बचत। घाटे के निम्नलिखित समंकों को विन्दुरेखीय चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए–

वर्ष (आय करोड़ रू0)	5.0	5.5	6.0	7.7	8.5	10.2	10.6	11.2	12.0
व्यय (करोड़ रू0)	4.0	5.0	6.5	8.0	10.0	9.6	10.9	11.0	12.6
बचत (+)/घाटा (–)	+1.0	+0.5	–0.5	–0.3	–1.5	+0.6	–0.3	+0.2	–0.6



नोट : निर्देशांक कालिक चित्र सूचकांकों को प्रांकित करके बनाए जाते है, इनसे सापेक्षिक परिवर्तनों का आभास होता है। ये भी एक या अधिक चर मूल्यों को प्रदर्शित करने के लिए बनाये जा सकते हैं। इन्हें बनाने की विधि निरपेक्ष कालिक चित्रों की ही भाँति है।

7.9.2 अनुपात माप श्रेणी (Ratio Scale) :

काल श्रेणी में होने वाले (Relative) या अनुपातिक परिवर्तनों को आंकित करने के लिए अनुपात माप श्रेणी (Ratio Scale) या अर्द्ध लघुगणकीय मापदण्ड (Semi-Logarithmic Sales) का प्रयोग किया जाता है। अनुपात माप श्रेणी द्वारा ज्यामितीय वृद्धि अर्थात् 1,2,4,8,16,32,64 आदि का प्रदर्शन होता है।

अनुपात माप–श्रेणी पर रेखाचित्र की रचना निम्न दो रीतियों द्वारा की जा सकती–

(अ). मूल्यों के लघुगणकीय (Logs) को साधारण बिन्दुरेखा पत्र के उदग्र मापदण्ड पर आंकित करे।

(ब). मूल्यों के लघुगणकीय बिन्दुरेखा–पत्र (Semi-Logarithimic Graphy paper) पर आंकित करके। द्वितीय रीति सरल है किन्तु लघुगणकीय रेखापत्र आसानी से उपलब्ध न होने के कारण अधिकतर प्रथम रीति का प्रयोग किया जाता है।

7.10 बोध प्रश्न :

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें –

1. जहाँ सारणी का कार्य समाप्त होता है, वहाँ से .... व .... का कार्य आरंभ होता है।
2. चित्र .... के अनुपात में बनाये जाते हैं।
3. आयत चित्र .... प्रकार के होते हैं।
4. रेखाचित्र .... पर बनाए जाते हैं।
5. चित्र तथा बिन्दुरेखा समंकों को .... व .... ढ़ंग से प्रस्तुत करने की प्रविधियाँ है।

सत्य एवं असत्य छाटिएँ :

1. सारणी में आकर्षण का अभाव होता है।
2. एक चित्र हजार शब्दों के बराबर होताहै।

3. चित्रों का रचना एक विशिष्ट योग्यता वाला कार्य नहीं है।

4. चित्रों में चिन्हों का प्रयोग नहीं होता है।

5. असमान वर्गान्तर वाले आयत चित्र के लिए समायोजित तत्व को निकालने की आवश्यकता होती है।

7.11 बोध प्रश्नों के उत्तर :

रिक्त स्थानों की पूर्ति वालें प्रश्नों के उत्तर :–

1. चित्र, रेखाचित्र; 2, समंक : 3. दो; 4. ग्राफ पेपर (बिन्दुरेखीय–पत्र), 5. आकर्षक, प्रभावी।

सत्य एवं असत्य प्रश्नों के उत्तर :–

1. सत्य; 2. सत्य; 3. असत्य; 4. सत्य; 5. सत्य।

7.12 स्वपरख प्रश्न :

1. समंकों के प्रदर्शन हेतु किन–किन विधियों का प्रयोग किया जाता है।

2. चित्रमय प्रदर्शन की उपयोगिता पर प्रकाश डालिये।

3. चित्र रचना के नियम की व्याख्या कीजिए।

4. चित्रों तथा विन्दुरेखा चित्रों में अंतर स्पष्ट कीजिए।

5. निम्नलिखित आँकड़ों को आयत चित्र के रूप में प्रकट कीजिए।

मध्य मूल्य	115	125	135	145	155	165	175	185	195
माप	6	55	48	72	116	60	38	22	3

6. निम्नलिखित आँकड़ों से 'से कम' और 'से अधिक' संचयी आवृत्ति वक खीजिऐं

भार (क्रिलों ग्राम में)	30–34	35–39	40–44	45–49	50–54	55–59	60–64
आवृत्ति	3	5	12	18	14	6	2

7. निम्नलिखित आँकड़े वर्ष 2015–22 में दो फर्मों अ तथा ब के बिक्री के आँकड़े हैं। इन आँकड़ों को उचित पैमाना मानते हुए ग्राफ पर प्रदर्शित कीजिए :–

वर्ष	फर्म 'अ' की बिक्री (000 इकाईयों में)	फर्म 'ब' की बिक्री (000 इकाईयों में)
2015	15	4
2016	17	9
2017	20	11
2018	19	12
2019	25	8
2020	28	10
2021	29	13
2022	27	12

////

ठकाई – 8 केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप :

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य

8.1 प्रस्तावना

8.2 परिचय

8.3 अच्छे औसत की विशेषता

8.4 गणितीय माध्य

8.5 भारत गणितीय माध्य

8.7 बहुलक

8.8 गुणोत्तर माध्य

8.9 हरात्मक माध्य

8.10 बोध–प्रश्न

8.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

8.12 स्व परख प्रश्न

8.0 उद्देश्य :

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- आँकड़ों के बहुत बड़े समूह को समझ पायेगें।
- समस्त वर्ग का उचित प्रतिनिधित्व करने वाले औसत कौन–कौन है? को जानेगें।
- विभिन्न प्रकार के माध्यों की गणना कैसे की जाती हैं? की गणना सीख पायेगें।

8.1 प्रस्तावना :

केन्द्रीय प्रवृत्ति से अभिप्राय किसी सांख्यिकी श्रृंखला के औसत या केन्द्रीय मूल्य से है। इस भाग में केन्द्रीय मूल्य को ही ज्ञात करने के विभिन्न पहलुओं एंव विधियों का विश्लेषण किया गया है। उसके बाद सैद्धान्तिक एवं व्यावहारिक प्रश्नों को कैसे हल किया जाता है का विस्तार से विश्लेषण किया गया है।

8.2 परिचय :

केन्द्रीय प्रवृत्ति से आशय किसी समंक माला के औसत या केन्द्रीय मूल्य से है। किसी भी मनुष्य के लिए आँकड़ों के एक बहुत बड़े समूह को समझना या याद रखना कठिन होता है। इसलिए वह ऐसे मूल्य का ज्ञान प्राप्त करना पसंद करेगा जो किसी श्रेणी के सभी ऑकड़ों की विशेषताओं का प्रतिनिधित्व करता हो। इस प्रकार के मूल्य को 'केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप' अथवा 'औसत' या 'माध्य' कहा जाता है। उदाहरण के लिए भारत की कुल जनसंख्या के आय सम्बन्धी आँकड़ो को समझना तथा याद रखना कठिन कार्य होगा, परन्तु यदि कहा जाए कि 2020–21 में भारत के लोगों की अनुमानित औसत आय रू0–1,04,943 प्रति वर्ष है तो हम सरलता से भारत के अधिकतर लोगों की आर्थिक स्थिति का अनुमान लगा सकेगें। इस औसत मूल्य को ही श्रृंखला का केन्द्रीय माप कहा जाता है। इसे स्थिति संबंधी माप भी कहते है। अतएव केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप से अभिप्राय सांख्यिकीय विश्लेषण की उन विधियों से हैं, जिनके द्वारा किसी श्रेणी के चर का ऐसा मूल्य अर्थात् औसत ज्ञात किया जाता है, जो सभी श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है।

सबसे पहले 'से कम' तथा 'से अधिक' के आधार पर संचयी आवृत्ति की सारणी बना लेना चाहिए। जो निम्न हैं–

क्राक्सटन तथा काउडेन के अनुसार– "आँकड़ों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित एक ऐसे मूल्य को जिसका प्रयोग श्रृंखला के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है, औसत कहा जाता है। चूँकि औसत श्रृंखला के विस्तार के अन्तर्गत स्थित होता है, इसलिए इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप भी कहा जाता है।''

क्लार्क अनुसार– ''औसत वह संख्या है जो समस्त वर्ग का प्रतिनिधित्व करती है।''

उद्देश्य व कार्य– ''सांख्यिकी विज्ञान में माध्यों का बहुत महत्वपूर्ण स्थान है। इसी कारण बाउले **(Bowley)** ने ''सांख्यिकी को औसतों का विज्ञान'' **(A Science of Averages)** कहा है। मोरोन के अनुसार, 'औसत का उद्देश्य व्यक्तिगत मूल्यों के समूह का सरल व संक्षिप्त रूप में प्रतिनिधित्व करना है जिससे कि मस्तिष्क समूह की इकाइयों के सामान्य आकार को शीघ्रता से समझ सके।''

औसतों के मुख्य कार्य व उद्देश्य निम्नलिखित है–

1. संक्षिप्त विवरण औसत का मुख्य उद्देश्य जटिल और अव्यवस्थित ऑकड़ों की मुख्य विशेषताओं का एक संक्षिप्त विवरण प्रस्तुत करता है। फलस्वरूप ऑकड़ों को समझना सरल हो जाता है।

2. **तुलना** : औसत की सहायता से ऑकड़ों के दो या दो से अधिक समूहों की तुलना की जा सकती है। उदाहरण के लिए भारत तथा रूस की प्रति व्यक्ति आय की तुलना करके निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि भारत की प्रति व्यक्ति आय रूस की प्रति व्यक्ति आय की तुलना में कम है। इसलिए भारत एक गरीब देश है।

3. **नीति निर्धारण** : आर्थिक नीतियों के निर्धारण में औसत के अनुमान से सहायता मिलती है। जैसे–भारत की प्रतिवर्ष औसत आय रू0– 1,04.943 है। यह अन्य देशों की तुलना में बहुत कम है। इसलिए इस प्रकार की नीतियाँ बनाई जाए जिससे इस आय में वृद्धि की जा सके।

4. **सांख्यिकीय विश्लेषण** : सांख्यिकीय विश्लेषण काफी सीमा तक औसत के अनुमान पर आधारित है। उदाहरण के लिए किसी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा विभिन्न विषयों में प्राप्त अंकों का औसत निकाल कर यह विश्लेषण किया जा सकता है कि किस विषय में विद्यार्थी अधिक कमजोर है।

5. **सभी के लिए एक मूल्य** : एक औसत किसी समूह की सभी विशेषताओं का प्रतिनिधित्व करता है। एक मूल्य सारी श्रृंखला का प्रतिनिधित्व है। इसलिए इसकी सहायता से पूरे समूह के विषय में निष्कर्ष निकाले जा सकते है।

8.3 अच्छे औसत की विशेषता :

एक अच्छे और संतोषजनक औसत में निम्नलिखित विशेषताएं (गुण) होने चाहिए :

1. **स्पष्ट और स्थिर परिभाषा** : एक अच्छा औसत स्पष्ट और स्थिर परिभाषा वाला होना चाहिए। यदि केवल सांख्यिक के अनुमान पर आधारित है तो उससे समंक श्रेणी की वास्तविक विशेषताओं का उचित प्रतिनिधित्व नहीं हो सकेगा और विभिन्न व्यक्ति उनका अलग–अलग अर्थ लगाऐगें।

2. **सभी मूल्यों पर आधारित** : एक अच्छा औसत वह होता है जो सारे समूह के मूल्यों पर आधारित हो अर्थात् समूह की विशेषताओं का प्रतिनिधित्व करता हो।

3. **सरलता** : औसत ऐसा होना चाहिए जिसे समझने में सरलता हो और जो सरलता से निकाला जा सकता हो।

4. **निश्चितता** : औसत एक निश्चित संख्या होनी चाहिए तभी उसको आर्थिक विश्लेषण के किया आधार के रूप में प्रयोग किया जा सकता है।

5. **निरपेक्ष (Absolute) संख्या** : औसत एक निरपेक्ष संख्या होनी चाहिए। प्रतिशत या अन्य किसी सापेक्ष (Relative) रीति से व्यक्त संख्या उचित औसत नहीं कहलाती।

6. **प्रतिदर्श के परिवर्तन का न्यूनतम प्रभाव** : औसत का यह गुण होना चाहिए कि यदि एक ही समूह में से प्रतिदर्श लेकर औसत निकाले जाए तो उनके मूल्यों में अधिक अन्तर नहीं होना चाहिए।

7. **बीजगणितीय विवेचना** : औसत ऐसा होना चाहिए कि उसका गणितीय तथा बीज गणितीय विवेचन सम्भव हो सके।

8.4 गणितीय माध्य :

एक अच्छे और संतोषजनक औसत में निम्नलिखित विशेषताएं (गुण) होने चाहिए :

गणितीय माध्यों में सबसे अधिक महत्वपूर्ण और लोकप्रिय समान्तर माध्य (Arithmetical Average or Mean) है। वास्तव में, जब हम सामान्य भाषा में 'औसत' शब्द का प्रयोग करते हैं तो हमारा तात्पर्य समान्तर माध्य से ही होता है। किसी श्रेणी का समान्तर माध्य वह मूल्य है जो उस श्रेणी के सभी मूल्यों के योग को उनकी संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। यदि पाँच विद्यार्थियों का गणित के प्रश्न–पत्र में प्राप्तांक क्रमशः 50, 62, 48, 58 और 57 अंक है तो उनके प्राप्तांकों का समान्तर माध्य 55 अंक होगा जो कि अंकों के जोड़ 275 को उनकी संख्या 5 से भाग देने पर ज्ञात होता है। समान्तर माध्य को प्रतीक $\bar{x}$ से चिन्हित किया जाता है।

समान्तर माध्य का परिकलन (Calculation of Airthmatic Mean) : समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित दो रीतियाँ प्रयोग में लायी जाती है–

1. **प्रत्यक्ष रीति** : इस रीति में समंक माला के सभी मूल्यों (X_1, X_2---X_n) को जोड़कर योग $\sum x$ प्राप्त कर लिया जाता है, तत्पश्चात् उनकी संख्या (N) से भाग दे दिया जाता है। यह रीति अत्यन्त सरल है। परन्तु इसका प्रयोग ऐसी श्रेणियों में ही संख्या कम हो तथा वे दशमलव में न हों।

2. **लघु रीति (Short cut Method)** : जब मूल्यों की संख्या अधिक हो, वे अधिकतर दशमलव में हो और आपस में बहुत भिन्न न हो, तब लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य का निर्धारण उचित होता है। इस रीति के अन्तर्गत श्रेणी के किसी सुविधाजनक मूल्य (प्रायः मध्य का मूल्य) को कल्पित माध्य। मानकर प्रत्येक मूल्य से उसका विचलन (d=x-A) निकाल लिया जाता है। फिर विचलनों के योग ($\sum d$) को उनकी संख्या (N) से भाग देकर जो अंक प्राप्त होता है उसे उसके बीजगणितीय चिन्ह + या – के अनुसार कल्पित माध्य में जोड़ने या घटाने से समानतर माध्य ($\ddot{x}$ ज्ञात कर लिया जाता है। यह रीति समान्तर माध्य के इस महत्वपूर्ण गुण पर आधारित है कि समान्तर माध्य से श्रेणी के सभी मूल्यों के विचलनों का जोड़ शून्य होता है।

नोट : दोनो रीतियों से प्राप्त परिणाम एक ही होता है।

व्यक्तिगत व्यक्ति श्रृंखला में सरल समान्तर माध्य की गणना :

1. प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) : निम्नलिखित प्रक्रिया का पालन करते हुए व्यक्तिगत श्रृंखला का समान्तर माध्य निकाला जाता है–

(अ). श्रृंखला के सभी मदों (X) के मूल्यों को जोड़ ले अथात $\sum x$ ज्ञात कर लें।
(ब). श्रृंखला के सभी मदों की कुल संख्या (छ) ज्ञात कर लें।
(स). सभी मदों के मूल्यों के जोड $\sum x$ को मदों की कुल संख्या (N) से भाग कर दे जो भजनफल आएगा वह समान्तर माध्य होगा।

नोट : व्यक्तिगत श्रृंखला में मदों की आवृत्तियों (Frequency) नहीं होती है।

उदाहरण (Illustration) : 10 विद्यार्थियों का जेब खर्च (रू में) निम्नलिखित है, प्रत्यक्ष विधि द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए –

15	20	30	22	25	18	40	50	55	65

हल (Solution) : जेब खर्च रूपये में–

(X)
15
20
30
22
25
18
40
50
55
65
$\sum x = 340$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 .... + X_{10}}{10} = \frac{340}{10} = 34$$

दस विद्यार्थियों का औसत जेब खर्च रू0 34 होगा।

2. **लघु रीति (Short Cut Method)** : 'समान्तर माध्य का सबसे महत्वपूर्ण बीजगणितीय अभिलक्षण यह होता है कि 'वास्तविक माध्य से, विभिन्न पद मूल्यों के विचलनों का बीजीय योगफल शून्य (0) होता है।

संकेताक्षरों के रूप में – $\sum (x-\bar{x})$ or $= \sum d = 0$

यदि वास्तविक समान्तर माध्य की बजाय किसी कल्पित मूल्य (arbitrary Value) माध्य मान लिया जाये तो विभिन्न पद मूल्यों के इस कल्पित माध्य (Assumed Mean) से निकाले गये विचलनों का योग शून्य नहीं होगा। इन विचलनों के औसत का कल्पित माध्य से समायोजन करने पर वास्तविक माध्य ज्ञात हो जाएगा। यही लघु रीति का आधार है। अत वास्तविक माध्य = कल्पित माध्य + संशोधन कारक

सूत्र (Farmula) $\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N} \sum dx = N \quad [\sum dx = (X - A)]$

A संकेताक्षर कल्पित माध्य के लिए प्रयुक्त होता है और ($\sum dx$ संकेताक्षर माध्य से पद मूल्यों विचलनों के जोड़ के लिए प्रयोग होता है।

प्रक्रिया –

(अ). दिये हुए मूल्यों में से किसी एक सरल मूल्य को कल्पित माध्य (assumed) मान लेना चाहिए। सैद्धान्तिक दृष्टिकोण से किसी भी मूल्य को कल्पित माध्य माना जा सकता है चाहे वह समंक श्रेणी से बाहर का ही क्यों न हो, परन्तु व्यवहार में ऐसे मूल्य को मानने से गणन–क्रिया सरल हो जाती है, जो सबसे कम हो, न सबसे अधिक, वरन लगभग मध्य का हो और सरल हो।

(ब). प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (X) में से कल्पित माध्य (A) घटाकर विचलन (d) ज्ञात कर लेना चाहिए।

$$dx = (X-A)$$

(स). विचलनों का बीजगणितीय जोड़ निकाल लेना चाहिए– $\sum dx$ or $\sum (X - A)$

(द). अन्त में निम्न सूत्र का प्रयोग करना चाहिए

$$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

उदाहरण (Illustration)

दस विद्यार्थियों का प्रति महीने जब खर्च निम्नलिखित है। लघु विधि द्वारा समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

जेब खर्च रूपये	15	20	30	22	25	18	40	50	55	65

हल (Salution) :

विद्यार्थियों की संख्या	जेब खर्च रूपये	कल्पित माध्य से विचलन (dx=XA); (A=40)
1	15	15−40 = 25
2	20	20−40 = 20
3	30	30−40 = 10
4	22	22−40 = 18 10
5	25	25−40 = 15
6	18	18−40 = 22
7	40	40−40 = 0
8	40 (A)	50−40 =+10
9	50	50−40 =+10 +50
10	55	65−40 =+25
N=10	65	$\sum dx = 110 + 50 = -60$

$$X = A + \frac{\sum dx}{N}$$

$$= 40 + \frac{-60}{10}$$

= 40−6=34 सामान्तर मध्य = रूपया 34 होगा।

खण्डित श्रृंखला में सरल समांतर माध्य की गणना :

खण्डित या विभिक्त आवृत्ति श्रृंखला में मदों के मूल्यों के साथ उनकी आवृत्तियाँ भी दी जाती है। इस प्रकार की श्रृंखला में सामान्तर माध्य ($\bar{X}$) निकालने के लिए निम्नलिखित तीन विधियों अपनाई जाती हैं :

1. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)
2. लघु रीति (Short Cut Method)
3. पद विचलन रीति (Step Deviation Method)

1. प्रत्यक्ष रीति : पहले वर्गान्तरों के मध्य मूल्य निश्चित कर लिए जाते है। इसके बाद वही प्रत्यक्ष क्रिया अपनायी जाती है जो खण्डित श्रेणी में प्रयुक्त की जाती है। असमान वर्गान्तर वाली श्रेणी में यह रीति उपयुक्त है।

2. लघु रीति : लघु रीति के अन्तर्गत वर्गान्तरों के माध्य मूल्य निकालकर वही क्रिया अनपाई जाती है जो खण्डित श्रेणी में प्रयोग की जाती है। संक्षेप में पहले किसी मध्य–मूल्य को कल्पित (A) मान लिया जाता है, फिर उससे प्रत्येक मध्य–मूल्य का विचलन (dx) ज्ञात किया जाता है तथा उसकी आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलाकें को जोड़ $\sum fdx$ निश्चित कर लिया जाता है। अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$X = A + \frac{\sum dx}{N}$$

उदाहरण (**Illustration**)

निम्नलिखित बंटन से किसी बाग में पेड़ों की ऊँचाई का समान्तर माध्य प्रत्यक्ष एवं लघु दोनों रीतियों से निकालिए–

ऊँचाई	संचयी आवृत्ति
7 से कम	26
14 से कम	57
21 से कम	92
28 से कम	134
35 से कम	216
42 से कम	287
49 से कम	341
56 से कम	360

हल (**Solution**) :

सर्वप्रथम उक्त संचयी आवृत्ति को साधारण अविच्छिन्न श्रेणी में बदला जायेगा। तत्पश्चात् समान्तर माध्य ज्ञात किया जायेगा–

प्रत्यक्ष रीति द्वारा :

समान्तर माध्य की गणना

ऊँचाई (फीट में)	मध्यमान (**M.V.**)	आवृत्ति (**M.V.**)	मध्य–मूल्यों व आवृत्तियों का गुणनफल (**fx**)
0–7	3.5	26.	91.0
7–14	10.5	57–26=31	325.5
14–21	17.5	92–57=35	612.5
21–28	24.5	134–92=42	1029.0
28–35	31.5	216.–134=82	2583.0
35–42	38.5	287–216=71	2733.5

42.49	45.5	341–287=54	2457.0
49–56	52.5	360–341=19	9975.
टोटल	M.V.= $\frac{L1+L2}{2}$	N=360	$\sum$ fdx10829.0

लघु रीति द्वारा :

समान्तर माध्य की गणना

ऊँचाई (फीट में)	मध्यमान X	आवृत्ति f	A=31.5 से विचलन (dx-XA)	विचलन व आवृत्तियों का गुणनफल (fdx)	
0–7	3.5	26.	–28	–728	
7–14	10.5	31	–21	–651	
14–21	17.5	35	–14	–490	=2136
21–28	24.5	42	–7	–294	
28–35	31.5	82	0	0	
35–42	38.5	**71**	+4	+497	
42.49	45.5	54	+14	+756	=+1652
49–56	52.5	19	+21	+399	

$$X = \frac{\sum fx}{N} = \frac{10829.0}{360} = 30.08 \text{ फीट}$$

3. पद विचलन या आ0 विचलन रीति (Step Devisation Method) :

यदि अविच्छिन्न में वर्ग विस्तार समान हो और वर्गान्तरों की संख्या भी अधिक हो तो पद विचलन लेकर लघु रीति को और भी सरल बनाया जा सकता है। इस रीति में कल्पित माध्य (A) से विभिन्न मध्य–बिन्दुओं के वास्तविक विचलनों को वर्ग विस्तार के बराबर समापवर्तनक (Common Factor) से भाग करके पद विचलन ज्ञात किये जाते है। अन्त में लघु रीति वाले सूत्र में $\sum fd$ की वर्ग विस्तार (i) से गुण कर दी जाती है। इस प्रकार गणन क्रिया अत्यन्त सरल हो जाती है।

प्रक्रियाएँ :

1. मध्य मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है।
2. मध्य मूल्य (X) में से कल्पित माध्य (A) को घटाकर विचलन (dx) निकाल लिया जाता है।
3. विचलन (dx) में वर्ग–विस्तार (i) से भाग देकर (dx) पद विचलन निकाल लिया जाता है।

   सूत्र $dx = \frac{X-A}{i}$
4. पद विचलन (dx) की आवृत्तियों (f) से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ ($\sum fdx$) निकाल लिया जाता है।
5. निम्न सूत्र का प्रयोग कर समान्तर माध्य की गणना कर ली जाती है–

सूत्र $X = A + \frac{\sum fdx}{N} xi$

उदाहरण (Illustration)

वाणिज्य के प्रश्न–पत्र में विद्यार्थियों में निम्नलिखित अंक प्राप्त किए है।

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	20	24	40	36	20

पद विचलन विधि द्वारा औसत अंक ज्ञात कीजिए–

वर्ग–विस्तार के बराबर समापवर्तक (Common factor) से भाग करके पद–विचलन ज्ञात किये जाते है। अंतः में लघु रीति वाले सूत्र में की वर्ग–विस्तार (i) से गुणा करक दी जाती है। इस प्रकार गणन–क्रिया अत्यन्त सरल हो जाती है।

प्रकियाएँ :– 1 मध्य–मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है।

2. मध्य मूल्य (X) में से कल्पित माध्य (A) को घटाकर विचलन (dx) निकाल लिया जाता है।

3. विचलन (dx) में वर्ग–विस्तार (i) से भाग देकर (dx) पद–विचलन निकाल लिया जाता है। सूत्र $\frac{X-A}{i}$

4. पद–विचलन (dx) की आवृत्तियों (f) से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ (εfdx) निकाल लिया जाता है।

5. निम्न सूत्र का प्रयोग कर समान्तर माध्य की गणना कर ली जाती है :–

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N} Xi$$

उदाहरण (Illusration) :

वाणिज्य के प्रश्न पत्र में विद्यार्थियों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किए है :–

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	20	24	40	36	40

पद–विचलन विधि द्वारा औसत अंक ज्ञात कीजिए–

हल (Solution) :

अंक	मध्य मूल्य M.V. = X $\frac{L_1+L_2}{2}$	विद्यार्थियों की संख्या (f)	विचलन dx A=25	पद विचलन dx= $\frac{dx}{i}$ i=10	पद विचलन तथा आवृत्ति का गुणनफल (fdx)
0–10	5	20	−20	−2	−40
10–20	15	24	−10	−1	−24
20–30	25	40	0	0	0
30–40	35	36	+10	+1	+36
40–50	45	20	+20	+2	+40
योग		$\sum f$ or N = 140			$\sum f ddx = 12$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdd}{\sum f} \text{ xi}$$

$$= 25 + \frac{12}{140} X\ 10$$

$$= 25 + 0.86 = \underline{25.86}$$

औसत अंक = 25.86

4. आंकलन या योग रीति (**Summatain Method**) :

समान वर्ग–विस्तार वाली अविच्छिन्न श्रेणी में समान्तर माध्य का निर्धारण आकलन या योग रीति द्वारा भी किया जा सकता है। परन्तु व्यवहार में, इस रीति का प्रयोग बहुत कम होता है। इसकी प्रक्रिया इस प्रकार है–

1. $\sum cf$ अर्थात संचयी आवृत्तियों का योग निकाला जाता है।
2. F अर्थात् संचयी आवृत्तियों के जोड़ को कुल इकाइयों की संख्या N से भाग

   सूत्र $F = \frac{\sum cf}{N}$ या $\frac{\sum cf}{\sum c}$
3. अंतिम वर्गान्तर का मध्य–मूल्य निश्चित करलिया जाता है। 'M'
4. निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :–

$$\bar{X} = M\text{-}I\ (F\text{-}1)$$

इसमें M = अधिकतम वर्ग का मध्य–विन्दु

i = वर्ग–विस्तार

F = संचयी आवृत्ति के योग को कुल संख्या से भाग से भाग देने पर प्राप्त संख्या है।

उदाहरण (**Illusration**) :

निम्न वितरण से आंकलन या योग रीति से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए :–

मदें	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
आवृत्ति	2	5	7	13	21	16	8	3

हल (**Solution**) :

मद **X**	आवृत्ति **f**	संचयी आवृत्ति
0–5	2	2
5–10	5	7
10–15	7	14
15–20	13	27
20–25	21	48
25–30	16	64
30–35	8	72
35–40	3	75
योग **Total**	**N=75**	309 = ($\sum cf$)

अधिकतम वर्ग का मध्य बिन्दु $M = \frac{35+40}{2} = \frac{75}{2} = 37.5$

वर्ग–विस्तार $i = 5$

$$F = \frac{\sum cf}{N} = \frac{309}{75} = 4.12$$

$$\begin{aligned}\bar{X} &= M - i\,(F-1) = 37.5\ (4.12 - 1)\\ &= 37.5 - 5X3.12\\ &= 37.5 - 15.60\\ &= 21.9\end{aligned}$$

सामूहिक समान्तर माध्य (Conbined Arithmetic mean) : यदि किसी समूह के दो या अधिक भागों के अलग–अलग समांतर माध्य और उन भागों में पदों की सामूहिक समान्तर माध्य भी ज्ञात किया जा सकता है। सामूहिक समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है–

$$\bar{X}c = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2 + \bar{X}_3 N_3 + ----\bar{X} N_{N^N}}{N_1 + N_2 + N_3 ---- \ N_N}$$

$\bar{X}c$ = सामूहिक समान्तर माध्य

$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ = इत्यादि विभिन्न विभागों के समान्तर माध्य है।

$N_1 + N_2 + N_3$ = आदि विभिन्न विभागों में इकाइयों की संख्या है।

उदाहरण (Illusration) :

निम्नलिखित आँकड़ों से सामूहिक समांतर माध्य ज्ञात कीजिए :–

	कारखाना	
	A	B
मजदूरों की संख्या	250	200
औसत दैनिक मजदूरी	रू0 40	रू0 50

हल (Solution) : **सामूहिक माध्य (Combined Average)**

$$\bar{X}c = \frac{\left(\bar{X}_1, N_1 + \bar{X}_2 N_2\right)}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{(40X250)+(50X20\ \ )}{250+200}$$

$$= \frac{20{,}000}{450} = 44.44$$

∴ सामूहिक माध्य मजूदरी = रू0 44.44

सामान्तर माध्य के बीजगणितीय गुण (Algebraic Propeties of the Arithmetic Mean) :

समांतर माध्य में निम्नलिखित बीजगणितीय गुण पाये जाते हैं, इसलिए सांख्यिकीय रीतियों में इसका अत्यधिक प्रयोग होता हैं :–

1. समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों का बीजगणितीय जोड़ शून्य होता है, अर्थात् यही कारण है कि $\sum d = 0$ । यही कारण है कि समांतर माध्य ज्ञात करने के लिए लघु रीति का प्रयोग किया जाता है।

2. समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों के वर्गो (Squares) का जोड़ न्यून्तम होता है अर्थात् $\sum d =$ न्यून्तम। दूसरे शब्दों में श्रेणी के किसी अन्य मूल्य से निकाले गये विचलन वर्गों के जोड़ की तुलना में समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों के वर्गों का जोड़ कम होता है।

3. **अज्ञात मूल्य का निर्धारण** : $\bar{X}$, N व $\sum x$ में से कोई दो माप ज्ञात हो तो तीसरा माप ज्ञात किया जा सकता है–

$$\bar{X}, = \frac{\sum x}{N} ; \sum x = \bar{X} \, X \, N ; N = \frac{\sum x}{\bar{X}}$$

इस गुण के आधार पर समान्तर और पदों की संख्या की गुणा करके पदों का कुल मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। अज्ञात या रिक्त मूल्यों व आवृत्तियों के निर्धारण तथा अशुद्धियों के निवारण में इस गुण का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (Illusration) :

100 छात्रों के औसत प्राप्तांक 40 थे। बाद में यह पता लगा कि एक विद्यार्थी के अंक 74 के स्थान पर गलती से 14 पढे गये। ठीक औसत प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

100 छात्रों के कुल प्राप्तांक = 40X 100 = 4000

उनके प्राप्तांकों का सही जोड़ = 400 – 14+74 = 4060

∴ सही औसत प्राप्तांक = $\frac{4060}{100} = 40.6$ अंक

4. अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण : यदि $\bar{X}$,N और $\sum x$ में से कोई दो मान ज्ञात है तो बाकी तीसरा मान ज्ञात किया जा सकता है अर्थात् –

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N} ; \sum fx = \bar{X} \, XN ; N = \frac{\sum fx}{\bar{X}}$$

इन सूत्रों के आधार पर किसी समूह मे अज्ञात आवृत्ति का निर्धारण किया जा सकता है। अज्ञात आवृत्ति को 'f' मानकर तथा प्रत्यक्ष सूत्र का प्रयोग करके एक सरल समीकरण उपलब्ध कर लिया जाता है जिसके आधार पर 'f' का मान निश्चित किया जाता है।

उदाहरण (Illusration) :

निम्न आवृत्ति बंटन में समान्तर माध्य का मान 18 हो तो आवृत्ति ज्ञात कीजिए–

वर्गान्तर	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
आवृत्ति	3	6	9	13	?	5	4

हल (**Solution**) :

अज्ञात आवृत्ति को f मानकर उसको इस प्रकार ज्ञात किया जायेगा–

अज्ञात आवृत्ति निर्धारण

वर्ग	मध्य बिन्दु X	आवृत्ति f	विचलन fx
11–13	12	3	36
13–15	14	6	84
15–17	16	9	144
17–19	18	13	234
19–21	20	? f	20f
21–23	22	5	110
23–25	24	4	96
योग		$N = 40 + f$	$\sum fx = 704 + 20f$

$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$

$18 = \frac{704+20f}{40+f}$

$18\left(\frac{40+f}{}\right) = 704 + 20f;$

$720+18f = 704 + 20f$

$18f-20f=704-720$

$-12f = -16$

$\therefore f = \frac{-16}{-2}$ or 8 $\therefore =$ अज्ञात आवृत्ति 8 है।

5. **किसी नियतांक (Constant)** द्वारा प्रत्येक मुख्य को प्रभावित करने पर माध्य भी उसी प्रकार प्रभावित होती है। अर्थात् प्रत्येक मूल्य में से एक स्थिरांक जोड़ने पर व घटाने या मूल्य को उस अंक से गुणा या भाग करने पर माध्य भी इन क्रियाओं के अनुरूप बदलती रहती है।

मूल्यों पर गणितीय क्रियाएँ	नियतांक (2)	माध्य पर प्रभाव
(क). 1+2, 2+2, 3+2, 4+2, 5+2	+2	3+2
(ख). 1–2, 2–2, 3–2, 4–2, 5–2	–2	3–2
(ग). 1 x 2, 2 X 2, 3 X 2, 4 X 2, 5 X 2	x 2	3 x 2
(घ). 1÷2, 2÷2, 3÷2, 4÷2, 5÷2	÷2	3÷2

6. **दो श्रेणियों के तत्संवादी मूल्यों (Corresponding Value)** : के सभी जोड़ों व अन्तरों का समान्तर माध्य, दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों के योग या अन्तर के बराबर होता है। निम्न सारणी से यह विशेषता स्पष्ट होता जाती है–

अ	ब	अ+ब	अ–ब
49	7	56	42
53	12	65	41
56	25	81	31
58	41	99	17
59	65	124	–6
योग 275	150	425	125
माध्य 55	30	85 (55+30)	25 (55–30)

नोट : उपयुक्त बीजगणितीय गुणों के कारण ही अन्य सांख्यिकीय रीतियों जैसे अपकिरण, विषमता, सह–संबंध इत्यादि में समान्तर माध्य का काफी प्रयोग किया जाता है।

लाभ : समान्तर माध्य के निम्नलिखित लाभ है–

क. **सरलता** : सांख्यिकीय माध्यों में समान्तर माध्य सबसे अधिक सरल व बोधगम्य है।

ख. **सभी मूल्यों पर आधारित** : समान्तर माध्य श्रेणी के सभी–मूल्यों पर आधारित होता है यह गुणा बहुलक तथा मध्यका में नही पाया जाता है।

ग. **निश्चितता** : समान्तर माध्य सदैव निश्चयात्मक होता है। उसका निर्धारण करने में आन्तरगणन या अनुमान का प्रयोग नहीं किया जाता है।

घ. **बीजगणितीय विवेचन** : समान्तर माध्य में अनेक बिजगणितीय गुण होते है जिनके कारण उच्चतर सांख्यिकी विश्लेषण में इसका अधिक प्रयोग किया जाता है।

ड़. **स्थिरता** : समान्तर माध्य पर प्रतिचयन के परिवर्तनों का सबसे कम प्रभाव पड़ता है। एक समग्र में यदि दैव प्रतिचयन के आधार पर यथेष्ट मात्रा में अनेक प्रतिदर्श निकाले जाएं तो उनके समान्तर माध्य लगभग समान होगें।

उपर्युक्त गुणों के कारण ही समान्तर माध्य को आदर्श माध्य माना जाता है।

दोष या सीमाएँ : निम्नलिखित दोषों के कारण ही समान्तर माध्य की उपयोगिता कुछ कम हो जाती है।

क. **चरम मूल्यों का प्रभाव** : समान्तर माध्य वैसे तो श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है लेकिन इस श्रेणी में यदि कोई मूल्य अधिक है या कम है तो वह समांतर माध्य को प्रभावित करता है। जैसे किसी गाँव के व्यक्तिगत लाभ में राम की आय 50,000 है तो क्रमशः श्याम, घनश्याम एवं भरत की आय 5000, 7000 एवं 8000 है तो चारों की आय का समांतर माध्य 13000 होगा जो कि इस तरह का प्रतिनिधि नहीं कहा जा सकता। इस पर रूपये 50,000 का अधिकतम प्रभाव पड़ा है।

ख. **अप्रतिनिधि तथा अवास्तविक** : प्रायः ऐसा पाया जाता है कि समान्तर माध्य ऐसा कोई मूल्य होता है, जो समंक श्रेणी से बाहर है। अतः वह श्रेणी का पूर्ण रूप से प्रतिनिधत्व नही करता।

ग. **गणना संबंधी कठिनाइयाँ** : स्थिति माध्यों की अपेक्षा समान्तर माध्य की गणना अधिक कठिन है। यदि कोई एक मूल्य भी अज्ञात हो तो पूरी श्रेणी का समान्तर माध्य ज्ञात नहीं किया जा सकता, क्योंकि वह सभी मूल्यों पर आधारित होती है। समान्तर माध्य का बिन्दुरेखीय निर्धारण भी नहीं किया जा सकता।

घ. **भ्रमात्मक निष्कर्ष** : समान्तर माध्य से समंक–श्रेणी की रचना या बनावट का ठीक–ठीक पता नहीं चलता। अतः समंक मालाओं के समान्तर माध्यों की तुलना से कभी–कभी गलत और भ्रामक निष्कर्ष निकलते हैं।

ङ. **अनुपयुक्तता** : अनुपात, दर व प्रतिशत आदि का अध्ययन करने के लिए समान्तर माध्य सर्वथा अनुपयुक्त है।

उपयोग : समान्तर माध्य सामाजिक व आर्थिक समस्याओं के विवेचन के लिए यह बहुत उपयोगी है। औसत मूल्य, औसत आय, औसत उत्पादन, औसत वर्षा आदि ज्ञात करने में समान्तर माध्य का ही प्रयोग होता है।

8.5 भारित गणितीय माध्य :

व्यवहार में अनेक श्रेणियों में विभिन्न मूल्यों का अलग–अलग सापेक्षिक महत्व होता है। सिकी पद का अधिक महत्व होता है तो किसी का कम। ऐसी श्रेणियों में मूल्यों का समान्तर माध्य निकालते समय उनके सापेक्षिक महत्व को ध्यान में रखना अत्यन्त आवश्यक है। इकाइयों का सापेक्षिक महत्व किसी निर्दिष्ट आधार पर निश्चित अंकों द्वारा व्यक्त किया जाता है, इन्हीं अंकों को भार (Weight) कहते हैं तथा भारों के आधार पर निर्धारित किया गया समान्तर माध्य, भारित समान्तर माध्य कहलाता है।

भारित समान्तर माध्य की गणना :

भार दो प्रकार के हो सकते हैं– वास्तविक तथा अनुमानित। वास्तविक भार वे होते हैं जो स्पष्ट रूप से दिये होते है, या जो समंकों की प्रकृति के आधार पर सम्बन्धित तथ्यों की सहायता से निश्चित किये जाते हैं। उदाहरणार्थः एक कॉलेज के प्राध्यापकों व अन्य कर्मचारियों का औसत वेतन ज्ञात करने के लिए उनकी वास्तविक संख्या, परीक्षाफल की तुलना करने के लिए परीक्षार्थियों की संख्या तथा वस्तुओं के मूल्य से संबंधित समंको के लिए उत्पादित या उपभोग की गई या विक्रित मात्रा के आधार पर वास्तविक भार निश्चित किये जाते हैं। यदि वास्तविक भार ज्ञात न हो सकें तो विभिन्न चर–मूल्यों के सापेक्षिक महत्व को ध्यान में रखते हुए भारों का उचित अनुमान लगा लिया जाता है। अनुमान तर्क संगत होने चाहिए ऐसा होने पर भारित समांतर माध्य लगभग समान होगें।

भारित समान्तर माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया :

प्रत्यक्ष विधि में :–

क. इकाइयों के मूल्य 'x' और उनके भार 'w' की गुणा की जाती है।

ख. $\sum wx$ अर्थात् मूल्य व भार की गुणाओं का जोड़ निकाल लिया जाता है।

ग. निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\bar{X}w = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + - - - - W_n X_n}{W_1 + W_2 \pm - - - - W_n}$$

या

$$\bar{X}w = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

जहाँ $\bar{X}w$ = भारित समांतर माध्य।

$\sum wx$ = मूल्यों व भारों की गुणाओं का योग

$\sum w$ = भारों के योग।

लघु रीति में :

(क). किसी मूल्य को कल्पित माध्य (Aw) मान लिया जाता है।

(ख). कल्पित माध्य (Aw) से विभिन्न पदों के विचलन (dx) ज्ञात कर लिए जाते हैं।

(ग). विचलनों व भारों की गुणा करके उनका योग $\sum wdx$ निकाल लिया जाता है।

(घ). निम्न सूत्र द्वारा भारित समांतर माध्य की गणना कर ली जाती है।

$$\bar{X}w = Aw + \frac{\sum wdx}{\sum w}$$

नोट : व्यवहार में भारित समान्तर माध्य निकालनें में, अधिकतर प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्नलिखित आँकड़ों से भारित माध्य निकालिए :

मद	81	76	74	58	70	73
भार	2	3	6	7	3	7

हल (**Solution**) :

भारित माध्य की गणना

मद (**X**)	भार (**X**)	(**WX**)
81	2	162
76	3	228
74	6	444
58	7	406
70	3	210
73	7	511
योग	$\sum w$ =28	$\sum wx$ =1961

$$\bar{X}w = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

$$= \frac{1961}{28} = 70.04$$

भारित माध्य = 70.04

भार और आवृत्ति : गणन–क्रिया के उद्देश्य से भार (Weight) और आवृत्ति (Frequency) में कोई अंतर नहीं माना जाता है। व्यक्तिगत श्रेणी से भारित समान्तर माध्य निकालने में जो भार का उपयोग किया जाता है वही आवृत्ति–श्रेणी के सरल माध्य निकालने में आवृत्ति होता है। दोनों स्थितियों में मूल्य की भार या आवृत्ति से गुणाओं के जोड़ को भारों या आवृत्तियों के जोड़ से भाग दिया जाता है, अर्थात–

आवृत्ति श्रेणी में $\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ or $\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{\sum f}$

साधारण श्रेणी में $\bar{X}w = \frac{\sum xw}{\sum w}$ or $\bar{X}w = Aw + \frac{\sum fdx}{\sum f}$

उपयोग : निम्नलिखित परिस्थितियों में भारित समान्तर माध्य का उपयोग किया जाता है :–

क. जहाँ विभिन्न मूल्यों का अलग–अलग सापेक्षिक महत्व हों, उदारणार्थः विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों का माध्य निकालते समय उन वस्तुओं की अलग–अलग यात्राओं का भार देकर भारित माध्य ज्ञात करना चाहिए।

ख. जहाँ समंक माला अनेक उपवर्गों में बंटी हुई हो और उपवर्गों की आवृत्तियों में काफी अन्तर थे। उदारणार्थः एक कारखानों के मजदूरों की औसत मजदूरी भारित माध्य के आधार पर ही निकाली जानी चाहिए क्योंकि कुशल, अर्द्धकुशल एवं अकुशल मजदूरों की मजदूरी और उनकी संख्या में बहुत अंतर होता है।

ग. जहाँ श्रेणी के विभिन्न भागों के अलग–अलग समान्तर माध्य और पदों की संख्याएँ ज्ञात हो तो उनकी सहायता से पूरी श्रेणी का संयुक्त माध्य (Combind Mean) निकालना है।

घ. जहाँ अनुपातों, प्रतिशतों और दरों का माध्य निकालना हो। उदारणार्थ यदि दो कालेजों में विभिन्न कक्षाओं के औसत प्रतिशत परीक्षाफल की तुलना करनी हो तो प्रत्येक कक्षा की प्रतिशत को परीक्षार्थियों की संख्या से भार देकर भारित माध्यम ज्ञात करना उपयुक्त होगा। ऐसी स्थिति में सरल माध्य भ्रामक होता है।

भारित समान्तर माध्य के लाभ–दोष : सामान्यतः भारित समान्तर भाषा के लाभ व दोष लगभग वही है, जो सरल समान्तर माध्य के हैं। जहाँ इकाइयों की संख्या अधिक हो, वे विभिन्न सापेक्षिक महत्ता रखती हो और पूरे समूह का अध्ययन करना हो वहाँ भारित समान्तर माध्य ही केन्द्रीय प्रवृत्ति का आदर्श माप होता है। भारित माध्य निकालने में यथासंभव वास्तविक भारों का ही प्रयोग करना चाहिए। गलत भार देने से परिणाम भ्रमात्मक हो सकते हैं।

नोट : सूचकांकों के निर्माण में तथा मृत्यु–दर, जन्म–दर, बेरोजगारी की दर, प्रतिशत परीक्षाफल आदि के तुलनात्मक अध्ययन में भारित समान्तर माध्य का विशेष रूप से उपयोग किया जाता है।

8.6 मध्यका (Mediam) :

किसी समंक माला (श्रेणी) को आरोही (बढ़ते हुए) या अवरोही (घटते हुए) क्रम में व्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है वही मध्यका (Mediam) कहलाता है। **कौनर के अनुसार–** ''मध्यका समंक श्रेणी का वह चर–मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बाँटता है कि एक भाग में सारे मूल्य मध्यका से अधिक और दूसरे भाग में सारे मूल्य उससे कम हों।'' इस प्रकार मध्यका वह केन्द्रीय मूल्य है जो क्रमबद्ध समंक माला को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई ज्ञात करनी है और इन विद्यार्थियों को क्रम में खड़ा कर दिया जाए तो मध्य में जो विद्यार्थी खड़ा होगा उसी ऊँचाई को कक्षा के विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई माना जायेगा। इस संबंध में महत्वपूर्ण बात यह है कि केन्द्रीय मूल्य से उपर की मदों की संख्या तथा नीचे की मदों की संख्या बराबर होनी चाहिए।

मध्यका की गणना कैसे करें?

सांख्यिकी में माध्यिका को M अक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है। माध्यिका निकालने से पूर्व सभी मदों को आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम के अनुसार व्यवस्थित करना चाहिए। तत्पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग कर माध्यिका निकालनी चाहिए :–

$$M = \text{size of} \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{th item}$$

M = संकेताक्षर मध्यका मूल्य

N = संकेताक्षर पदों की संख्या

विभिन्न सांख्यिकीय श्रृंखलाओं में उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करके मध्यका मूल्य की गणना की जा सकती है।

विभिन्न सांख्यिकीय श्रृंखलाओं की मध्यका की गणना :

1. **व्यक्तिगत श्रृंखला :**

व्यक्तिगत श्रृंखला में मध्यका की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल है :

क. श्रृंखला में दिए हुए आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम के अनुसार लिखें। मूल्यों की क्रम संख्या भी साथ–साथ लिखें।

ख. निम्न सूत्र के द्वारा मध्यका निकालें :–

$$M = \text{size of} \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{th item}$$

नोट : यदि किसी श्रृंखला की इकाइयों की संख्या एक विषम (odd) है, तो उपरोक्त सूत्र की सहायता से मध्यका सरलता से ज्ञात की जा सकती है। और यदि श्रृंखला की इकाइयों की संख्या सम (Even) है तो उपरोक्त सूत्र द्वारा संख्या पूरी अंक नही होगी, बल्कि आंशिक अंक होगी अर्थात् दशमलवांश में होगी। इस प्रकार के संख्याओं का मूल्य ज्ञात करने के लिए दोनों ओर की पूरी संख्याओं के मूल्य को जोड़कर '2' से भाग कर दिया जाता है, वह औसत मूल्य की मध्यका होगी। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$M = \frac{\text{size of the 2nd item} \quad \text{size of the 3rd item}}{2}$$

उदाहरण (Illustration) :

निम्न संख्याओं का मध्यका–मूल्य निर्धारित कीजिए–

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20

हल (**Solution**) :

आरोही क्रम में निम्न प्रकार मूल्यों का विन्यास किया जायेगा–

क्रम संख्या	पद–मूल्य (**X**)
1	15
2	20
3	23
4	23
5	25
6	25
7	25
8	47
9	40

श्रेणी की संख्या 9 अर्थात् विषम है अतः

$$M = \text{size of} \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{th item}$$

$$= \text{size of} \left(\frac{9+1}{2}\right) \text{th item}$$

$$= 5^{th} \text{ item}$$

$\therefore$ मध्यका मूल्य = 25

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्नलिखित तालिका द्वारा आठ व्यक्तियों किलोग्राम में वनज दिखाया गया है :

71, 72, 64, 68, 70, 76, 73, 75

इनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल (**Solution**) :

आरोही क्रम में निम्न प्रकार मूल्यों का विन्यास किया गया है–

क्रम संख्या	पद–मूल्य (**X**)
1	64
2	68
3	70
4	71
5	72
6	73
7	75
8	76

श्रेणी की संख्या यहाँ (Even) है अतः निम्न सूत्र का प्रयोग कर मध्यका निकाला जायेगा :–

$$M = \text{size of} \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{th item}$$

$$= \frac{8+1}{2} \text{ or } 4.5^{th} \text{ item}$$

$$= \text{size of 4.5 th item} = \frac{\text{size of the 4th item+ size of the 5th item}}{2}$$

$$= \frac{71+72}{2} \text{ or } \frac{143}{2} = 71.5$$

$\therefore$ Mediam = 71.5 किलोग्राम

2. **खण्डित या विच्छिन्न रेणी (आवृत्ति युक्त समंक माला) :**

खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी में मध्यका निकालने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनानी पड़ती हैं :–

क. आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखे–

ख. आवृत्तियों के परस्पर योग से संचयी आवृत्ति ज्ञात करें।

ग. श्रृंखला की $\left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}$ मद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

घ. मध्यका की क्रम संख्या का मूल्य संचयी आवृत्ति की सहायता से ज्ञात कर लिया जाता है। जिस संचयी आवृत्ति में यह क्रम संख्या प्रथम बार सम्मिलित होती है उसका मूल्य ही मध्यका होता है।

उदाहरण **(Illustration)** :

निम्न बंटन से मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए :

पद– आकार	8	10	12	14	16	18	20
आवृत्ति	3	7	12	28	10	9	6

हल **(Solution)** :

पद का आकार **X**	आवृत्ति **f**	संचयी आवृत्ति **c.f**
8	3	3
10	7	3+7 = 10
12	12	10+12=22
14	28	22+28=50
16	10	50+10=60
18	9	60+9=69
20	6	69+6=75

उपर्युक्त सारणी में संचयी आवृत्तियों को देखने से ज्ञात होता है कि 22वीं इकाई तक मूल्य 8, 10 व 12 आकार के हैं। 23 वीं इकाई से 50वीं इकाई तक सभी 28 पदों का मूल्य 14 है, अतः 38वीं इकाई का मूल्य भी 14 है।

3. **अविच्छिन्न श्रेणी :**

अविच्छिन्न या सतत् समंक मात्रा में मध्यका का मूल्य निकालने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनायी जाती है–

क. सर्वप्रथम संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं।

ख. निम्न सूत्र द्वारा केन्द्रीय पद ज्ञात किया जाता है।

$$M = \text{ size of} \left(\frac{N}{2}\right) \text{ th item}$$

अवच्छिन्न श्रेणी में मध्यका $\left(\frac{N}{2}\right)$ th item का ही मूल्य होता है, $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ th item का नहीं। इसके दो प्रमुख कारण हैं।

प्रथम, मध्यका का मूल्य एक समान होना चाहिए चाहें इसका निर्धारण आरोही वार्गन्तरों (जैसे 0–10, 10–20, 20–30....) के आधार पर किया जाये या अवरोही वर्गों (40–50, 30–40, 20–30...) के आधार पर। केन्द्र बिन्दु को $\frac{N}{2}$ पर स्थित मानने पर ही दोनों स्थितियों में मध्यका समान आता है। **दूसरे**, संचयी आवृत्ति वक्र खींचकर मध्यका का मूल्य निर्धारित करने में $\left(\frac{N}{2}\right)$ का प्रयोग ही उचित है क्योंकि वक्र का केन्द्र–बिन्दु $\frac{N}{2}$ पर होता है जो उसे दो बराबर भागों में बाँटता है।

(ग). मध्यका की संख्या जिस संचयी आवृत्ति में सबसे पहली बार आती है उससे संबंधित वर्ग मध्यका–वर्गान्तर (Median class-interval) कहलाता है।

(घ). मध्यका–वर्ग में मध्यका का मूल्य निर्धारित करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :–

$$M = l + \frac{i}{f} \quad (M\text{-}C)$$

or

$$M = l + \frac{i}{f} \quad \left(\frac{N}{2}\text{-}C\right)$$

जहाँ –

M संकेताक्षर का प्रयोग : मध्यका (Median) के लिए हुआ है,

l संकेताक्षर का प्रयोग : मध्यका वर्ग की निचली सीमा के लिए

i संकेताक्षर का प्रयोग : मध्यका वर्ग के विस्तार के लिए

f संकेताक्षर का प्रयोग : मध्यका वर्ग की आवृत्ति के लिए

m संकेताक्षर का प्रयोग : मध्यका संख्या N/2 के लिए

c संकेताक्षर का प्रयोग : मध्यका वर्ग से तुरन्त पूर्व वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति।

उदाहरण (Illustration) :

100 विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांकों से मध्यका ज्ञात कीजिए–

प्राप्तांक :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृत्ति :	8	30	40	12	10

हल (Solution) :

हल (Solution)	मध्यका परिकलन आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
0–10	8	8
10–20	30	38C
'i' 20–30	40 f	78
30–40	12	90
40–50	10	100
	N= 100	

$$M = \text{ size of} \left(\frac{N}{2}\right) \text{ th item}$$

$$= \text{ size of } \left(\frac{100}{2}\right) \text{ or } 50^{th} \text{ item}$$

संचयी आवृत्तियों के निरीक्षण से पता चलता है कि 50वीं इकाई 78 संचयी आवृत्ति में पहली बार शामिल हुई है; इसलिए इसके ठीक सामने का वर्गान्तर (20–30) मध्यका वर्ग है।

मध्यका वर्ग में मध्यका– मूल्य निश्चित करने के लिए निम्न सूत्र का सूत्र का प्रयुक्त होगा–

$$M = l + x\, \frac{i}{f}\,(M - C)$$

$$= 20 + \frac{10}{40}\,(50 - 38)$$

$$= 20 + \frac{10x1}{40} = 23$$

मध्यका = 23 अंक

समावेशी वर्गान्तरों में मध्यका का निर्धारण : समावेशी वर्गान्तरों में मध्यका का मूल्य ज्ञात करने के लिए सबसे पहले समंक श्रेणी को अपवर्जी वर्गान्तरों में बदल लेना चाहिए। बाकी सभी क्रियाएं पूर्ववत् रहती है। समावेशी से अपवर्जी में बदलने के सूत्र निम्नलिखित है:–

$$\frac{\text{दूसरे वर्ग की नीचली सीमा–प्रथम वर्ग की उपरी सीमा}}{2}$$

प्राप्त अंक को वर्गों के नीचले सीमा से घटाया जाता है तथा ऊपरी सीमा में जोड़ कर नया अपवर्जी वर्ग बना लिया जाता है।

आरोही क्रम में निम्न प्रकार मूल्यों का विन्यास किया गया है–

लाभ : मध्यका के निम्न लाभ है :–

क. **सरलता** : मध्यका को समझना और ज्ञात करना बहुत सरल है। इसका अर्थ सर्व–साधारण भी आसानी से समझ लेते है। अनेक परिस्थितियों में सहायका केवल समंक–श्रेणी के निरिक्षण से ही ज्ञात किया जताा सकता है।

ख. **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव** : बहुलक की भाँति मध्यका पर भी चरम मूल्यों या सीमांत पदों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। सीमान्त मूल्यों के बिना, केवल श्रेणी के मध्य मूल्यों के आधार पर ही इसे निकाला जा सकता है।

ग. **बिन्दुरेखीय निरूपण** : रेखाचित्र खींचकर भी मध्यका के मूल्य का निर्धारण किया जा सकता है।

घ. **निश्चितता व स्पष्टता** : मध्यका एक निश्चित एवं स्पष्ट माध्य है। इसके मूल्य का निर्धारण प्रत्येक समंक माला में निश्चिता के साथ किया जा सकता है।

ड़ **गुणात्मक तथ्यों में उपयुक्त** : ऐसे तथ्यों का माध्य ज्ञात करने के लिए मध्यका सर्वोत्तम माना जाता है जो प्रत्यक्ष रूप से मापनीय न हो, जैसे बौद्धिक स्तर, स्वास्थ्य, दरिद्रता आदि।

दोष : मध्यका में निम्न कमियाँ है :–

क. **निर्धारण संबंधी कठिनाइयाँ** : आपका मूल्य, निर्धारित करने से पूर्व पदों को आरोही या अवरोही क्रम में रखना पड़ता है। यदि व्यक्तिगत इकाइयों की संख्या सम हो तो केन्द्रीय मूल्यों के औसत को ही मध्यका मान लिया जाता है। अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका निर्णारण इस मान्यता पर आधारित होता है कि प्रत्येक वर्ग में आवृत्तियाँ समान रूप से वितरित है। यह मान्यता सदैव सत्य नहीं होता।

ख. **बीजीय विवेचन का अभाव** : मध्यका मे बीजगणितीय गुणों का अभाव है जिसके कारण उच्चतर गणितीय क्रियाओं में इसका प्रयोग नहीं किया जाता।

ग. **सीमान्त मूल्यों की उपेक्षा** : मध्यका सीमान्त मूल्यों से प्रभावित नहीं होता। अतः जहाँ इन मूल्यों को महत्व या भार देना हो वहाँ यह अनुपयुक्त है।

घ. **प्रतिनिधित्व का अभाव** : मध्यका ऐसे समूहों की केन्द्रीय प्रवृत्ति का यथोचित रूप से प्रतिनिधित्व नहीं करता जिनमें विभिन्न पदों के मूल्यों में काफी अन्तर होता है या आवृत्तियाँ अनियमित होती हैं।

उपयोग : मध्यका, गुणात्मक तथ्यों जैसे बुद्धिमता, स्वास्थ्य आदि के अध्ययन में बहुत उपयोगी होता है। सामाजिक समस्याओं के विश्लेषण में मध्यका की काफी उपयोगिता है।

8.7 बहुलक :

केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक अन्य महत्वपूर्ण माप भूमिष्ठक या बहुल्क (Mode) है। बहुलक किसी श्रृंखला के उस मूल्य को कहते हैं जो श्रृंखला में सबसे अधिक बार आता है अर्थात् जिसकी सबसे अधिक आवृत्ति (Frequencey) होती है। उदाहरण के लिए, बी0काम0 के 100 विद्यार्थियों में से 70 विद्यार्थियों की आयु 18 वर्ष लगभग है। अतः 18 वर्ष को बहुलक कहा जाएगा। बहुलक की अंग्रेजी भाषा के Z अक्षर द्वारा प्रकट किया जाता है।

कैनी के अनुसार, ''किसी तथ्य का वह मूल्य जिसकी वितरण में सबसे अधिक आवृत्ति हो बहुलक कहलाता है।'' क्राक्टन एवं काउडन के अनुसार, ''बहुलक वह मूल्य है जिसे श्रृंखला का सबसे अधिक प्रतिनिधित्व मूल्य माना जाता है।''

'La Mode' फ्रेंच भाषा से ही Mode को लिया गया है। 'La mode' का अर्थ रिवाज या फैशन से होता है। इस प्रकार सबसे अधिक प्रचलित मूल्य को ही बहुलक की संज्ञा दी जाती है।

बहुलक की गणना :

विभिन्न शृंखला श्रेणी में बहुलक की गणना :

1. इस श्रृंखला में बहुलक निकालने के लिए निम्न विधियाँ है–

   क. व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी में बदलकर,

   ख. सतत श्रेणी में बलकर, या

   ग. मध्यका एवं समान्तर माध्य की सहायता से बहुलक का अनुमान।

क. **खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी में बदलना** : जब व्यक्तिगत श्रेणी में अनेक मूल्य दो या दो से अधिक बार पाये जाते हैं, तो उन्हें आरोही क्रम के अनुसार रखकर उनके सामने उनकी आवृत्ति लिख दी जाती है। फिर नीरिक्षण द्वारा यह देख लिया जाता है कि अधिकतम आवृत्ति क्या है? इस आवृत्ति का मूल्य ही बहुलक है।

आय (वर्ष)	22	24	17	18	17	19	18	21	20	21	20	23	22	22	22

हल (**Solution**) :

पहले इन व्यक्तिगत समंकों को सुविधानुसार आरोही क्रम में प्रस्तुत किया जायेगा फिर उन मूल्यों को खण्डित माला के रूप में क्रमबद्ध किया जायेगा–

आरोही क्रम– 22 24 17 18 17 19 18 21 20 21 20 23 22 22 22

आयु वर्ष	आवृत्ति (**Frequncey**)
17	2
18	2
19	1
20	2
21	2
22	4
23	1
24	1
योग	15

अधिकतम आवृत्ति 4 है जिसका मूल्य 22 है। अतः यही बहुलक आयु (वर्ष) है। अर्थात् $Z = 22$ ।

ख. सतत् (अविच्छिन्न) श्रेणी में बदलना :

जब श्रेणी में कोई भी व्यक्तिगत मूल्य एक से अधिक बार न पाया जाता है तो उसे अविच्छिन्न आवृत्ति बंटन के रूप में बदलकर अधिकतम आवृत्ति वाला वर्गान्तर ज्ञात कर लेना चाहिए फिर इस बहुलक वर्ग में बहुलक का मूल्य एक सूत्र के प्रयोग द्वारा निश्चित करनाचाहिए। सूत्र का उल्लेख आगे किया गया है।

ग. मध्यका व समान्तर माध्य के आधार पर बहुलक निर्धारण :

यदि व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका (M), समान्तर माध्य ($\bar{x}$) तथा बहुलक (Z) तीनों ही ज्ञात करने में तो इन तीनों के पारस्परिक संबंध पर आधारित निम्नलिखित सूत्र द्वारा बहुलक मूल्य का अनुमान लगाना चाहिए।

$$Z = 3\ M - 2\ \bar{x}$$

इस सूत्र द्वारा बहुलक का अनुमान केवल असाधारण स्थिति में ही किया जाता है। यह सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि एक थोड़े विषय (Moderalely asymmetrical) बंटन में – $(\bar{x}\text{-}Z) = 3\ (\bar{x}\text{-}M)$।

2. खण्डित श्रेणी (Descrete Series) में बहुलकी गणना :

खण्डित समंक श्रेणी में बहुलक निकालने की दो विधियाँ है :

क. निरीक्षण विधि (Inspection method)

ख. समूहीकरण विधि (Grouping method)

क. **निरीक्षण विधि** : यह विधि तब अपनायी जाती है जब खण्डित श्रेणी की आवृत्तियाँ नियमित हो अर्थात् श्रेणी के आरंभ से आवृत्तियाँ निरंतर बढ़ती रहें, अधिकतम आवृत्ति लगभग केन्द्र में हो और उनके बाद से आवृत्तियाँ फिर निरन्तर घटने लगें। ऐसी श्रेणी में अधिकतम आवृत्ति बिल्कुल स्पष्ट हो जाती है। निरीक्षण द्वारा उसका मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्न सारणी में एम0काम0 के 50 विद्यार्थियों के भार (किलोग्राम में) दिये गये हैं। बहुलक भार ज्ञात कीजिए :–

भार (किग्रा)	48	49	50	51	52	53
विद्यार्थियों की संख्या	4	10	20	11	3	2

हल (**Solution**) :

उपर्युक्त श्रेणी में आवृत्तियाँ नियमित हैं अतः निरीक्षण द्वारा बहुलक ज्ञात किया जायेगा। अधिकतम आवृत्ति 20 है। जिसका मूल्य 50 है। इसलिए बहुलक भार 50 किग्रा है।

ख. **समूहीकरण विधि** :

जब आवृत्तियाँ अनियमित होती है और अधिकतम आवृत्ति ज्ञात करना कठिन हो जाता है तो समूहीकरण विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि द्वारा बहुलक ज्ञात करने के लिए दो सारणियाँ बनायी जाती हैं।

1. समूहीकरण सारणी (Gropeing table)

2. विश्लेषण सारणी (Analysis table)

निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्नलिखित आँकड़ों के आधार पर बहुलक ज्ञात कीजिए :–

आकार	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
आवृत्ति	3	8	10	12	16	14	10	8	17	5	4	1

हल (**Solution**) :

तालिक 8.7.1 बहुलक के निर्धारण के लिए समूहीकरण सारणी

आकार	(i) आवृत्ति	(ii) 1+2	(iii) 2+3	(iv) 1+2+3	(v) (2+3+4)	(vi) (3+4+5)
2	3	3+8=11		3+8+10=21		
3	8		8+10=18		8+10+12=30	
4	10	10+12=22				10+12+16=38
5	12		12+16=28	12+16+14=42		
6	16	16+14=30			16+14+10=42	
7	14		14+10=24			14+10+8=32
8	10	10+8=18		10+8+17=35		
9	8		8+17=25		8+17+5=30	
10	17	17+5=22				17+5+4=26
11	5		5+4=9	5+4+1=10		
12	4	4+1=5				
13	1					

तालिक 8.7.1 में खण्डित श्रेणी की अवस्था में बहुलक ज्ञात करने के लिए समूहीकरण सारणी में मदों के आकार के अतिरिक्त 6 खाने बनाये जाते हैं।

- **प्रथम खाना** : इस खाने में आवृत्तियों को लिखा जाता है जो प्रश्न में दी हुई होती हैं।
- **दूसरा खाना** : इसमें प्रथम खाने में दी गयी आवृत्तियों में से प्रथम दो आवृत्तियों का जोड़, फिर अगली दो आवृत्तियों का जोड़ और इसी तरह अंत तक दो–दो आवृत्तियों का जोड़ लिखा जाता है। अंत में यदि एक ही आवृत्ति बाकी रह जाए तो उसे छोड़ दिया जाता है।
- **तीसरा खाना** : इसमें प्रथम खाने में दी हुई आवृत्तियों में से पहली आवृत्ति को छोड़कर आगे वाली आवृत्तियों में से क्रमशः दो–दो आवृत्तियों को जोड़ लिया जाता है।
- **चौथा खाना** : इसमें प्रथम खाने में दी गई पहली तीन आवृत्तियों का जोड़ और आगे क्रमशः इसी प्रकार तीन–तीन आवृत्तियों का जोड़ लिया जाता है।
- **पाँचवा खाना** : पाँचवे खाने में प्रथम खाने में दी गयी आवृत्तियों में से पहली एक को छोड़कर बाकी आवृत्तियों में हर तीन आवृत्तियों का जोड़ लिखा जाता है।
- **छठा खाना** : इस खाने में प्रथम खाने में दी गई आवृत्तियों में से पहली दो को छोड़कर बाकी आवृत्तियों के तीन–तीन का जोड़ लिखते हैं।

उपरोक्त छः खानों में समूहीकरण की संख्या लिखने के बाद प्रत्येक खाने में बड़ी संख्या के नीचे लाइन खींच दे, मोटा कर दें या गोले में बंद कर देना चाहिए।

यह निश्चित करने के लिए कि सभी समूहों में कौन सी आवृत्ति सबसे अधिक बार आई है। इसके लिए एक और तालिका बनाई जाती है–

तालिका 8.7.2 विश्लेषण सारणी

स्तम्भ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I									√			
II					√	√	√					
II				–	√	√						
III				√		√						
IV				√		√	√					
V						√	√					
VI			√	√		√						
योग	–	–	1	3	5	3	1	–	1	–	–	–

समूहों की सबसे अधिक आवृत्ति वाली मदों के विश्लेषण सारणी पर उतारेगें।

विश्लेषण सारणी निम्नलिखित ढ़ंग से बनायी जाती है पहले स्तम्भ में सबसे बड़ी संख्या 17 हैं। यह आवृत्ति 10वीं मद से संबंधित हैं; अर्थात् 10वीं मद की आवृत्ति सबसे अधिक है। विश्लेषण सारणी में स्तम्भ I के आगे 10वीं संख्या पर सही का चिन्ह (√) लगायेगें। दूसरे खाने में सबसे बड़ी आवृत्ति 30 है। यह छठी (16) तथा (7) वीं मद की आवृत्तियों का योग है। इसलिए विश्लेषण सारणी के स्तम्भ II में छठी (6) तथा (7)वीं संख्या के आगे सही का चिन्ह (√) लगाया जायेगा। इसी प्रकार बाकी के स्तम्भों की प्रक्रिया पूरी करेगें।

विश्लेषण सारणी से ज्ञात होता है कि छठें (6) मद की आवृत्ति सबसे अधिक अर्थात् 5 है। इसलिए बहुलक (Z) = 6 हुआ है।

3. **अखण्डित या सतत श्रेणी (Continous Seres) में बहुलक की गणना :**

अखण्डित श्रेणी में खण्डित श्रेणी की तरह बहुलक की गणना की दो विधियाँ हैं :

क. निरीक्षण विधि (Inspection method)

ख. समूहीकरण विधि (Grouping method)

सूत्र :

$$z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \text{ x } i$$

जहाँ Z = बहुलक का मूल्य, l_1= बहुलक की निम्न सीमा; f_1= बहुलक वर्ग की आवृत्ति; f_o = बहुलक वर्ग के निकटतम छोटे मूल्य वाले वर्ग की आवृत्ति; f_2= बहुलक वर्ग के निकटतम बड़े मूल्य वाले वर्ग की आवृत्ति; i = बहुलक वर्ग का विस्तार।

क. **निरीक्षण विधि :**

सतत् श्रृंखला मे भी बहुलक निश्चित करते समय से हमें खण्डित श्रृंखला की तरह ही सर्वप्रथम निरीक्षण से यह निश्चित करना पड़ता है कि कौन–से वर्ग की सबसे अधिक आवृत्ति है। जिस वर्ग की सबसे अधिक आवृत्ति हो, उसे बहुलक वर्ग (Modaldass) कहते है।

बहुलक वर्ग ज्ञात करने के बाद उपरोक्त सूत्र की सहायता से बहुलक ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए :

वर्गान्तर	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
आवृत्ति	2	5	7	5	2

हल (Solution) :

बहुलक की गणना

वर्गान्तर	आवृत्ति
0—10	2
10—20	5f0
20—30	7f1
30—40	5f2
40—50	2

निरीक्षण द्वारा ज्ञात होता है कि बहुलक वर्ग 20—30 होगा, क्योंकि इस वर्ग की आवृत्ति सबसे अधिक अर्थात् 7 है।

निम्न सूत्र का उपयोग कर बहुलक मूल्य ज्ञात कर लिया जायेगा :–

$$Z = l_{1,} + \frac{f_1 - f_0}{2f_, - f_0 - f_2} \text{x } i$$

$$= 20 + \frac{7-5}{2x7-5-5}\ 10$$

$$= 20 + \frac{2}{4}\ X\ 10$$

$$= 20 + 5 = 25$$

$$Z = 25$$

(ख). समूहीकरण विधि :

जिस श्रृंखला में आवृत्तियाँ नियमित रूप से घटती या बढ़ती न हों, सबसे अधिक आवृत्ति वाले वर्ग एक से अधिक हों या आवृत्तियों के वितरण से अनुमान हो रहा हो कि सबसे अधिक आवृत्ति वाला वर्ग बहुलक वर्ग नहीं होगा। इन दशाओं में बहुलक वर्ग को निश्चित करना सरल नहीं होता। ऐसी दशा में खण्डित श्रृंखला की ही तरह समूहीकरण द्वारा बहुलक वर्ग को निश्चित किया जाता है। इस बहुलक वर्ग की सीमाओं के अन्तर्गत बहुलक का मूल्य निर्धारित करने के लिए पूर्व सूत्र का ही प्रयोग किया जाता है। अर्थात् केवल बहुलक वर्ग ज्ञात करना आवश्यक है।

उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित श्रृंखला का बहुलक ज्ञात कीजिए—

वर्गान्तर	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35
आवृत्ति	1	2	10	4	10	9	2

इस उदाहरण में वर्ग निश्चित करना कठिन है क्योंकि 10 आवृत्ति वाले दो—दो वर्ग हैः— अतः समूहीकरण विधि का उपयोग किया जायेगा :

तालिक 8.7.3 समूहीकरण सारणी

वर्गान्तर	(i) आवृत्ति	(ii) 1+2	(iii) 2+3	(iv) 1+2+3	(v) (2+3+4)	(vi) (3+4+5)
8—5	1	1+2=3		1+2+10=13		
5—10	2		2+10=12		2+10+4=16	
10—15	10	10+4=14				10+4+10= 24
15—20	4		4+10=14	4+10+9= 23		
20—25	10	10+9=19 19			10+9+2=21 21	
25—30	9		9+2=1			
30—35	2					

तालिक 8.7.4 विश्लेषण सारणी

स्तम्भ	अधिकतम आवृत्ति वाली मदें						
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
I			√		√		
II					√	√	
III				√	√		
IV				√	√	√	
V					√	√	√
VI			√	√	√	-	
योग	–	–	2	3	6	3	1

विश्लेषण सारणी में सबसे अधिक बार आने वाला वर्ग (6 बार) 20–25 है, अतः यही वर्ग बहुलक वर्ग होगा। सूत्र के अनुसार–

$$z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_, - f_0 - f_2} x\, i$$

$l_1 = 20$ $\qquad$ $f_2 = 9$

$f_1 = 10$ $\qquad$ $i = 5$

$f_0 = 4$

अतएव –

$$Z = 20 + \frac{10-4}{2x10-4-9} x5$$

$$= 20 + \frac{6}{20-13} x5$$

$$= 20 + \frac{6}{7} x5$$

$$= 20 + 4.29 = 24.29$$

बहुलक (Z) = 24.29

वैकल्पिक सूत्र (Alternative formula) :

अविच्छिन्न या सतत् श्रेणी में बहुलक का मान ज्ञात करने के लिए मूल सूत्र के स्थान पर निम्न वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है–

$$Z = l_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} xi$$

इस सूत्र में प्रयुक्त चिन्हों का वही अर्थ है जो प्रथम सूत्र में है। इसका प्रयोग तभी करना चाहिए जब प्रथम सूत्र ज्ञात करने से बहुलक का मूल्य बहुलक वर्ग की सीमाओं के अन्तर्गत न रहें अर्थात् वह या तो निचली सीमा से कम या उपरी सीमा से अधिक आ जाए। अधिकतर बहुलक वर्ग की आवृत्ति से पिछली आवृत्ति अधिक होने पर ऐसी स्थिति आती है। दोनों सूत्रों से प्राप्त परिणाम भिन्न होते हैं।

उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित श्रृंखला का बहुलक ज्ञात कीजिए–

आकार	15	25	35	45	55	65	25	85
आवृत्ति	5	9	13	21	20	15	8	3

हल (Solution) :

वर्गान्तरों के स्थान पर केन्द्रीय आकार या मध्य–मूल्य दिए हुएहैं जिनमें 10–10 का अन्तर है। वर्गान्तरों की सीमाएँ 15 ± 5, 25 ± 5, 35 ± 5... अर्थात् 10–20, 20–30, 30–40... 80–90 होगीं। बहुलक का मूल्य समूहन रीति द्वारा ज्ञात किया जायेगा क्योंकि अधिकतम आवृत्ति (21) के बाद आवृत्तियों (20, 25.....) और उसके पहले आवृत्तियों (13, 9...) में काफी अंतर हैं।

तालिक 8.7.5 समूहीकरण सारणी

वर्गान्तर	(i) आवृत्ति	(ii) 1+2	(iii) 2+3	(iv) 1+2+3	(v) (2+3+4)	(vi) (3+4+5)
10–20	5	5+9=14		5+9+13=27		
20–30	9		9+13=22		3+13+21=43	
30–40	13	13+21=34				13+21+20=54
40–50	21		21+20=41	21+20+15=56		
50–60	20	20+15=35			20+15+8=43	
60–70	15		15+8=23			15+8+3=26
70–80	8	8+3=11				
80–90	3					

तालिक 8.7.6 विश्लेषण सारणी

स्तम्भ	अधिकतम आवृत्ति वाली मद							
	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
I				√				
II			√	√	√			
III				√	√	√		
IV				√	√	√		
V		√	√	√	√	√	√	
VI					√			
योग	–	1	2	5	5	3	1	

विश्लेषण सारणी से यह ज्ञात होता है कि (40–50) तथा (50–60) दोनों वर्गों में अधिकतम आवृत्ति 5–5 बार आती है। अतः इन दोनों में से बहलुक–वर्ग छाँटने के लिए निम्न आवृत्ति धनत्व परीक्षण (Frequnecy density test) का प्रयोग किया जायेगा –

बहलुक वर्ग की आवृत्ति	40–50	50–60
उससे पहले वर्ग की आवृत्ति	21	20
उससे बाद वाले वर्ग की आवृत्ति	13	21
	20	15
योग	**54**	**56**

इस प्रकार (50–60) बहुलक वर्ग है जिसकी आवृत्ति 20 है। परन्तु इससे पहले वर्ग की आवृत्ति इससे अधिक है। अतः दूसरे सूत्र (वैकाल्पिक) द्वारा बहुलक ज्ञात किया जायेगा–

$$Z = l_1 + \frac{f_2}{f_0+f_2} xi$$

$$= 50 + \frac{15}{21+1} X10$$

$$= 50 + \frac{150}{36}$$

$$= 50 + 4.166$$

$$\therefore \text{बहुलक} = 54.17$$

यदि पहले सूत्र का प्रयोग किया जाता है तो बहुलक का मूल्य वर्ग की सीमाओं के बाहर आ जाता है सर्वथा गलत है–

$$z = l_1 + \frac{f_1\, f_0}{2f_1 - fo - f_2} xi$$

$$= 50 + \frac{20-21}{40-21-15} X10$$

$$= 50 + \frac{-10}{4}$$

$$= 50 + (2.5)$$

$$= 47.5$$

किन्तु 47.5 (50–60) वर्ग के बाहर है अतः यह सही बहुलक नहीं हैं। सही बहुलक 54.17 ही होगा।

समावेशी वर्गान्तर तथा असमान वर्ग विस्तार :

बहुल्क ज्ञात करने से पूर्व समावेशी वर्गान्तरों को पहले उपवर्जी वर्गान्तर में परिवर्तित कर लेना चाहिए। यदि वर्ग विस्तार असमान है तो यथासम्भव उन्हें समान करने का प्रयत्न करना चाहिए।

लाभ : बहुलक के निम्नलिखित लाभ है :–

क. **सरलता व लोकप्रियता** : बहुलक का सबसे महत्वपूर्ण लाभ यह है कि वह समझने में तथा ज्ञात करने में अत्यन्त सरल होता है। दैनिक जीवन में इसका काफी प्रयोग किया जाता है। दैनिक प्रयोग की वस्तुओं जैसे जूते, सिले–सिलाये कपड़ों आदि के सम्बन्ध में औसत आकार का तात्पर्य बहुलक आकार से ही होता है।

बहुलक अधिकतर निरीक्षण से ही मालूम हो जाता है। सतत् श्रेणी में भी सरल गणन क्रिया द्वारा ही इसका निर्धारण हो जाता है।

ख. **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव** : बहुलक पर श्रेणी के चरम मूल्यों या सीमान्त इकाइयों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। नियमित आवृत्ति बंटन में केवल बहुलक वर्ग या मूल्य और उसके आस–पास की आवृत्तियों के आधार पर ही बहुलक निर्धारित किया जा सकता है। सभी आवृत्तियों की जानकारी आवश्यक नहीं है।

ग. **बिन्दुरेखयी निर्धारण** : बहुलक का मूल्य रेखाचित्र बनाकर भी निर्धारित किया जा सकता है।

घ. **सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व** : बहुलक श्रेणी का वह मूल्य है जो सबसे अधिक बार पाया जाता है, अतः वह समूह का सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व करने वाला अंक है। उसका मूल्य समूह में दिए हुए मूल्यों में से एक ही होता है।

दोष : बहुलक में निम्न दोष हैं :–

क. **अनिश्चित व अस्पष्ट** : बहुलक सबसे अधिक अनिश्चित व अस्पष्ट माध्य है। यदि सभी पदों की आवृत्तियां समान हों तो वह निश्चित नहीं किया जा सकता। कभी–कभी एक समूह में दो या दो से अधिक बहुलक भी हो सकते है।

ख. **बीजगणितीय विवेचन का अभाव** : इसका उन्नत रीतियों में बहुत कम प्रयोग होता है, क्योंकि श्रेणी के सभी पदों पर आधारित न होने के कारण इसका बीजगणितीय विवेचन सम्भव नहीं हैं।

ग. **चरम मूल्यों की उपेक्षा** : बहुलक सीमांत पदों को कोई महत्व नहीं देता। अतः जहाँ सीमांत पदों को भी महत्व देना हो वहाँ यह सर्वथा अनुपयुक्त है।

च. **कुल मूल्य ज्ञात न होना** : यदि बहुलक मूल्य और पदों की संख्या ज्ञात हों तो उनकी गुणा करके समूह के सब मूल्यों का जोड़ ज्ञात नहीं हो सकता।

ड़. **भ्रमात्मक** : कभी–कभी बहुलक, समंक श्रेणी का प्रतिनिधित्व नहीं करता। यदि 500 व्यक्तियों में से 5 की दैनिक आय रू0 50 है, बाकी 495 में से प्रत्येक की आय रू0 50 से अधिक हैं। बहुकल आय रू0 50 होगी जो पूरे समूह का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकती। रू0 50 आय तो 500 में से केवल 5 व्यक्तियों की है जबकि इनके 99 गुने (495) व्यक्तियों की आय रू0 50 से अधिक है। इस प्रकार कुछ परिस्थितियों में बहुलक से भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलते हैं।

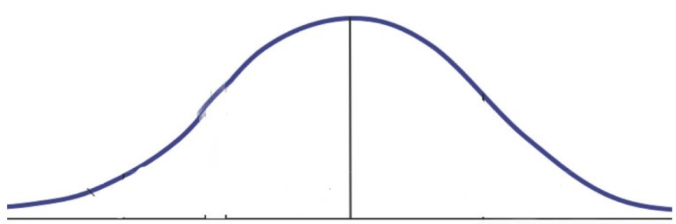
च. **वर्ग–विस्तार का प्रभाव** : बहुलक मूल्य बहुत कुछ वर्ग विस्तार पर निर्भर करता है। वर्गान्तरों के विस्तार में परिवर्तन होने पर वह भी भिन्न हो जाता है।

उपयोग : इतने दोष होते हुए भी दैनिक जीवन तथा व्यापारिक क्षेत्र में बहुलक का काफी प्रयोग किया जाता है। जब हम कहते हैं कि 'औसत छात्रावसी विद्यार्थियों का मासिक व्यय रू0 5000 है, 'कॉलर' का औसत आकार 30 सेंटीमीटर हैं, टेलीफोन कॉल की दैनिक औसत संख्या 25 हैं, तो औसत से हमारा तात्पर्य सबसे अधिक आवृत्ति वाले अर्थात् बहुलक से होता है। व्यापार तथा वाणिज्य में बहुलक का बहुत प्रयोग होता है। व्यापारिक पूर्वानुमानों में यह माध्य एक महत्वपूर्ण पथ–प्रदर्शक है। विभिन्न वस्तुओं की लोकप्रियता का अध्ययन बहुलक के द्वारा ही किया जाता है। मौसम संबंधी पूर्वानुमानों में भी बहुलक का ही प्रयोग किया जाता है।

माध्य, बहुलक एवं मध्यका में संबंध :

माध्य, मध्यका एवं बहुलक के संबंध को जानने से पहले यह जानना जरूरी है कि वितरण सममितीय (Symmatrical) है या असममितीय (Asymmetrical) है।

क. सममितीय वितरण की स्थिति में बहुलक माध्यिका व माध्य समानार्थक होगें तथा आवृत्ति वक्र घंटाकार होगा।



$(\bar{X} = M = Z)$

ख. असमितीय वितरण में माध्य, बहुलक व मध्यका का विभिन्न मूल्य होगा। इस स्थिति में आवृत्ति वक्र घंटाकार न होकर दाईं और या बाईं ओर झुका होगा। यदि वितरण अधिकतम मूल्य की ओर होगा अर्थात् धनात्मक होगा तब माध्य और मध्यका बहुलक से अधिक होगें $(\bar{X} > M > Z)$। यदि वितरण न्यूनतम मूल्य की दोनों ओर अधिक झूका होगा तब माध्य व माध्यिका बहुलक से कम होगें अर्थात्

$(\bar{X} > M > Z)$। $(\bar{X} < M < Z)$।

निम्नलिखित सूत्र, बहुलक, माध्यका तथा माध्य के बीच का संबंध स्थापित करता है :

$$\text{बहुलक} = 3 \text{ मध्यका} - 2 \text{ माध्य}$$

$$Z = 3\ M - 2\ \bar{X}$$

कौन सा माध्य सबसे अच्छा है?

केन्द्रीय प्रवृत्ति के कई माप हैं जैसे समान्तर माध्य मध्यका एवं बहुल्का आदि। इसमें कौन सा माध्य सबसे उत्तम है? इसका कोई निश्चित उत्तर नहीं दिया जा सकता। उपयुक्त माध्य का चुनाव करते समय अग्रलिखित बातों को प्रमुख रूप से ध्यान में रखना चाहिए।

1. **उद्देश्य** : माध्य का चुनाव अनुसंधान के उद्देश्य के अनुकूल होना चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि सभी मूल्यों को समान महत्व देना है तो समान्तर माध्य $(\bar{X})$ का प्रयोग उचित होगा। इसके विपरीत यदि सबसे अधिक बार आने वाले मद का मूल्य ज्ञात करना हो तो बहुलक (Z) का प्रयोग करना चाहिए।
2. **तथ्यों की संख्या** : यदि श्रृंखला के तत्वों की संख्या बहुत कम हो तो समान्तर माध्य का प्रयोग करना चाहिए।
3. **मदों व आवृत्तियों का बंटवारा** : यदि श्रृंखला में अधिकतर मदों के मूल्य कम हैं तथा एक या दो मदों के मूल्य बहुत अधिक हैं तो समान्तर माध्य उपयुक्त नहीं होगा। यदि अधिकतर मूल्य श्रृंखला के मध्य में स्थित है या वे गुणात्मक तथ्यों से संबंधित है तो माध्यिका का प्रयोग उचित होता है।
4. **सीमांत मदों का महत्व** : यदि किसी श्रृंखला के सीमांत मदों को अधिक महत्व नहीं देना है तो मध्यका या बहुलक का प्रयोग उचित है।
5. **श्रृंखला के प्रकार** : यदि किसी श्रृंखला में अनेक मद ऐसे हैं जो एक समान है तो बहुलक का प्रयोग नही करना चाहिए।

8.8 गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) :

किसी समंक–श्रेणी का गुणोत्तर माध्य उसके सभी मूल्यों के गुणनफल का वह मूल (Root) होता है। जितनी उस श्रेणी में इकाइयाँ हैं। उदाहरण के लिए यदि दो संख्याओं के मूल्य 3 और 27 हैं तो उनका गुणोत्तर

माध्य $\sqrt{3X27}$ अर्थात् 9 हुआ। इसी प्रकार यदि तीन संख्याओं के मूल्य क्रमशः 20, 30, 45 हैं तो उनका गुणेत्तर माध्य निम्न प्रकार ज्ञात किया जायेगा–

$$GM = \sqrt[3]{20X30X45} \quad \text{या} \quad \sqrt[3]{27000}$$

$$= \sqrt[3]{27X1000} \quad \text{या} \quad \sqrt[3]{3X3X3X10X10X10}$$

$$= 3X\ 10 = 30$$

अतः सूत्र निम्नलिखित रूप में लिखा जायेगा–

$$GM = \sqrt[N]{x_1 x_2\, x_3\, x_4\, xx_4 - -x_n}$$

जहाँ $G.M =$ गुणोत्तर माध्य का संकेताक्षर

$N =$ श्रेणी में पदों की संख्या

$x_1 x_2\, x_3 - x_n =$ पदों के मूल्यों के लिए प्रयुक्त

यदि श्रेणी में 2 या तीन 3 मद ले तो सरलता से गुणोत्तर माध्य निकाला जा सकता है परन्तु अधिक संख्याएं होने पर गणना–कार्य की जटिलता बहुत बढ़ जाती है। जैसे 10 मूल्यों की गुणाओं का दसवाँ मूल (10^{th} root) प्रत्यक्ष रूप से निश्चित करना सरल कार्य नहीं है। इसके लिए (Logarithem or Log) का प्रयोग किया जाता है। लघुगुणाकों व प्रति–लघुगुणकों (Antilograithems) का अर्थ, गुण व निर्धारित–विधि का स्पष्टीकरण पुस्तक के अंत में परिशिष्ट में दिया गया है। लघु गुणाकों के आधार पर गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \cdots \log x_1}{N}\right]$$

अथवा

$$G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log x}{N}\right]$$

उपर्युक्त सूत्र में लघुगुणकों की दो विशेषताओं का उपयोग किया गया हैं :–

(क). $(x_1 x\, y_1) = \text{Antilog}\,[\log x_1 + \log x_2]$

(ख). $\sqrt[N]{X} = \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log x}{N}\right]$

इन दो नियमों के आधार पर–

$$= X_1\, X_2\, X_3\, X_4\, XX_4 = \text{Antilog}\,[\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 - - - \log x_N]$$

$$\sqrt[N]{x_1 x_2\, x_3\, x_4\, xx_4} = \text{Antilog}\left[\frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \cdots \log x_N}{N}\right]$$

$$\therefore = \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log x}{N}\right]$$

विभिन्न श्रेणियों में गुणेत्तर माध्य की गणना कैसे करें?

1. **व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य की गणना** : व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य की गणना के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी जाती है–

 क. दिये गये मूल्यों के $\sum logs$ ज्ञात किये जाते हैं।

 ख. logs का जोड़ ($\sum logs$) निकाल लिया जाता है।

 ग. निम्नलिखित सूत्र से गुणोत्तर माध्य निकाल लिया जाता है–

$$G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum logx}{N}\right]$$

इस प्रकार गुणोत्तर माध्य, श्रेणी के मूल्यों के लघुगणक की समान्तर माध्य का प्रतिलघुगणक है।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्न श्रेणी का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए बिना लघुगणंका का प्रयोग किये–

श्रेणी 5.6, 56, 560, 0.56 तथा 0.056

हल (**Solution**)

सूत्र : $G.M = (x_1\, x_2 \,--\, x_n)^{1}/n$

$= (5.6 \text{ X } 56 \text{ X } 560 \text{ x } 0.56 \text{ X } 0.056)^{1}/_{5}$

$= \left(\frac{56}{10} \text{ X } 56 \text{ X } 56\text{X } 10 \text{ X } \frac{56}{100} \text{ X} \frac{56}{1000}\right)^{1}/_{5}$ (पूर्ण संख्याओं मे बदलने)

$= \left(\frac{56\text{X}56\text{X}56\text{X}56\text{X}56}{100000}\right)^{1}/_{5}$

$= \left\{\frac{(56)^5}{(10)^5}\right\}$

$= \left\{\frac{(56)^5}{(10)^5}\right\}^{1}/_{5}$

$= \frac{56}{10} = 5.6$

गुणोत्तर माध्य (G.M) = 5.6 होगा।

उदाहरण (**Illustration**) :

10 परिवारों की मासिक आय रूपयों में निम्न प्रकार है –

85, 70, 15, 75, 500, 8, 45, 250, 40, और 36

गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल (**Solution**) :

परिवारों	आय	लघुगणक (logx)
1	85	1.9294
2	70	1.8415
3	15	1.1761

4	75	1.8751
5	500	2.6990
6	8	0.9031
7	45	1.6532
8	250	2.3979
9	40	1.6021
10	36	1.5563
N=10	Z	$\sum$ logx= 17.6373

$$G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log x}{N}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{17.6373}{10}\right]$$

$$= \text{Antilog } 1.7637$$

= रू 58.03

गुणोत्तर माध्य (G.M) = 58.03

उदाहरण (Illusration) :

निम्नलिखित से गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए –

0.75, 0.038, 675.35, 1.59, 95.78

हल (Solution) :

x	logx
0.750	$\bar{1}$ +0.8751
0.38	$\bar{2}$ +0.5798
675.350	675.4
675.350	2+0.8296
1.590	0+0.2014
95.780	1+0.9813
N = 5	$\sum$ logx = 3.4672

$$G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log x}{N}\right]$$
$$= \text{Antilog}\left[\frac{3.4672}{5}\right]$$
$$= \text{Antilog } 0.69344$$

गुणन्तर माध्य = 4.396

2. **खण्डित श्रेणी में गुणोत्तर मध्य की गणना :**

खण्डित श्रेणी में गुणोत्तर माध्य करने के लिए प्रक्रिया अपनायी जाती है–

क. विभिन्न मूल्यों के लघुगणक ($\sum$ flogx) ज्ञात किये जाते हैं।

ख. प्रत्येक लघुगुणंक का संबंधित आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों का योग ($\sum$ fl ogx) निकाला जाता है।

ग. गुणनफल के योग्य में ($\sum$ flogx) आवृत्तियों के योग ($\sum$ or N) से भाग देकर प्राप्त संख्या का प्रतिलघुगणक निकाला जाता है। सूत्र

$$G.M. = \text{Antilog}\left[\frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + f_3 \log x_3 - - - f_n \log x_N}{f_1 + f_2 + f_3 - - - f_n}\right]$$

or

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log x}{N}\right]$$

उदाहरण (Illusration) :

निम्न आँकड़ों का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए :–

आकार (Size)	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्ति (Frequency)	8	12	18	26	16	12	8

हल (Solution) :

X	लघुगण logx	f	f x logx
6	0.7782	8	6.2256
7	0.8451	12	10.1412
8	0.9031	18	16.2558
9	0.9542	26	24.8092
10	1.0000	16	16.000
11	1.0414	12	12.4968
12	1.0792	8	8.6336
योग	-	N = 100	$\sum$ flogx = 94.5622

$$G.M = \text{Antilog}\frac{\sum \text{flogx}}{N} = \text{Antilog}\left[\frac{94.5622}{100}\right]$$

$$= \text{Antilog} \quad 0.9456$$

$$= 8.822$$ गुणेत्तर माध्य

3. सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य की गणना :

सतत् अथवा अविच्छिन्न श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनायी जाती है–

(क). वर्गान्तरों के मध्य–मूल्य (Mid Value) (X) निकाल लेते हैं।

(ख). X पद मूल्य (जो मध्य मूल्य है) का लघुगणक logx निकाल लिया जाता है।

(ग). आवृत्ति (f) से गुणा करके उनका योग अर्थात् $\sum$ flogx निकाल लिया जाता है।

(घ). आवृत्तियों का योग अर्थात् $\sum$ f or N की गणना कर ली जाती है।

(ड़). निम्न सूत्र का प्रयोग कर गुणोत्तर माध्य की गणना कर ली जाती है—

$$G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum flogx}{N}\right]$$

उदाहरण (Illusration) :

निम्न आवृत्ति बंटन का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए :—

वर्ग (**Class**) :	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
आवृत्ति (**Frequency**) :	14	23	27	21	5

हल (Solution) :

C.I	मध्य—बिन्दु x	f	लाघुगणक logx	f x logx
0—10	5	14	0.6990	9.7860
10—20	15	23	1.1761	27.0503
20—30	25	27	1.3979	37.7433
30—40	35	21	1.5441	32.4261
40—50	45	5	1.6532	24.7980
योग	-	$\sum$ f or n = 100		$\sum$ flogx = 131.8037

$$G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum flogx}{N}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{131.8037}{100}\right]$$

$$= \text{Antilog } 1.3180$$

= 20.80 गुणोत्तर माध्य

भारित गुणोत्तर माध्य (Weighted Geomatric mean) :

यदि विभिन्न मूल्यों का सापेक्षिक महत्व अलग—अलग है, तो समांतर माध्य की भांति गुणोत्तर माध्य को भी भारित किया जा सकता है। भारित गुणोत्तर माध्य निकालने की प्रक्रिया निम्न हैं :—

(क). प्रत्येक मूल्य का logs ज्ञात किया जाता है।

(क). प्रत्येक logs में तत्संबंधी भार 'W' की गुणा करके गुणनफल का योग [$\sum(\log X\, xw)$] निकाला जाता है।

(ग). निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता है–

$$WGM = \text{Antilog}\left[\frac{\sum(\log X\, xw)}{\sum w}\right]$$

उदाहरण (Illusration) :

निम्नांकित आँकड़ों से भारित गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए :–

समूह **Group**	सूचकांक **(Index No)**	भार **(Weight)**
खाद्यान्न	125	7
वस्त्र	133	5
ईंधन व प्रकाश	141	4
किराया	173	1
विविध	182	3

हल (Solution) :

भारित गुणोत्तर माध्य का परिकलन :

समूह	भार w	सूचकांक X	लाघुगणक log x	log x X w लघु0 व भारों की गुणा
खाद्यान्न	7	125	2.0969	14.6783
वस्त्र	5	133	2.1239	10.6195
ईंधन व प्रकाश	4	141	2.1492	8.5968
किराया	1	173	2.2380	2.2380
विविध	3	182	2.2601	6.7803
योग	$\sum w = 20$	–	–	$\sum \text{logxw} = 42.9129$

$$\text{W.G.M} = \text{Antilog}\left[\frac{\sum \text{logxw}}{\sum w}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{42.9129}{20}\right]$$

$$= \text{Antilog } 2.1456$$

∴ भारित गुणोत्तर माध्य 139.8 है।

गुणोत्तर माध्य का विशेष उपयोग :

गुणोत्तर माध्य का प्रमुख उपयोग प्रतिशत वृद्धि दरों तथा अनुपातों का औसत निकालनें में किया जाता है। विशेषतया जनसंख्या वृद्धि, चक्रवृद्धि ब्याज, मूल्यों में होने वाले प्रतिशत परिवर्तन आदि की औसत दरें, गुणोत्तर माध्य पर आधारित 'चक्रवृद्धि ब्याज' सूत्र के प्रयोग द्वारा ही ज्ञात की जाती है :–

सूत्र – (क). $P_N = Po\,(1+r)^N$

(ख). $r = \sqrt[n]{\left(\frac{P_N}{P_o} - 1\right)}$

जहाँ– P_N संकेताक्षर निश्चित अवधि के बाद चर मूल्य की राशि के लिए

P_O संकेताक्षर अवधि के आरंभ में चर मूल्य के लिए प्रयोग

N संकेताक्षर वर्षों आदि की संख्या के लिए प्रयोग हुआ है।

r संकेताक्षर प्रति इकाई परिवर्तन की दर के लिए है।

उदाहरण (Illusration) :

यदि रू0 10,000 की धनराशि 12 वर्षों के अंत में चक्रवृद्धि दर (Cumpound Rate) से बढ़कर रू0 16000 हो जाती है तो साधारण ब्याज की दर 5% P_a पर क्या होगी–

हल (Solution) :

$$\frac{16000-1000}{12} = 500 \text{ अर्थात् } \left(\frac{500}{1000} \text{x}\, 100\right) = 5\,\%$$

परंतु चक्रवृद्धि दर निम्न प्रकार ज्ञात की जायेगी–

$Po = 10{,}000,\ P_N = 16{,}000,\quad N = 12$

$$r = \sqrt[N]{\frac{P_n}{Po}} \; -1 = \sqrt[12]{\frac{16000}{10{,}000}} \; -1$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\log 1.6}{12}\right] -1 = \text{Antilog}\,\frac{0.2041}{12} \; -1$$

$$= \text{Antilog}\,(0.017) - 1 = 1.040\text{-}1 \text{ or } 0.4$$

प्रतिशत में 0.4 X 100 = 4 %

उपयोग : प्रतिशत या आनुपातिक परिवर्तनों के मापन में सूचकांकों के निर्माण में तथा चक्रवृद्धि दर के आधार पर होने वाली प्रतिशत वृद्धि की औसत निश्चित करने में गुणोत्तर माध्य का उपयोग उचित होता है।

गुणोत्तर माध्य के लाभ : गुणोत्तर माध्य के लाभ निम्नलिखित हैं :–

क. **सभी मूल्यों पर आधारित** :– समान्तर माध्य की भाँति गुणोत्तर माध्य भी समंकमाला के सभी मूल्यों पर आधारित है।

ख. **सुनिश्चित एवं स्पष्ट** :– गुणोत्तर माध्य पूर्णतया स्पष्ट और निश्चयात्मक माप होता है।

ग. **चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव** :– अन्य माध्यों की तुलना में गुणोत्तर माध्य पर सीमान्त मूल्यों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।

घ. **संतुलित स्थिति** :– यह माध्य समंक श्रेणी के छोटे मूल्यों को अधिक और बड़े मूल्यों को कम महत्व देता है। इस प्रकार एक संतुलित स्थिति बन जाती है।

ड़ **प्रतिचयन व उच्चावचनों से कम प्रभावित** :– गुणोत्तर माध्य पर प्रतिचयन के उच्चावचनों का न्यूनतम प्रभाव पड़ता है।

गुणोत्तर माध्य के दोष : गुणोत्तर माध्य के निम्न दोष हैं :–

क. **गणना–सम्बन्धी जटिलता** :– गुणोत्तर माध्य का सबसे बड़ा दोष यह है कि उसकी गणना करना अत्यन्त कठिन है। उसके लिए logs तथा Antilogs की सहायता लेनी पड़ती है। अतः यह लोकप्रिय नहीं है।

ख. **शून्य अथवा ऋणात्मक मूल्य** :– यदि किसी पद का मूल्य (0) है तो पूरे समूह का गुणोत्तर माध्य शून्य हो जाता है क्योंकि गुणनफल शून्य होगा। इसी प्रकार, यदि श्रेणी का कोई मूल्य ऋणात्मक है तो गुणोत्तर माध्य भी अवास्तविक व काल्पनिक होगा।

ग. **अवास्तविक** :– समान्तर माध्य की तरह गुणोत्तर माध्य भी दिए हुए मूल्यों के अतिरिक्त कोई बाहर का मूल्य हो सकता है। ऐसी स्थिति में वह श्रेणी का उचित एवं वास्तविक प्रतिनिधि नहीं कहा जा सकता।

घ. **सभी मूल्यों का ज्ञान** :– गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए समंकमाला के सभी मूल्यों का जानना आवश्यक है। यदि एक पद का मूल्य भी अज्ञात हो तो यह माध्य नहीं निकाला जा सकता।

8.9 हरात्मक माध्य (Harmonic) :

हरात्मक माध्य एक सीमित क्षेत्र में प्रयोग होने वाला माध्य है। एक श्रेणी का हरात्मक माध्य उसके मूल्यों के व्युत्क्रमों (Reciprocals) के मध्य व्युत्क्रम होता है। किसी मूल्य का व्युत्क्रम वह संख्या होती है जो 1 में उस मूल्य का भाग देने से उपलब्ध होता है। जैसे : 5 का व्युत्क्रमों 1/5 : 8 का व्युत्क्रमों $\frac{1}{8}$; 0.2 का व्युत्क्रमों $\frac{1}{0.2}$ है। व्युत्क्रम तालिका (Reciprocal Table) की सहायता से व्युत्क्रम आसानी से ज्ञात किया जाना चाहिए। हरात्मक माध्य उन स्थितियों मे ज्ञात किया जाता है जब मूल्यों को वांछित माध्य के विपरीत रूप में व्यक्त किया जाता है। उदाहरणतः यात्रा में प्रति घण्टे किलोमीटर दिये गये हों और उनसे प्रतिकिलोमीटर गति ज्ञात करनी हो तो हरात्मक माध्य निकाला जाता है। सूत्र :– (बिना व्युत्क्रम सारणी के)

$$\text{H.M} \; \frac{}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}---+\frac{1}{x_n}} \text{ or } \frac{n}{\Sigma \frac{1}{x}}$$

n = पदों की संख्या

$x_1 \; x_2 x_3 - - x_n$ = पदों के मूल्य

यदि व्युत्क्रम सारणी से ज्ञात किये जाते हैं, तो निम्न सूत्र का प्रयोग किया जायेगा :–

$$\text{H.M} = \text{Rec.} \left[\frac{\Sigma \text{ Reciprocal}}{\text{N}}\right]$$

विभिन्न श्रेणियों में हरात्मक माध्य की गणना कैसे करें?

1. **व्यक्तिगत श्रेणी में हरात्मक माध्य की गणना** : व्यक्तिगत श्रेणी में हरात्मक माध्य की गणना के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी कराती है।

क. मूल्यों के व्युत्क्रम अर्थात $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}---+\frac{1}{x_1}$ अर्थात् ज्ञात किये जाते है।

ख. व्युत्क्रमों का योग $\sum$ Reciprocal निकाल लिया जाता है।

ग. उपरोक्त सूत्र का प्रयोग कर हरात्मक माध्य निकाल लिया जाता है।

नोट :– यदि पद अनेक हो जिनके मूल्य भी दशमलव बिन्दुओं में हों तो उनके व्युत्क्रम सारणी (Table of Reciprocals) की सहायता से ज्ञात करने चाहिए। सारणी से ज्ञात व्युत्क्रम में दशमलव बिन्दु का निर्धारण सावधानीपूर्वक करना चाहिए।

उदाहरण (**Illuestration**) :

ज्ञात कीजिए– 32, 35, 36, 58, 61, 73

हल (**Solution**) :

X	$^1/_X$ (व्युत्क्रम)
32	0.03125
35	0.02857
36	0.02778
58	0.01724
61	0.01639
73	0.01370
योग	$\sum\frac{1}{x}$ 0.13493

यहाँ N = 6 (पदों की संख्या)

$$HM = \frac{n}{\Sigma\frac{1}{x}} = \frac{6}{0.13493}$$

$$= 44.47$$

∴ हरात्मक माध्य 44.47 होगा।

उदाहरण (**Illuestration**) :

निम्न आँकड़ों से हरात्मक माध्य (व्युत्क्रम सारणी का प्रयोग करते हुए) ज्ञात कीजिए– 0.8974, 0.0570, 0. 0081, 0.5677, 0.0002, 0.0984, 0.0854, 0.5672

पद–मूल्य	व्युत्क्रम (**x**)
0.8974	1.1143
0.0570	17.5400

0.0081	123.4570
0.5677	1.7615
0.0002	5000.0000
0.0984	10.1626
0.0854	11.7096
0.5672	1.7630
योग	5167. 5080 $\sum$ Reciprocal

.M $= \text{Reciprocal}\left[\frac{\sum \text{Reciprocal}}{\text{N}}\right]$

$= \text{Rec.}\left[\frac{5167.5080}{8}\right]$

$= \text{Rec.}\, 645.94$

$= 0.00155$

हरात्मक माध्य (H.M) = 0.00155।

2. खण्डित श्रेणी में हरात्मक माध्य की गणना :

खण्डित श्रेणी में हरात्मक माध्य निकालने के लिए निम्न प्रक्रिया है :–

(क). पहले मूल्यों के व्युत्क्रम (Reciprocal) निकाले जाते है।

(ख). व्युत्क्रम की आवृत्ति से गुणा करके उन गुणफलों का योग ज्ञात कर लिया जाता है। [$\sum$ (Rec X x. f)] निकाले जाते है।

(ग). निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

H.M $= \text{Reciprocal}\left[\frac{\sum \text{(Rec X x.f)}}{\text{N}}\right]$

N आवृत्तियों का जोड़ है।

उदाहरण **(Illusration)** :

निम्न बंटन का हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए –

उम्र (वर्षो में) :	50	51	52	53	54	55
व्यक्तियों की संख्या :	2	4	10	6	2	2

हल (**Solution**) :

उम्र वर्षों में X	व्यक्तियों की संख्या f	व्युत्क्रम $^1/_X$	व्युत्क्रम x आवृत्ति ($^1/_X$ f)
50	2	0.02000	0.04000
51	4	0.01961	0.07843
52	10	0.01923	0.19230
53	6	0.01887	0.11321
4	2	0.01852	0.03704
55	2	0.01818	0.03636
योग	N = 20	-	$\sum (^1/_X \text{ xf}) = 0.49734$

$$\text{H.M} = \text{Reciprecal}\left[\frac{\sum (\text{Rec X x.f})}{\text{N}}\right]$$
$$= \text{Rec.}\left[\frac{0.49734}{26}\right]$$
$$= \text{Rec. } (0.01913)$$
$$= 52.28 \text{ ।}$$
$\therefore$ हरात्मक माध्य = 52.28 ।

3. **सतत् श्रेणी में हरात्मक माध्य की गणना :**

सतत् श्रेणी में हरात्मक माध्य की गणना करने के लिए वर्गों के मध्य मूल्य (Mid Value) निकाल लिया जाता है जो पद मूल्य 'X' कहलाता है, पुनः खंडित श्रेणी वाली प्रक्रिया का अनुपालन करके हरात्मक माध्य निकाल लिया जाता है।

उदाहरण (**Illusration**) :

निम्न आँकड़ों से हरात्मक माध्य ज्ञात किजिए—

वर्ग :	0—4	4—8	8—12	12—14	16—20
आवृत्ति :	4	12	20	9	3

हल (**Solution**) :

वर्ग	मध्य—मूल्य x	आवृत्ति f	व्युत्क्रम $^1/_x$	व्युत्क्रम x आवृत्ति Rec. X faq Rec. xxf
0—4	2	4	0.5000	2.0000
4—8	6	12	0.1667	2.0004
8—12	10	20	0.1000	2.0000
12—16	14	9	0.0714	0.6426

16–20	18	3	0.0556	0.2780
योग		N = 50	–	6.2210 $\sum$ (Rec. Xxf)

$$H.M = \text{Rec.}\left[\frac{\sum (\text{Rec X x.f})}{N}\right]$$

$$= \text{Rec.}\left[\frac{6.9210}{50}\right] = \text{Rec. } 0.13842$$

∴ हरात्मक माध्य = 7.246 या 7.25।

भारित हरात्मक माध्य :

यदि किसी समंक मात्रा में x_1, x_2, x_3, x--- x_n के भार क्रमशः : $w_1, w_2, w_3,$ --- w_n हों तो भारित हरात्मक माध्य का सूत्र निम्न प्रकार है–

$$W.H.M = \text{Reciproccal}\left[\frac{\sum (\text{Rec X xw})}{\sum w}\right]$$

उदाहरण (Illusration) :

निम्न आँकड़ों से भारित माध्य ज्ञात करें–

X :	4	5	6	7
W :	2	5	3	1

हल (Solution) :

x	w	व्युत्क्रम $^1/_x$	व्युत्क्रम $x\frac{1}{\pi}$
4	2	0.2500	0.5000
5	5	0.2000	1.0000
6	3	0.1667	0.5000
7	1	0.1429	0.1429
योग	$\sum w = 11$		$\sum$ (Rec. XxW) = 2.1429

$$W.H.M = \text{Reciproccal}\left[\frac{\sum (\text{Rec X xw})}{\sum w}\right]$$

$$= \text{Rec.}\left[\frac{2.1429}{11}\right]$$

$$= \text{Rec. } (0.195)$$

भारित हरात्मक माध्य = **5.128।**

हरात्मक माध्य के गुण :

हरात्मक माध्य के निम्नलिखित गुण है :–

क. हरात्मक माध्य समंकमाला के सभी पदों पर आधारित होता है।

ख. हरात्मक माध्य में बड़े मूल्यों के पदों को कम तथा छोटे मूल्यों के पदों को अधिक महत्व दिया है।

ग. अधिक प्रचलन वाली श्रेणी में यह माध्य उपयुक्त रहता है।

घ. गति ज्ञात करने में यह माध्य उपयुक्त रहता है।

ङ. हरात्मक माध्य भारित माध्य से श्रेष्ठ है क्योंकि इसमें भार देने की आवश्यकता नही पड़ती, स्वयं पदों को भार मिल जाता है।

दोष : हरात्मक माध्य के निम्नलिखित दोष है :–

क. हरात्मक माध्य की गणना करना कठिन होता है तथा सामान्य व्यक्ति उसे कठिनता से ही समझ पाता है।

ख. हरात्मक माध्य में ज्ञात करने के लिए समंकमाला के समस्त पदों का ज्ञान होना आवश्यक हो।

ग. हरात्मक माध्य ऐसी संख्या हो सकती है जो उस श्रेणी में न हों।

विशेष उपयोग : सांख्यिकी में हरात्मक माध्य का उपयोग सीमित क्षेत्र में किया जाता है। औसत गति, 'चलन–वेग' तथा वस्तु की मात्रा प्रति रूपया के रूप में दिए गये मूल्य इत्यादि की औसत मात्रा ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य विशेष रूप से उपयुक्त है। इन स्थितियों में समान्तर माध्य का प्रयोग नहीं करना चाहिए। उदाहरणार्थ, यदि एक मोटर कार 20 किलोमीटर, 40 किलोमीटर प्रति घंटा (Km/ph) की गति से जाती है तथा वापसी में 120 किलोमीटर का रास्ता 60 किलोमीटर प्रति घण्टा की गति से तय करती है, तो उसकी औसत गति 40 व 60 का हरात्मक माध्य अर्थात् 48 होगी–

$$HM = \frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{60}} \quad \text{या} \quad \frac{2}{\frac{5}{120}} = 48 \text{ km. ph.}$$

कुल 240 कि0मी0 का रास्ता तय करने में उसे 5 घण्टे लग जाते है अतः उसकी औसत गति $\frac{240}{5}$ या 48 कि0मी0 प्रति घण्टा है। यहाँ समान्तर माध्य निकालना गलत होगा। 40 व 60 का समान्तर माध्य 50 है। यदि 50 का 5 से गुणा किया जाए तो 250 कि0मी0 की दूरी आती है जबकि कार द्वारा 240 कि0मी0 का रास्ता तय किया गया है। इसलिए औसत गति की गणना करने में हरात्मक माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार यदि तीन स्थानों पर नारंगियों के मूल 5 प्रति रूपय, 4 प्रति रूपय व 2 प्रति रूपय दिए हैं तो औसत मूल्य $\frac{5+4+2}{2}$ या $3\frac{2}{3}$ प्रति रूपया या 1 नारंगी का $\frac{300}{11}$ अर्थात् $27\frac{3}{11}$ पैसे नहीं होगा बल्कि वह $\frac{3}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{3X20}{19}$ नारंगियाँ प्रति रूपया या $\frac{1900}{60} = 31\frac{2}{3}$ पैसे प्रति नारंगी होगा।

यदि यही मूल्य मुद्रा के रूप में प्रस्तुत किए जाये जैसे 20, 25 व 50 पैसे प्रति नारंगी, तब समान्तर माध्य उपयुक्त होगा, अर्थात् $\frac{20+25+50}{3} = \frac{95}{3}$ या $31\frac{2}{3}$ पैसे प्रति नारंगी। परन्तु जब मूल्य मात्रा प्रति रूपये के रूप में दिए जाएँ तो हरात्मक माध्य ही उपयुक्त होता है।

8.10 बोध प्रश्न :

1. **रिक्त स्थानों की पूर्ति करें–**
   1. वह मूल्य जो श्रृंखला के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करता है............ कहलाता है।
   2. सामूहिक समान्तर माध्य के लिए प्रतीक.............................का प्रयोग किया जाता है।
   3. श्रृंखला का वह मूल्य जो सबसे अधिक बार आता है.................. कहलाता है।
   4. ....से बहुलक की गणना की जाती है।
   5. चरम मूल्य का प्रभाव............................. पर पड़ता है।

6. श्रेणी के सभी मूल्यों के गुणनलफ का मूल ही.................... माध्य होता है।
7. प्रति किलोमीटर गति का ज्ञान करने के लिए................ निकाला जाता है।

2. **सत्य एवं असत्य कथन छाँटिए–**

1. समान्तर माध्य सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता है।
2. समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों का योग शून्य होता है।
3. मध्यका समंक श्रेणी को दो बराबर भागों में बाँटता है।
4. मध्यका पर चरम मूल्य का अधिकतम प्रभाव पड़ता है।
5. समूहीकरण विधि का उपयोग मध्यका निकालने में किया जाता है।
6. बहुलक का मूल्य रेखाचित्र बनाकर निर्धारित किया जा सकता है।
7. बहुलक = 2 मध्यका − 3 माध्य।
8. गुणोत्तर माध्य का उपयोग प्रतिशत वृद्धि दरों तथा अनुपातों का औसत निकालने में किया जाता है।
9. हरात्मक माध्य के लिए मूल्यों का व्यूत्क्रम नही निकाला जाता है।
10. हरात्मक माध्य समंका माला के सभी पदों पर आधारित नहीं होता है।

8.11 बोध प्रश्नों के उत्तर :

1. **खाली स्थान वाले प्रश्नों के उत्तर–**

1. औसत; 2. $\overline{X}C$; धनात्मक; 3. बहुलक; 4. निरीक्षण विधि; 5. समान्तर माध्य; 6. गुणोत्तर माध्य; 7. हरात्मक माध्य।
2. असत्य; 2. सत्य; 3. सत्य; 4. असत्य; 5. असत्य; 6. सत्य; 7. असत्य; 8. सत्य सत्य; 9. असत्य; 10. असत्य।

8.12 स्व परख प्रश्न :

1. केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों और उनके गुण–दोषों का वर्णन कीजिए।
2. केन्द्रीय प्रवृत्ति से क्या अभिप्राय है? समान्तर माध्य की विशेषताएँ लिखिए।
3. केन्द्रीय प्रवृत्ति से आप क्या समझते है? किन परिस्थितियों में मध्यका केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य मापों से अधिक उपयुक्त होता है?
4. समान्तर माध्य, मध्यका व भूमिष्ठक से को परिभाषित कीजिए।
5. गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
6. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए –

खेतों का केन्द्रीय आकार (एकड़ में) :	10	20	30	40	50	60	70
खेतों की संख्या :	7	12	17	29	31	5	3

7. निम्न समंकों से मध्यका की गणना कीजिए –

11.7 9.5 7.2 10.3 8.4 6.7 5.6 7.5 8.7

8. निम्न समंकों से समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए –

प्राप्तांक :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
विद्यार्थियों की संख्या :	15	25	52	56	78	80	70

$[\bar{X} = 43.12, m = 45.128, Z = 51.67]$

9. निम्नलिखित अपूर्ण वितरण से अज्ञात आवृत्तियों ज्ञात कीजिए जबकि मध्यका 45 है–

वर्ग अंतराल :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
आवृत्तियाँ :	12	30	?	66	?	25	18	230

(40 और 39)

10. निम्नलिखित अपूर्ण वितरण से अज्ञात आवृत्तियों ज्ञात कीजिए जबकि मध्यका 45 है–

क्र.सं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
रूपय	360	850	700	150	750	3000	80	450	2500	400

$[G.m = Rs\ 580.30.\ \ Hm = 320.50]$

11. निम्न श्रेणी से गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए –

2574, 475, 75, 5, 0.8, 0.08, 0.005, 0.0009

$[G.m = 1.841, HM = 0.00604]$

12. निम्नलिखित से हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए–

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
रूपय	4	5	11	6	4

$[H.M = 16.36]$

इस खण्ड के लिये कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Nakkiran, S, Nazer M and Germay F (2015), Business, Research Methods, New Delhi : Abhijeet Publication.
2. श्रीवास्तव प्रेम कुमार (2008), विपणन अनुसंधान, जयपुर : राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी।
3. गुप्ता एस0पी0 एवं गुप्ता अलका (2008); सांख्यिकीय विधियाँ, इलाहाबाद; शारदा पुस्तक भवन।
4. Sachdeva, S (2013-14), Quanitative Techniques, Agra : Lakshmi Narain Agrawal Educational Publisher.
5. Jain J.R. and S.C. (2013-14), Business statistics New Delhi, V K Global Pubication Pvt. Ltd.

/ / / /

M.Com.-201

(शोध प्रविधि)

Research Methodology

उ० प्र० राजर्षि टण्डन
मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

खण्ड – 3

केन्द्रीय प्रवृत्ति, प्रायिकता एवं सांख्यिकी टुल्स

(Central Tendency, Probability and Statistical Tools)

खण्ड – 3 केन्द्रीय प्रवृत्ति, प्रायिकता एवं सांख्यिकी टुल्स

खण्ड 3 केन्द्रीय प्रवृत्ति '**प्रायिकता एवं सांख्यिकी टुल्स**' इस खण्ड में समंकों के विश्लेषण हेतु केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप के साथ प्रायिकता सिद्धान्त का वर्णन किया गया है जिससे शोधार्थी अपने इष्टतम लक्ष्य की प्राप्ति कर सकें।

इकाई – 09 में दिये गये आँकड़ों के लिए एक उचित मापदण्ड के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों का विस्तृत वर्णन है।

इकाई – 10 में आँकड़ों का सटीक परिणाम हेतु अपकिरण की व्याख्या किया गया है।

इकाई – 11 में दो, चरों या दो से अधिक चरों के मध्य संबंधों को गुणात्मक रूप में जानने के लिए एवं मात्रात्मक रूप में जाने हेतु विधियों का वर्णन है।

इकाई – 12 जीवन में सम्भावना ही संभावना विद्यमान है यही आँकड़े संभाविता को सत्यता के करीब ले जानने में मद्द करते है वो कैसे और किस प्रकार करते है का ज्ञान इस इकाई में किया गया है।

इकाई – 9 परिक्षेपण / अपकिरण (Disperson)

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन करने के पश्चात् आप निम्नलिखित के बारे में जानकारी प्राप्त करेगें।

- समंक श्रेणी रचना के बारें जानकारी।
- समंक श्रेणी के बारे में यथेष्ट जानकारी।
- परिक्षेपण ज्ञात करने की विभिन्न रीतियों की जानकारी; तथा
- माध्य की विश्वसनियता की जाँच।

9.1 प्रस्तावना :

वाणिज्य के विद्यार्थियों को यह कहावत तो यदा–कदा सुनने को मिला ही होगा कि, ''लेखा–जोखा ज्यों का त्यों, सारा कुनबा डूबा क्यों?'' एक व्यक्ति सपरिवार नदी के किनारे पहुँचा, पार करने से पहले हिसाब लगाया कि नदी की औसत गहराई से उसके कुटुम्ब के सदस्यों की औसत ऊँचाई अधिक है, परन्तु एक स्थान पर नदी की गहराई औसत से बहुत अधिक होने के कारण उसका पूरा परिवार डूब गया। अतः यह स्पष्ट है कि समंक श्रेणी के बारे में यथेष्ट ज्ञान प्राप्त करने के लिए न केवल उसका माध्य जानना आवश्यक है बल्कि विभिन्न व्यक्तिगत मूल्यों का उस माध्य से औसत अंतर और श्रेणी की संरचना तथा स्वरूप आदि के बारें में पूरी जानकारी प्राप्त करना भी परमावश्यक है। अपकिरण या परिक्षेपण की माप इसी का ज्ञान कराता है। जो इस अध्याय में वर्णित किया गया है।

9.2 परिचय :

पिछले अध्याय में हमने औसत या केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का अध्ययन किया है, जो एक प्रतिनिधि मूल्य है। परन्तु एक औसत यह नहीं बता पाता है की एक श्रृंखला की विभिन्न मदों में कितना अंतर हैं। इसलिए औसत की जानकारी प्राप्त करने के साथ–साथ यह ज्ञान प्राप्त करना भी जरूरी हो जाता है कि किसी श्रृंखला की विभिन्न मदों में आपस में कितना अंतर है? तथा माध्य से कितना अंतर हैं? इस तथ्य का अध्ययन करने के लिए ही परिक्षेपण (अपरिकरण) या विचरणीशीलता (Varibility) अथवा बिखराव के विषय में पूर्ण जानकारी प्राप्त करनी चाहिए। जब हम किसी श्रृंखला के औस्त मूल्य के साथ परिक्षेपण मूल्य का अध्ययन करते हैं तभी हम उस श्रृंखला की प्रकृति तथा रचना के विषय में व्यापक ज्ञान प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, तीन कारखानों A, B और C के पांच मजदूरों की मजदूरी से संबंधित आँकड़े निम्न प्रकार से हैं :

कारखाना A, B, C के मजदूरों की मजदूरी

A मजदूरी	B मजदूरी	C मजदूरी
400	350	50
400	380	75
400	400	400
400	420	725
400	450	750

इन आँकड़ों से ज्ञात है कि समांतर माध्य तथा माध्यिका तीनों कारखानों में समान हैं अर्थात् रू0 400, परंतु यह आसानी से देखा जा सकता है कि कारखाने A में प्रत्येक मजदूर को एक समान मजदूरी मिल रहा है अर्थात् कोई विचरण (Variation) नहीं है। कारखाना B में मजदूरी को दिए जाने वाले वेतन में विचरण कम है। परन्तु कारखाना C में सबसे अधिक अंतर है। यहाँ न्यूनतम मजदूरी रू0 50 तथा अधिकतम मजदूरी रू0 750 है (जो कि औसत वेतन 400 से कहीं अधिक हैं)। इसका अभिप्राय यह है कि माध्य तथा माध्यिका श्रृंखला की रचना तथा प्रकृति की सही तस्वीर प्रस्तुत नहीं करती। इन विभिन्न परिस्थितियों का विश्लेषण करने के लिए हमारे पास एक अन्य सांख्यिकीय विधि है जिसे परिक्षेपण का माप कहते हैं।

डॉ0 बाउले के अनुसार– ''परिक्षेपण मदों के विचरण का माप है।''

स्पीगेल के अनुसार– ''संख्यात्मक आँकड़े एक माध्य मूल्य के दोनों ओर फैलने की जिस सीमा तक प्रवृत्ति रखते हैं, उस सीमा को उन आँकड़ों का विचरण परिक्षेपण कहते है।''

परिक्षेपण के निरपेक्ष तथा सापेक्ष माप : परिक्षेपण के निम्नलिखित दो माप होते हैं :–

(क). निरपेक्ष माप (**Absolute Measune**) :

परिक्षेपण का निरपेक्ष माप यह होता है जिसे उन्ही इकाईयों में व्यक्त किया जाता है जिनमें मूल आँकड़े होते हैं। परिक्षेपण के निरपेक्ष माप को श्रृंखला की मौलिक इकाई में ही व्यक्त किया जाता है अर्थात् उन्हीं इकाइयों में व्यक्त किया जाता है जिनमें मूल आँकड़े होते हैं। उदाहरण के लिए यदि यह कहा जाय कि श्रमिकों के एक समूह की औसत मजदूरी रू0 100 है तथा परिक्षेपण रू0 10 है तो मद परिक्षेपण का निरपेक्ष माप कहलाएगी। परिक्षेपण के निरपेक्ष माप का प्रयोग वहाँ उचित होता है जहाँ केवल किसी एक ही वितरण का वर्णन करना होता है। इसके द्वारा दो या दो से अधिक श्रृंखलाओं की तुलना नही की जा सकती।

(ख). सापेक्ष माप (**Relative Measune**) :

परिक्षेपण का सापेक्ष माप वह होता है जिसमें आँकड़े के अंतर को अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए यदि यह कहा जाय कि भारत में 26 प्रतिशत जनता निर्धनता रेखा से नीचे हैं तो यह सापेक्ष माप होगा। सापेक्ष माप को ज्ञात करने के लिए माध्य मूल्य को औसत से भाग कर दिया जाता है या उसका प्रतिशत ज्ञात किया जाता है। सापेक्ष माप का प्रयोग वहाँ उचित होता है जहाँ दो या दो से अधिक श्रृंखलाओं की तुलना करनी हो। इसे परिक्षेपण गुणांक (Coefficint of Dispersion) भी कहा जाता है।

9.3 परिक्षेपण/अपकिरण ज्ञात करने की विधियाँ :

परिक्षेपण ज्ञात करने की निम्नलिखित रीतियाँ हैं :–

(क). सीमा रीति (Method of Limet)

1. विस्तार (Range)
2. अन्तर चतुर्थक विस्तार (Interquartile Range)
3. शतमक विस्तार विस्तार (Percentile Range)

(ख). विचलन माध्य रीति (Method of Averaging Deviation)

1. चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)
2. माध्य विचलन (Mean Deviation)
3. प्रमाण विचलन (Standerd Deviation)
4. अन्य माप (Other measure)

(ग). बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Method)

1. लारेंज वक्र (Loranze Curve)

नोट :– परिक्षेपण के सापेक्ष माप को ही विचरण गुणांक भी कहा जाता है।

9.4 विस्तार (**Range**) :

यह परिक्षेपण का सबसे सरलतम माप है। परास किसी श्रृंखला के अधिकतम मूल्य तथा श्रृंखला के सबसे छोटे मूल्य का अंतर होता है। सूत्र

R = C - S

जहाँ R = Range

C = LargestValue (अधिकतम मूल्य)

S = SmallestValue (छोटा मूल्य)

उदाहरण के लिए, पाँच विद्यार्थियों का जेब खर्च रू0 20, 30, रू0 40, रू0 50 और रू0 100 प्रतिमाह है। इस श्रृंखला का अधिकतम मूल्य (L) रू0 100 तथा न्यूनतम मूल्य (S) रू0 20 है। अतः

जहाँ R = L-S

R = रू0 100– रू 20 = रू0 80 होगा अर्थात्

R = रू0 80

परास गुणांक (Coefficient of Range) :

परास परिक्षेपण का एक निरपेक्ष माप है जिसकी सहायता से श्रृंखलाओं की ठीक प्रकार से तुलना नहीं हो सकती। इसे तुलना योग्य बनाने के लिए सापेक्ष रूप में बदलना पड़ेगा। जिसके लिए परास गुणांक निकाला जाता है। सूत्र–

परास गुणांक – Coefficient of Range C.R. = $\frac{C-S}{C+S}$

विभिन्न सांख्यिकीय श्रृंखलाओं के परास तथा परास गुणांक की गणना :

विभिन्न उदाहरणों से हमे सीख लेना चाहिए कि विभिन्न प्रकार की सांख्यिकीय श्रृंखलाओं में विस्तार और उसके गुणांक की गणना कैसे की जाती हैं :–

1– व्यक्तिगत श्रृंखला के परास की गणना : व्यक्तिगत श्रृंखला में सबसे बड़ी संख्या तथा सबसे छोटी संख्या का अन्तर निकाला लिया जाता है, इसे ही परास कहा जाता है।

उदाहरण (**Illustration**) :

एक कारखाने के मजदूरों की प्रति माह मजदूरी निम्नलिखित है। इनकी आय का परास तथा परास गुणांक ज्ञात कीजिए।

मजदूरी (रू0)	50	60	80	90	200	225	250	300	340	360	400	415

हल (**Solution**)

परास (R) = L-S

= 415-50

= 365

अतः परास (R) 365 हुआ।

परास गुणांक (C.R.) $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{415-}{415+}$

$= \frac{365}{465}$

$= 0.78$

परास गुणांक = 0.78 हुआ।

2— खण्डित श्रेणी के परास की गणना :

खण्डित श्रेणी में परास निकालने के लिए सबसे बड़ी मद के मान का तथा सबसे छोटी मद के मान का अन्तर निकाला जाता है। इन्हे ज्ञात करने के लिए आवृत्तियों को ध्यान नहीं रखा जाता है।

उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित बंटन का परास व परास गुणांक ज्ञात कीजिए :

प्राप्तांक	10	11	12	13	14	15	16	18
विद्यार्थियों की संख्या	1	13	24	14	15	13	16	20

हल (Solution)

यहाँ L = 18, S= 10

परास R = L- S

= 18-10

= 8

परास गुणांक (C.R.) $= \frac{L-S}{L+S}$

$= \frac{18-1}{18+1}$

$= \frac{8}{28}$

$= 0.29$

परास गुणांक = 0.29 हुआ।

3– अखिण्डत श्रेणी के परास की गणना :

अखण्डित श्रेणी का परास ज्ञात करने के लिए दिए हुए आवृत्ति वितरण की प्रथम वर्गांतर की निचली सीमा तथा अंतिम वर्गान्तर की उच्चतम सीमा का अंतर निकाल लिया जाता है। यदि समावेशी श्रृंखला है तो उसे अपवर्जी श्रृंखला में परिवर्तित कर लिया जाता है।

सूत्र : R = अंतिम वर्गान्तर की उच्च सीमा – प्रथम वर्गान्तर की निचली सीमा।

उदाहरण (Illustration) :

निम्न आँकड़ों का परास तथा परास गुणांक ज्ञात कीजिए :

अंक	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	7	3

हल (Solution)

इस प्रश्न को हल करने से पहले समावेशी श्रृंखला को अपवर्णी श्रृंखला में बदल लिया जायेगा– अर्थात् वर्ग की उच्च सीमा निम्न सीमा ÷ 2। प्राप्त भागफल को निम्न सीमा मे से घटाया जाता है तथा उच्च सीमा में जोड़ा है, क्रमशः अपवर्जी श्रेणी प्राप्त होती जायेगी।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
19.5 – 29.5	8
29.5 – 39.5	12
39.5 49.5	20
49.5 – 59.5	7
59.5 – 69.5	3

R = L-5

जहाँ L = 69.5, S = 19.5

R = 69.5 – 19.5

= 50.0

परास 50 होगा।

परास गुणांक C.R $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{69.5-19.5}{69.5+19.5}$

$= \frac{50}{89} = 0.562$

परास = 50

परास गुणांक = 0.562

परास के गुण एवं अवगुण :

गुण :

(क). परास की गणना करना तथा इसे समझना बहुत सरल है।

(ख). इसका गुण नियंत्रण सबंधी कार्यों में प्रयोग अधिक लाभदायक है। परास के आधार पर नियंत्रण चार्ट तैयार किये जाते हैं। यदि उत्पादित वस्तुओं की गुणवत्ता, चार्ट में दिए गए परास के अनुसार है उत्पादन प्रक्रिया को नियंत्रण में माना जायेगा अन्यथा नहीं माना जायेगा। इसी प्रकार ब्याज की दर, विनियम दर, शेयर कीमतों आदि में होने वाले परिवर्तनों को मापने के लिए परास का प्रयोग सामान्य रूप से किया जाता है।

अवगुण :

(क). परास किसी श्रृंखला का स्थिर माप नहीं है। यह सीमांत मानों पर निर्भर करता है। इनमें होने वाले परिवर्तनों का परास पर तुरंत प्रभाव पड़ता है।

(ख). परास श्रृंखला के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं है। इसमें सभी मूल्यों का महत्व नहीं दिया जाता।

(ग). परास से श्रृंखला की बनावट की जानकारी प्राप्त नहीं होती है।

(घ). खुले सिर वाली आवृत्ति वितरण की स्थिति में परास की गणना नहीं की जा सकती। अतः इस स्थिति के लिए परास अनुपयुक्त होता है।

9.5 चतुर्थक विचलन :

तृतीय चतुर्थक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) का अंतर अर्थात् ($Q_3 - Q_1$) अन्तर चतुर्थक विस्तार कहलाता है। इस अंतर के आधे को ही चतुर्थक विचलन या अर्द्ध–अन्तर–चतुर्थक विस्तार (Semi inter-Quartile Range) कहते हैं।

सूत्र : $Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

जहाँ : $Q.D$ = चतुर्थक विचलन

Q_3 = तृतीय चतुर्थक तथा

Q_1 = प्रथम चतुर्थक के लिए संकेत हैं।

चतुर्थ विचलन गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation) :

चतुर्थक विचलन गुणांक, परिक्षेपण का सापेक्ष साच है। इसे ज्ञात करने के लिए तीसरे तथा पहले चतुर्थकों के अंतर के आधे को इसके योग के आधे से भाग कर देते हैं।

सूत्र :

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \div \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{Q_3 - 8_1}{2} \text{ X } \frac{2}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

विभिन्न सांख्यिकीय श्रेणियों के चतुर्थक विचलन तथा चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना :

1. **व्यक्तिगत श्रेणी में चतुर्थक विचलन की गणना :**

व्यक्तिगत श्रृंखला में चतुर्थक विचलन निकालने के लिए पहले प्रथम चतुर्थक तथा तृतीय चतुर्थक को निम्नलिखित सूत्रों की सहायता से ज्ञात करना पड़ता हैं :

$$Q_1 = \text{Size of} \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{th item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3\,(N+1)}{4} \text{ th item}$$

इसके पश्चात् निम्नलिखित सूत्रों की सहायता से चतुर्थक विचलन (Q.D) तथा चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात किया जाता हैं :

सूत्र :

चतुर्थक विचलन (QD) = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

चतुर्थक विचलन गुणांक (QD) = Coefficent of QD = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्नलिखित आँकड़ों का चतुर्थक विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए–

क्रम संख्या :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
अंक :	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60

हल (**Solution**) :

$$Q_1 = \text{Size of} \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{th item}$$

$$= \text{Size of} \left(\frac{11+4}{4}\right) \text{th item}$$

$= \text{Size of } 3^{rd} \text{ item} =$ 20 अंक।

अतः $Q_1 =$ 20 ।

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3\,(N+1)}{4} \text{ th item}$$

$$= \text{Size of } \frac{3\,(11+1)}{4} \text{ th item}$$

$$= \text{Size of } \frac{36}{4} \text{ th item} = 9^{th} \text{ item}$$

अथवा = 50 अंक।

अतः $Q_3 =$ 50 ।

चतुर्थक विचलन (QD) $= \frac{Q_3-Q_1}{2}$

$= \frac{50-20}{2} = \frac{30}{2}$

(QD) $=$ 15 ।

चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficent of QD) $= \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

$= \frac{50-2}{50+20} = \frac{30}{70}$

(QD) $=$ 0.43

चतुर्थक विचलन = 15

चतुर्थक विचलन गुणांक = 0.43

2. खण्डित श्रेणी का चतुर्थक विचलन की गणना :

खण्डित श्रेणी में Q_1 तथा Q_3 संचयी आवृत्तियों (Cumulative Frequency) की सहायता से ज्ञात की जाती है। तत्पश्चात् चतुर्थक विचलन के सूत्र का प्रयोग करके Q.D निकाला जाता है। जैसाकि निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट हो जाता हैं :

उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित तालिका किसी फर्म के 199 श्रमिकों को मिलने वाली दैनिक मजदूरी प्रकट करती है। इनका चतुर्थक विचलन तथा उनका गुणांक ज्ञात कीजिए।

मजदूरी (रू)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
मजदूरों की संख्या	2	8	20	35	42	20	28	26	16	2

हल (Solution) :

सहसे पहले दी हुई श्रृंखला को संचयी आवृत्ति वितरण श्रृंखला में परिवर्तित करें :—

मजूदरी (रू0) x	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति cf
10	2	2
20	8	10
30	20	30
Q_1 40	35	65
50	42	107
60	20	127
Q_3 70	28	155
80	26	181
90	16	197
100	2	199

योग	$N = 199$

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{ th item}$$

$$= \frac{199+1}{4} = 50 \text{ th item}$$

50वीं मद 65 वाली संचयी आवृत्ति में शामिल है इसलिए पहला चतुर्थक (Q_1) रू0 40 होगा।

इसी प्रकार –

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3\,(N+1)}{4} \text{ th item}$$

$$= \text{Size of } \frac{3\,(199+1)}{4} \text{ th}$$

$$= \text{Size of } \frac{3\,(200)}{4} \text{ th item}$$

$$= \text{Size of } \frac{600}{4} \text{ th item}$$

$$= 150 \text{ th item}$$

150वीं मद 155 वाली संचयी आवृत्ति में शामिल है इसलिए तृतीय चतुर्थक Q_3 रू0 70 होगा।

चतुर्थ विचलन (QD) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{70-4}{2} = \frac{30}{2} = 15$

चतुर्थ विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{70-4}{70+4} = \frac{30}{110} = 0.27$

3. **अखण्डित श्रेणी का चतुर्थक विचलन की गणना :–**

अखण्डित श्रेणी मे चतुर्थक विचलन की गणना करने के लिए प्रथम चतुर्थक तथा तृतीय चतुर्थक की गणना करने के लिए संचयी आवृत्ति निकाला जाता है। तत्पश्चात् पद–संख्या निर्धारण किया जाता है जो निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :–

$$Q_1 = \text{Size of } \frac{N}{4} \text{ th item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3N}{4} \text{ th item}$$

ज्ञात पद–संख्या (th item) निर्धारण के बाद संचयी आवृत्ति की सहायता से उस विभाजन मूल्य का वर्गान्तर ज्ञात कर लिया जाता है। तत्पश्चात् निम्न सूत्र से Q_1 वास्तविक तथा Q_3 का मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है।

$$Q_1 = l_1, + \frac{i}{f}\,(q_1 - c)$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{i}{f}\,(q_3 - c)$$

उसके बाद पूर्व में लिखित चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक के सूत्र का प्रयोग कर Q.D तथा Coeff. of Q.D. की गणना कर ली जाती है।

उदाहरण (**Ilustration**) :

निम्नलिखित बंटन का चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक निकालिए :

आयु (वर्ष)	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
व्यक्तियों की संख्या	4	10	15	20	11

हल (**Solution**) :

आयु	व्यक्तियों की संख्या	संचयी आवृत्ति
0–20	4	4
20–40	10	14 C
l_1 40–60	15–f	29 C
l_1 60– 80	20–f	49
80 –100	11	60
योग	N =60	

प्रथम चतुर्थक Q_1 $=$ Size of $\left(\frac{N}{4}\right)$ th item

$=$ Size of $\frac{60}{4}$ th item = size of 15th item

15 वीं मद 40–60 वर्गान्तर में स्थित है और श्रृंखला की 29वीं संचयी आवृत्ति के अन्तर्गत आती है।

$$Q_1 = l_1 + \frac{i}{f}(q_1 - c) \qquad (i = 60 - 40 = 20)$$

$$= 40 + \frac{20}{15}(15 - 14)$$

$$= 40 + \frac{20}{15} = \mathbf{41.33}$$

(यहाँ l_1 = वर्गान्तर की निचली सीमा अर्थात 40; N = आवृत्ति का जोड़ अर्थात् 60; c = चतुर्थक विचलन वाले वर्गान्तर से पहले वाले वर्गान्तर की संचयी आवृत्ति ; i = वर्गान्तर का अन्तर अर्थात् 60–40 = 20; f = चतुर्थक वर्गान्तर की आवृत्ति : q_1 पद–संख्या)।

इसी प्रकार, तृतीय चतुर्थक Q_1 $=$ Size of $\frac{3\,(N)}{4}$ th item

$=$ Size of $\frac{3\,(60)}{4}$ th item

$=$ Size of 45th item

45वीं मद 60–80 वर्गान्तर में स्थित है और श्रृंखला की 49वीं संचयी आवृत्ति के अन्तर्गत आती है।

$$Q_3 = l_1 + \frac{i}{f}(q_1 - c)$$

$$= \quad 60 + \frac{20}{20}(45-29)$$

$$= \quad 60 + 16 \; = 76$$

चतुर्थ विचलन (QD) $= \quad \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} = \frac{76-41.33}{2}$

$$= \quad \frac{34.67}{2} = 17.34$$

चतुर्थ विचलन गुणांक (Coeffi. of Q.D) $= \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

$$= \quad \frac{76-4\ .33}{46+4\ .33} = \frac{34.67}{117.33}$$

$$= \quad \mathbf{0.30}$$

चतुर्थक विचलन = 17.34 तथा

चतुर्थक विचलन गुणांक = 0.30

चतुर्थक विचलन के गुण एवं अवगुण :

गुण :

(क). चतुर्थक विचलन को समझना व इसकी गणना करना सरल है।

(ख). परिक्षेपण की इस विधि पर सीमांत मूल्यों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।

अवगुण :

(क). चतुर्थक विचलन श्रृंखला के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता।

(ख). इस विधि से श्रृंखला की पूरी बनावट का ज्ञान प्राप्त नहीं होता।

(ग). चतुर्थक विचलन की गणना पर प्रतिदर्श में होने वाले परिवर्तन का बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है। इसलिए इसमें अस्थिरता का दोष पाया जाता है।

9.6 माध्य विचलन :

एक श्रेणी के किसी औसत मूल्य (समांतर माध्य ($\bar{X}$); माध्यिका (M); या बहुलक (Z) से निकाले गए विचलनों के जोड़ के समान्तर माध्य को माध्य विचलन कहा जाता हैं।

क्लार्क तथा **शैकड** के अनुसार– ''श्रृंखला के किसी सांख्यिकीय औसत (समान्तर माध्य, माध्यिका या बहुलक) से निकाले गए विभिन्न मूल्यों के विचलनों के समांतर माध्य को उसका माध्य विचलन कहा जाता है। मूल्यों के विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिन्ह + तथा – को छोड़ दिया जाता है, अर्थात् ऋणात्मक

विचलन भी धनात्मक मान लिए जाते हैं।'' माध्य विचलन की गणना के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया को अपनाया जाता है :–

(क). सबसे पहले श्रृंखला का समान्तर माध्य, माध्यिका या बहुलका ज्ञात करें।

(ख). श्रृंखला के समांतर माध्य या माध्यिका या बहुलक की सहायता से विभिन्न मदों का विचलन प्राप्त किया जाता है। इन विचलनों को जोड़ लिया जाता है। विचलनों को जोड़ते समय (+) धनात्मक तथा (–) ऋणात्मक चिन्हों को ध्यान में नहीं रखा जाता। सभी विचलनों को धनात्मक मान लिया जाता है।

(ग). माध्य से जो विचलन प्राप्त होते हैं उनके दोनों ओर दो सीधी खड़ी रेखाएं (जैसे– $|dm|$, $|d\bar{X}|$, तथा $|dz|$ बना दी जाती है। जिनका अर्थ होता है कि विचलन की गणना करते समय ऋणात्मक चिन्हों पर ध्यान नहीं दिया गया है तथा सभी विचलन धनात्मक मान लिये गये है।

(घ). योग को मदों की संख्या (N या $\sum f$) से भाग करे माध्य विचलन (Mean Diviation) ज्ञात कर लेते हैं।

नोट : माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए प्रायः माध्यिका से ही विचलन निकाले जाते हैं। समान्तर माध्य का भी कई बार प्रयोग कर लिया जाता है। परन्तु बहुलक का प्रयोग प्रायः नही किया जाता है।

सूत्र :

यदि विचलन माध्यिका से लिए जाएं तो निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता हैं :

$$\delta m = \frac{\sum|dm|}{N}$$

माध्यिका विचलन गुणांक का सूत्र = $\frac{\delta m}{M}$

यदि विचलन समांतर माध्य से लिए जाते है तो निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जायेगा :–

$$\delta\bar{X} = \frac{\sum|d\bar{X}|}{N}$$

माध्य विचलन गुणांक का सूत्र = $\frac{\delta\bar{X}}{\bar{X}}$

यदि विचलन बहुलक से लिए जाते है तो निम्नलिख्िा सूत्र का प्रयोग किया जायेगा :–

$$\delta z = \frac{\sum|dz|}{N}$$

माध्य विचलन गुणांक का सूत्र = $\frac{\delta z}{Z}$

माध्य विचलन की गणना विभिन्न श्रेणियों में :

1. व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य विचलन की गणना :

व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य–विचलन व उसके गुणांक को ज्ञात करने की दो रीतियाँ है– प्रत्यक्ष तथा लघु रीति।

प्रत्यक्ष रीति (Direct Method) : इस रीति के अनुसार माध्य विचलन निम्न प्रकार ज्ञात किया ज्ञाता है–

(क). पहले उस माध्य को ज्ञात किया जाता है जिससे माध्य–विचलन निकालना होता है। व्यवहार में अधिकतर मध्यका को ही आधार मान लिया जाता है।

(ख). बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ते हुए मध्यक (या अन्य माध्य) से विभिन्न मूल्यों के विचलन ।d। निकाले जाते हैं।

(ग). इन विचलों का जोड़ $\sum|d|$ प्राप्त किया जाता है।

(घ). उपरोक्त सूत्रों में से संबंधित सूत्र का प्रयोग किया जाता हैं, तथा

(ड़). माध्य–विचलन गुणांक ज्ञात करने के लिए माध्य–विचलन को संबंधित माध्य से भाग दे दिया जाता है।

उदाहरण (Illustration) :

एक कक्षा के 9 छात्रों के भार के आँकड़े निम्न वर्णित हैं। मध्यका और समान्तर माध्य से विचलन ज्ञात कीजिए तथा उनके गुणांकों का भी निर्धारण कीजिए–

भार (कि0ग्रा0) : 47 50 58 45 53 59 47 60 49

हल (Solution) :

पहले इन मूल्यों को आरोही क्रम में लिखकर इनका मध्यका तथा समान्तर माध्य ज्ञात किया जाएगा फिर इन माध्यों से विचलन निकाले जायेगें–

क्रमांक	भार (किलो) X	मध्यका 50 से विचलन (+ व – छोड़कर) $\mid dm \mid = \mid x\text{-}m \mid$	माध्य 52 से विचलन (+ व – को छोड़कर) $\lvert d\bar{X} \rvert = \lvert X - \bar{X} \rvert$
1	45	5	7
2	47	3	5
3	47	3	5
4	49	1	3
5	50	0	2
6	53	3	1
7	58	8	6
8	59	9	7
9	60	10	8
योग	$\sum x = 468$	$\sum\lvert dm\rvert = 42$	$\sum\lvert d\bar{X}\rvert = 44$

मध्यका से

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ th item}$$

$$= \text{Size of } \frac{9+1}{2} = 5 \text{ th item}$$

$$= 50$$

माध्य विचलन

$$\delta m = \frac{\sum|dm|}{N} = \frac{42}{9} = 4.67$$

माध्य विचलन गुणांक

$$c.of\ \delta m = \frac{\delta m}{M}$$

या $\frac{4.67}{50} = \mathbf{0.0934}$

समान्तर माध्य से

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N}$$

$$= \frac{468}{9} \text{ या } 52$$

माध्य विचलन

$$\delta \bar{X} = \frac{\sum|d\bar{X}|}{N} = \frac{44}{9} = 4.89$$

माध्य विचलन गुणांक

$$c.d\ \delta x = \frac{\delta\bar{X}}{\bar{X}} = \text{या } \frac{4.89}{52}$$

0.0940

मध्यका के लघु रीति द्वारा माध्य–विचलन निकालते समय मध्यका–मूल्य से अधिक और कम मूल्यों की संख्या को इसलिए ध्यान में नहीं रखा जाता क्योंकि मध्यका बिल्कुल केन्द्र में होता है और उसके दोनों ओर के

मूल्यों की संख्या बराबर होती है। ऐसी स्थिति में यदि N_A में से N_B घटाया जाए तो परिणाम सदैव शून्य होगा। इसलिए मध्यका से विचलन वाले सूत्र में $(N_A - N_B)m$ का प्रयोग नहीं किया जाता।

पिछले उदाहरण में लघु रीति द्वारा निम्न प्रकार माध्य विचलन ज्ञात किया जाएग–

क्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9
भार (कि0ग्रा0) आरोहि क्रम	45	47	47	49	50	53	58	59	60

लघु रीति द्वारा माध्य विचलन की गणना

मध्यका से

$$M = 50$$
$$\sum x_A = 53+58+59+60 = 230$$
$$\sum x_B = 49+47+47+45 = 188$$
$$\delta m = \frac{\sum x_A - \sum x_B}{N}$$
$$= \frac{230-188}{9}$$
$$= \frac{42}{9}$$
$$\therefore \quad \delta m = 4.67$$

माध्य से

$$X = 52$$
$$\sum x_A = 53+58+59+60 = 230$$
$$\sum x_B = 50+49+47+45 = 238$$
$$N_4 = 4; N_B = 5$$
$$\delta \bar{X} = \frac{\sum x_A - \sum x_B - (N_A - N_B)\bar{X}}{N}$$
$$= \frac{230-238-(4-5)52}{9}$$
$$= \frac{230-238+52}{9} \text{ या } \frac{44}{9}$$
$$\therefore \quad \delta \bar{X} = 4.89$$

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रत्यक्ष रीति द्वारा माध्य–विचलन निकालना अधिक सरल व सुविधाजनक है। इसलिए व्यक्तिगत समंकमाला में माध्य–विचलन प्रत्यक्ष रीति द्वारा ही ज्ञात करना चाहिए।

2. खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी में माध्य विचलन की गणना :

प्रत्यक्ष रीति (Direct method) – खण्डित श्रेणी में माध्य–विचलन ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी जाती हैं :–

क. वह माध्यम ज्ञात किया जाता है जिससे विचलन निकालना है।

ख. उस माध्य से प्रत्येक आकार (size) का चिन्ह–रहित विचलन निकाल लिया जाता है। ($|dm|$ या $|d\bar{X}|$)

ग. विचलनों में आवृत्तियों की गुणा करके जोड़ ($\sum f|dm|$ या $\sum f|d\bar{X}|$) लगा लिया जाता है।

घ. निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता है–

$$\delta m = \frac{\sum f|dm|}{N} ; \sum \bar{X} = \frac{\sum f|d\bar{X}|}{N} ; \delta z = \frac{\sum f|dz|}{N}$$

ङ़ माध्य विचलन गुणांक निकालने के लिए, निरपेक्ष माप को उस माध्य से भाग दे दिया जाता है जिससे विचलन ज्ञात किये गये हैं।

उदाहरण (Illustration) :

निम्न समंको से (क) अपकिरण का मध्यका गुणांक और (ख) अपकिरण का माध्य–गुणांक निकालिए–

पद–आकार	4	6	8	10	12	14	16
आवृत्ति	2	4	5	3	2	1	4

हल (Solution) :

पहले मध्यका तथा समान्तर माध्य का निर्धारण किया जाएगा–

पद आकार	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति c.f	आकार व आवृत्ति की गुणा f x X
4	2	2	8
6	4	6	24
8	5	11	40
10	3	14	30
12	2	16	24
14	1	17	14
16	4	21	64
योग	N = 21		$\sum fx = 204$

$$M = \text{size of } \frac{N+1}{2} \text{ th item}$$

$$= \text{size of } \frac{21+6}{2} = 11^{th} \text{ item}$$

$$= 8$$

$$M = 8$$

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{204}{21}$$

$$= 9.71$$

$$\bar{X} = 9.71$$

माध्य–विचलन का परिकलन

आकार	आवृत्ति	मध्यका 8 से विचलन		माध्य 9.71 से	
		विचलन (± छोड़कर)	कुल विचलन	विचलन (± छोड़कर)	कुल विचलन
x	f	$\|dm\|$	$fx\|dm\|$	$\|d\bar{X}\|$	$fx\|d\bar{X}\|$
4	2	4	8	5.71	11.42
6	4	2	8	3.71	14.84
8	5	0	0	1.71	8.55
10	3	2	6	0.29	0.87
12	2	4	8	2.29	4.58
14	1	6	6	4.29	4.29

16	4	8	32	6.29	25.16
योग	$N = 21$		$\sum f\|dm\| = 68$		$\sum f\|d\bar{X}\| = 69.71$

मध्यका से

$$\delta m = \frac{\sum f|dm|}{N}$$

$$= \frac{68}{21} = 3.24$$

(क). परिक्षेपण का मध्यका गुणांक–

$$c.\ of\ \delta m = \frac{\delta m}{M} \text{ या } \frac{3.24}{8}$$

$$= 0.405$$

समान्तर माध्य से

$$\delta\bar{X} = \frac{\sum f|d\bar{X}|}{N} = \frac{69.71}{21} = 3.32$$

$$= \frac{68}{21} = 3.24$$

(क). परिक्षेपण का मध्यका गुणांक–

$$c.\ of\ \delta\bar{X} = \frac{\delta\bar{X}}{x} \text{ या } \frac{3.32}{9.71}$$

$$= 0.342$$

3. अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य विचलन की गणना :

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य–विचलन ज्ञात करने की वही रीति है, जो विच्छिन्न या खण्डित श्रेणी में प्रयुक्त होती है। अन्तर केवल इतना है कि वर्गान्तरों के मध्य–बिन्दु (M.V) निकालकर उन्हें मूल्य (X) मान लिया जाता है। इस प्रकार अविच्छिन्न श्रेणी को खण्डित श्रेणी में बदल लिया जाता है। बाकी सभी क्रियाएँ पूर्ववत् रहती हैं।

उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित आँकड़ों का समांतर माध्य द्वारा माध्य–विचलन तथा माध्य विचलन गुणांक निकालिए–

लाभ रू0	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
दुकानें	5	10	15	20	25

हल (Solution) :

लाभ (रू0)	मध्य मूल्य m.v (X)	आवृत्ति f	मध्य–मूल्य (X) तथा आवृत्ति का गुणनफल fx	$\bar{X}$ से विचलन आवृत्ति विचलन $\|d\bar{X}\|$ $\bar{X} = 31.66$	विचलन तथा आवृत्ति का गुणनफल $f\|d\bar{X}\|$
0–10	5	5	25	26.66	133.30
10–20	15	10	150	16.66	166.60
20–30	25	15	375	6.66	99.90
30–40	35	20	700	3.34	66.80
40–50	45	25	1125	13.34	333.50
योग		$\sum f = 75$	$\sum fx = 2375$	$\sum \|d\bar{X}\| = 66.66$	$\sum f\|d\bar{X}\| = 800.10$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{2.375}{75} = 31.66$$

समांतर माध्य से विचलन

$$\delta \bar{x} = \frac{\sum f|d\bar{x}|}{\sum f} \quad = \quad \frac{800.10}{75} = 10$$

10.67

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta \bar{x}}{x}$

$$= \frac{10.67}{31.66} = 0.34$$

माध्य विचलन = 10.67 तथा माध्य विचालन गुणांक = 0.34

उदाहरण **(Illustration)** :

निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यिका द्वारा माध्य विचलन तथा माध्य विचलन गुणांक निकालिए–

आकार	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
आवृत्ति	4	6	10	8	5

हल **(Solution)** :

पद आकार x	मध्य मूल्य m.v	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति cf	माध्यिका से विचलन |dx| M = 153	विचलन तथा आवृत्ति का गुणनफल f|dm|
100–120	110	4	4	110–153=43	172
120–140	130	6	10 C	130–153=23	138
140–160	150	10 f	20	150–153=3	30
160–180	170	8	28	170–153=3	30
180–200	190	5	33	190–153=37	185
योग		$\sum f$= 33			$\sum f\|dm\|$=661

M $= \text{size of} \left(\frac{N}{2}\right)$ th item

$= \text{size of} \frac{33}{2}$ in item $= 16.5^{th}$ item

जो कि 140–160 वाले वर्ग में शामिल है। सूत्र से ज्ञात होता है कि–

$$M = l_1 + \frac{l}{f}(m\text{-}c)$$
$$= 140 + \frac{200}{10}(16.5\text{-}10)$$
$$= 140 + 2x6.5$$
$$= 140 + 13 = 153$$

माध्य विचलन गुणांक $= \delta \bar{x} = \frac{\sum f|dm|}{\sum f} \quad = \quad \frac{661}{33}$

$$= 20.03$$

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta m}{M}$

$$= \frac{20.03}{153} = 0.1309$$

माध्य विचलन $\delta m =$ 20.03 तथा माध्य विचलन गुणांक co. of δm = B 0.1309।

<u>माध्य विचलन के गुण एवं अवगुण :</u>

गुण :

क. माध्य विचलन की गणना सरलता से की जा सकती है। यह किसी भी माध्य से निकाला जा सकता है।

ख. माध्य विचलन का रूप विस्तृत होता है क्योंकि वह श्रृंखला के प्रत्येक मूल्य पर आधारित होता है।

ग. माध्य विचलन पर सीमांत मूल्यों का कम प्रभाव पड़ता है।

अवगुण :

(क). इसमें जमा (+) और ऋण (–) चिन्हों को छोड़ दिया जाता है जो कि गणितीय अशुद्धि है।

(ख). गणितीय अशुद्धि होने के कारण इसका प्रयोग बीजगणितीय प्रयोगों में नहीं किया जा सकता।

(ग). यदि विचलन बहुलक से लिए गये हैं और अनिश्चित है तो बहुलक द्वारा ज्ञात किया गया विचलन भी अनिश्चित होता है।

9.7 प्रमाप विचलन (Standard Deviation) :

प्रमाप जिसकों मानक विचलन के नाम से भी जाना जाता है। परिक्षेपण की एक अत्यन्त संजोषजनक वैज्ञानिक विधि है। इसका प्रयोग सबसे अधिक होता है। सर्वप्रथम कार्लपियर्सन ने इसे प्रयोग किया था; जो कि एक प्राणिशास्त्र विशेषज्ञ एवं सांख्यिक थे।

प्रमाप विचलन में दो प्रमुख विशेषताएँ है–

एक तो तो मूल्य के विचलन सदैव समान्तर माध्य ($\bar{x}$) से ही लिए जाते हैं, दूसरे + व – को छोड़ा नहीं जाता बल्कि प्राप्त विचलनों के वर्ग कर लिए जाते है, जिससे ऋणात्मक विचलनों के वर्ग भी स्वयं धनात्मक हो जाते हैं। अन्त में विचलन वर्गों का माध्य निकालकर उसका वर्गमूल ज्ञात कर लिया जाता है। यही प्रमाप विचलन कहलाता है। इस प्रकार यह माप माध्य–विचलन के दोषों से सर्वथा मुक्त है।

माध्य से विचलनों के वर्गों का समान्तर माध्य द्वितीय परिक्षेपण (अपकिरण) घात (second moment of dispersion) अथवा प्रसरण (variance) कहलाता है। प्रमापविचलन इसी मूल्य का वर्गमूल है। प्रमाप विचलन के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर सिग्मा σ (small sigma) प्रयुक्त किया जाता है।

<u>स्पीगल के अनुसार</u>, ''प्रमाप विचलन समांतर माध्य से श्रृंखला के विभिन्न मूल्यों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल है।''

प्रमाप–विचलन गुणांक– दो श्रेणियों के परिक्षेपण की तुलना करने लिए प्रमाप विचलन गुणांक (coefficient of standard deviation) कहते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए प्रमाप विचलन (σ) को समान्तर माध्य ($\bar{x}$) से भाग दिया जाता है, अर्थात्

प्रमाप विचलन गुणांक (coefficient of S.D) = $\frac{\sigma}{x}$

प्रमाप विचलन की गणना :–

1– **व्यक्तिगत श्रेणी में प्रमाप–विचलन की गणना :**

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रमाप–विचलन ज्ञात करने की तीन विधियाँ है :–

(क). प्रत्यक्ष विधि (Direct method)

(ख). लघु विधि (short- cut-method)

(ग). पद–विचलन विधि (step-deviation method)

क. प्रत्यक्ष विधि : यह विधि उस समय अधिक उपयोगी होती है जब समांतर माध्य पूर्ण अंक में आता है। इस विधि द्वारा निम्नलिखित ढ़ंग से प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता है :

1. सबसे पहले श्रृंखला का समान्तर माध्य निकाला जाता है।

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

2. इसके बाद प्रत्येक मूल्य में से समांतर माध्य को घटाकर विचलन ज्ञात किया जाता है अर्थात् dx = X-$\bar{X}$ निकाला जाता है।

3. विचलन के प्रत्येक मूल्य का x^2 वर्ग निकाला जाता है और सबको जोड़ लिया जाता है। अर्थात् प्राप्त कर लिया जाता है।

$$\bar{X} = \sum X^2$$

4. विचलन वर्गों के जोड़ ($\sum X^2$) को मदों की संख्या (N) से भाग कर दिया जाता है, अर्थात् $\frac{\sum X^2}{N}$ ज्ञात किया जाता है। इसका वर्गमूल निकाल लिया जाता है जो मानक विचलन (σ) होता है।

सूत्र $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (X-\bar{x})^2}{N}}$$

(σ) संकेत प्रमाप विचलन का संकेत हैं।

$\sum X^2$ संकेत माध्य से विचलन वर्गों के जोड़ के लिए प्रयुक्त हुआ है।

x व $\bar{x}$ संकेत क्रमशः व्यक्तिगत मूल्य तथा समान्तर माध्यम के लिए हैं।

उदाहरण (**Illustration**) :

10 विद्यार्थियों के निम्नांकित भार (किग्रा0) के समंको से प्रमाप विचलन और उसका गुणांक निकालिए–

41, 44, 45, 49, 50, 53; 55, 55, 58, 60

हल (**Solution**) :

पहले इन मूल्यों को आरोही क्रम में लिखकर इनका मध्य का तथा समान्तर माध्य ज्ञात किया जाएगा फिर इन माध्यों से विचलन निकाले जायेगें–

क्रमांक	भार (किलो) X	मध्य का $\bar{X}$ =51 से $d = (x-\bar{x})$	विचलन के वर्ग $d^2 = (x - \bar{x})^2$
1	41	−10	100
2	44	−7	49
3	45	−6	36
4	49	−2	4
5	50	−1	1
6	53	+2	4
7	55	+4	16
8	55	+4	16
9	58	+7	49
10	60	+9	81
योग	$\sum x = 510$		356 $\sum d^2 = (x - \bar{X})^2$

समान्तर मध्य ($\bar{x}$)

$$= \frac{\sum x}{N}$$

$$= \frac{510}{10}$$

= 51 किलोग्राम

प्रमाप विचलन गुणांक–

$$c.of\,\sigma = \frac{\sigma}{\bar{X}} \text{ या } \frac{5.97}{51.00} = 0.117 \text{ किग्रा0}$$

∴ प्रमाप विचलन = 5.97 किग्रा0

प्रमाप विचलन (σ)

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum d^2}{N}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{356}{10}\right)} \text{ या } = \sqrt{35.6}$$

= 5.97 किलोग्राम

प्रमाप विचलन गुणांक = 0.117 किग्रा0

(ख). लघु रीतियॉ (**Short-cut method**) लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन या तो कल्पित माध्य से विचलन निकालकर ज्ञात किया जा सकता है या बिना विचलन निकाले मूल्य–वर्गों के आधार पर इसकी गणना की जा सकती है। यह रीतियॉ इस प्रकार हैं–

कल्पित माध्य से विचलनों के आधार पर – लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात करने की गणना– विधि इस प्रकार है–

1. दिए हुए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है।
2. कल्पित माध्य से सब मूल्यों के विचलन (dx=X-A) निकालकर उनका जोड़ ($\sum dx$) प्राप्त कर लिया जाता है।
3. विचलनों के वर्ग करके उनके वर्गों का जोड़ ($\sum d_x^2$) लगा लिया जाता है।
4. निम्न सूत्रों में से किसी एक का प्रयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिया जाता है–

प्रथम सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum d_x^2}{N}\right) \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

द्वितीय सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum dx^2}{N}\right) (X - A)^2}$$

तृतीय सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_x^2 - N\,(X-A)^2}{N}}$$

चतुर्थ सूत्र –

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{\sum d_x^2 - (\sum dx)^2}$$

नोट : उपर्युक्त सूत्रों में से प्रथम सूत्र का सबसे अधिक प्रयोग किया जाता है। मूल्य–वर्गों के आधार पर निम्न प्रक्रिया द्वारा प्रमाप–विचलन ज्ञात हो सकता है–

1. प्रत्येक मूल्य का वर्ग करके उन वर्गों का जोड़ ज्ञात कीजिए– ($\sum x^2$)
2. मूल्यों का समान्तर माध्यम निकालकर उसका वर्ग प्राप्त कीजिए, $(\bar{X})^2$
3. निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए–

प्रथम सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum x^2}{N}\right) (\bar{X})^2}$$

अथवा $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \frac{(\sum x)^2}{N}}$ $\left[\therefore \bar{X} = \frac{\sum x}{N}\right]$

नोट : इस सूत्र का प्रयोग बहुत कम किया जाता है, क्योंकि इसमें गयन–क्रिया सरल नहीं है।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्नलिखित ऑंकड़ों का मानक विचलन ज्ञात कीजिए–

8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26

हल (**Solution**) :

क्रमांक	आकार X	कल्पित माध्य से विचलन (dx = X-A) ; A=20	विचलन के वर्ग (dx^2)
1	8	−12	144
2	10	−10	100

3	12	−8	64
4	14	−6	36
5	16	−4	16
6	18	−2	4
7	20	0	0
8	22	+2	4
9	24	+4	16
10	26	+6	36
योग (N) = 10	ex = 510	$\sum dx$	$\sum d_x^2 = 420$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_x^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{420}{10} - \frac{(-30)^2}{10}}$$

$$= \sqrt{42-(-3)^2} \quad = \sqrt{33}$$

$$= 5.74$$

प्रमाप विचलन = 5.74

(ग). **पद विचलन विधि (step-deviation method)** : इस विधि द्वारा निम्नलिखित ढ़ंग से प्रमाप विचलन की गणना की जाती है :

1. श्रृंखला में दिए हुए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य ($\bar{X}$) मान लिया जाता है।

2. कल्पित माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलन अर्थात् dx=X-A निकाल लिए जाते हैं।

3. इन विचलनों को समापवर्तक तत्व (Common factor) द्वारा भाग कर दिया जाता है। अर्थात् $\frac{dx}{c}$ इसे पद विचलन कहा (dx′) कहा जाएगा। अतः $dx' = \frac{dx}{c}$

4. पद–विचलन के वर्ग $(dx')^2$ बना लिए जाते हैं।

5. निम्नलिखित सूत्र की सहायता से मानक विचलन (σ) ज्ञात कर लिया जाता है :

सूत्र :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx'^2}{N} - \left(\frac{\sum dx'}{N}\right)} \quad X \quad C$$

उदाहरण (**Illustration**) :

नीचे पाँच व्यक्तियों की मासिक आय दी गई है, मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

व्यक्तियों की संख्या	मासिक आय (रू0)
1	500
2	700
3	1000
4	1500
5	1300

हल (**Solution**) :

क्रमांक	मासिक आय	$dx = x\text{-}A$ $A=1000$	$dx' = \frac{dx}{c}$; $C = 100$	dx'^2
1	500	−500	−5	25
2	700	−300	−3	9
3	100	0	0	0
4	1500	+500	+5	25
5	1300	+300	+3	9
N= 5			$\sum dx' = 0$	$\sum dx'^2 = 68$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx'^2}{N} - \left(\frac{\sum dx'}{N}\right)} \quad x \quad c$$

$$= \sqrt{\frac{68}{5} - \frac{(0)^2}{5}}\ x100$$

$$= \sqrt{13.6}\ X\ 100$$

$$= 3.6878\ X\ 100 = 368.78$$

प्रमाप विचलन $\sigma =$ **368.78**

(2). <u>विच्छिन्न श्रेणी में प्रमाप विचलन की गणना</u> – विच्छिन्न श्रेणी में प्रमाप विचलन को ज्ञात करने की दो मुख्य विधियाँ है :

(क). प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

(ख). लघु विधि (Short-cut- Method)

(क). **प्रत्यक्ष रीति**– खण्डित श्रेणी में (विछिन्न) में प्रमाप विचलन निकालने के लिए इस रीति के अन्तर्गत निम्नलिखित क्रियाएँ करनी पड़ती हैं :–

1. श्रेणी का समान्तर माध्य 100 ज्ञात किया जाता है। ($\bar{X}$)

2. मूल्यों में से समान्तर माध्य घटाकर विचलन निकाले जाते हैं। ($d = X - \bar{X}$)

3. विचलनों के वर्ग किये जाते हैं। (d^2)

4. विचलन–वर्गों की तत्सम्बन्धी आवृत्तियों से गुणा करके उन गुणांकों का जोड़ प्राप्त किया जाता है। ($\sum fd^2$)

5. अन्त में निम्न सूत्र प्रयुक्त होता है–

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd^2}{N}\right)} \quad \text{या} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{X})^2}{N}}$$

नोट : जब समान्तर माध्य सरल पूर्णांक के रूप में होता है तब प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग किया जाना उचित होता है।

उदाहरण (Illustration) :

निम्न श्रेणी में प्रत्यक्ष विधि द्वारा प्रमाप विचलन और उसका गुणांक ज्ञात किजिए–

आकार	10	12	14	16	18	20	22	24
आवृत्ति	5	8	21	24	18	15	7	2

हल (Solution) :

प्रमाप विचलन की गणना (प्रत्यक्ष रीति)

आकार	आवृत्ति	$\bar{X}$=16.5 से विचलन	विचलन वर्ग d^2	आवृत्ति का विचलन वर्गों से गुणा fxd^2	आकार x आवृत्ति fxX
10	5	−6.5	42.25	211.25	50
12	8	−4.5	20.25	162.00	96
14	21	−2.5	6.25	131.25	294
16	24	−0.5	0.25	6.00	384
18	18	+1.5	2.25	40.50	324
20	15	+3.5	12.25	183.75	300
22	7	+5.5	30.25	211.75	154
24	2	+7.5	56.25	112.50	48
योग	N= 100			1059.00 $\sum fd^2$	1650 $\sum fx$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1650}{100} = 16.5$$

$$= \frac{68}{21} = 3.24$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd^2}{N}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1059}{100}\right)} \quad 3.25$$

प्रमाप विचलन गुणांक–

$$c.of\,\sigma = \frac{6}{\bar{X}} \quad \text{या} \quad \frac{3.24}{16.50} = 0.197$$

अतः प्रमाप विचलन 3.25 प्रमाप विचलन गुणांक = 0.197

(ख). **लघु रीतियाँ (Short-cut method)** – यदि समांतर माध्य में दशमलव भाग भी होता है तो प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन निकालने में गणना–क्रिया अत्यन्त जटिल हो जाती है। ऐसी स्थिति में कल्पित माध्य से विचलन निकालकर निम्न लघु रीति का प्रयोग करना चाहिए।

1. दिए हुए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) या लेना चाहिए। अधिकतर उस मूल्य को A मान जिया जाता है जिसकी आवृत्ति अधिक होती है।

2. कल्पित माध्यम से विभिन्न मूल्यों के विचलन निकाल लिए जाते हैं। $dx = (x\text{-}A)$

3. विचलनों व उनकी आवृत्तियों की आपस में गुणा करके गुणनफलों का योग प्राप्त कर लिया जाता है। $(\sum f\,dx)$

4. विचलनों व आवृत्तियों की गुणाओं (fdx) में फिर विचलनों का गुणा देकर इन गुणनफलों का भी जोड़$(\sum f\,d_x^2)$ निकला लिया जाता है।

5. वक्त में निम्न सूत्रों में से एक का प्रयोग किया जाता है–

प्रथम सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N}\left(\frac{\sum fdx}{N}\right)} \;;$$

द्वितीय सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd_x^2}{N}\right)\left(\bar{X} - A\right)\ 2}$$

तृतीय सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd_x^2 - N\,(X-A)\ 2}{N}\right)}$$

चतुर्थ सूत्र –

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f\,d_x^2 - (\sum f\,d_x^2)^2}$$

नोट : अधिकतर प्रथम सूत्र का प्रयोग करना चाहिए।

मूल्यों के वर्ग निकालकर (अर्थात् A = 0 मानकर) भी प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता है। इसमें वहीं क्रियाएं अपनायी जाती हैं जो व्यक्तिगत श्रेणी में प्रयोग की जाती है। केवल मूल्यों के वर्गो (x^2) को आवृत्ति (f) से गुणा करना पड़ता है। इसका सूत्र इस प्रकार है–

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd_x^2}{N}\right) - (x)\ 2} \quad \text{या} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)\ 2}$$

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्न तालिका को प्रमाप विचलन लघु विधि द्वारा निकालिए :

आकार	1	2	3	4	5	6	7	8
आवृत्ति	5	10	15	20	15	10	10	15

हल (**Solution**) :

प्रमाप विचलन की गणना (प्रत्यक्ष रीति)

आकार x	आवृत्ति f	कल्पित माध्य से विचलन dx-A A=5	विचलन का वर्ग (d^2)	आवृत्ति का विचलन तथा विचलन का गुणनफल fdx'	विज्ञान वर्ग तथा आवृत्ति के गुणनफल fd^2x
1	5	−4	16	−20	80
2	10	−3	9	−30	90
3	15	−2	4	−30	60
4	20	−1	1	−20	20
5	15	0	10	0	0
6	10	+1	1	+10	10
7	10	+2	4	+20	40
8	15	+3	9	+45	135
योग	$\sum f = 5$			$\sum fdx^2 = 25$	$\sum fdx^2 = 435$

प्रमाप विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{435}{100}\right) - \left(\frac{25}{100}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{435}{100} - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

$= \sqrt{4.2875} = 2.07$

$\therefore \sigma = 2.07$;

3. **अविच्छिन्न या सतत् श्रेणी में प्रमाप विचलन की गणना :**

अविच्छिन्न श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने से पूर्व वर्गों के मध्य बिन्दु निकाले जाते है। फिर मध्य–बिन्दुओं को मूल्य (X) मानकर खण्डित श्रेणी की भाँति प्रमाप विचलन का माप निकाल लिया जाता है। अविच्छिन्न समंक माला में प्रमाप–विचलन की निम्नलिखित रीतियाँ हैं–

1. प्रत्यक्ष रीति   2. लघु रीति

3. पद–विचलन रीति

1. **प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)** : इस रीति के अनुसार पहले, श्रेणी का समान्तर माध्य ($\bar{X}$) निकाला जाता है। इसके बाद प्रत्येक मध्य–बिन्दु (M.V) में से घटाकर विचलन (d) ज्ञात कर लिया जाता है। अर्थात् d= ($X-\bar{X}$)। शेष सभी कियाएँ उसी प्रकार करनी पड़ती है जिस प्रकार खण्डित रीति में। वही सूत्र भी अपनाया जाता है–

अर्थात्– $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित शृंखला का मानक विचलन प्रत्यक्ष विधि द्वारा ज्ञात कीजिए :

आकार	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12
आवृत्ति	2	4	6	4	2	6

हल (Solution) :

आकार	आवृत्ति m.v x	आवृत्ति f	आवृत्ति तथा मध्य–मूल का गुणानफल (fx)	माध्य मूल्य से विचलन $d = x - \bar{X}$	विचलन वर्ग d^2	आवृत्ति तथा विचलन वर्ग का गुणनफल– fd^2
0–2	1	2	2	–5.5	30.25	60.50
2–4	3	4	12	–3.5	12.25	49.00
4–6	5	6	30	–1.5	2.25	13.50
6–8	7	4	28	+0.5	0.25	1.00
8–10	9	2	18	+2.5	6.25	12.50
10–12	11	6	66	+4.5	20.25	121.50
योग		$\sum f = 24$	$\sum fx = 156$			$\sum fd^2 = 258$

$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

$= \frac{156}{24}$, 6.5

$\bar{X} =$ 6.5

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

$= \sqrt{\frac{258}{24}}$

$= \sqrt{10.75}$

$=$ 3.28

2. **लघु रीतिया (Short-cut Method)** : इस रीति में खण्डित श्रेणी में प्रयुक्त लघु रीति की भाँति ही क्रियाएँ करने पड़ती है। केवल इतना अन्तर रहता है कि मूल्य के स्थान पर मध्य–बिन्दुओं का प्रयोग होता है। वही सूत्र प्रयुक्त होते है। जो खण्डित श्रेणी में अपनाए जाते है, अर्थात–

प्रथम सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N} \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}\ ;$$

द्वितीय सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd_x^2}{N}\right)\left(\bar{X} - A\right)^2}$$

तृतीय सूत्र –

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd_x^2 - N\left(\bar{X}-A\right)^2}{N}\right)}$$

चतुर्थ सूत्र –

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum fd_x^2 - (\sum fdx)^2}$$

मूल्य वर्ग रीति के अनुसार मध्य–बिन्दुओं के वर्ग (x^2) निकालकर भी निम्न सूत्र द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता है–

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum x^2 f}{N}\right) - (\bar{X})^2} \quad \text{या} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$$

उदाहरण (Illustration) :

निम्न श्रेणी में लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए–

से कम अंक	10	20	30	40	50	60	70
परीक्षार्थियों की संख्या	10	25	50	75	85	95	100

हल (Solution) :

पहले संचयी आवृत्ति श्रेणी को साधारण अविच्छिन्न आवृत्तिमाला में बदल लिया जाएगा। तत्पश्चात् प्रमाप विचलन का परिगणन किया जाएगा।

अंक	मध्य बिन्दु x	आवृत्ति f	35 से विचलन (dx)A = 35	(fdx) विचलन की गुणा	fdx व dx की गुणा fd_x^2
0–10	5	10	–30	–300	9000
10–20	15	15	–20	–300	6000
20–30	25	25	–10	–2500	2500
30–40	35	25	0	0	0
40–50	45	10	+10	+100	1000
50–60	55	10	+20	+200	4000
60–70	65	5	+30	+150	4500
	N= $\sum f$ =100			+450–850= –400 $\sum fdx$	27000 $\sum fd_x^2$

समान्तर माध्य	प्रमाप विचलन
$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$
$= 35 + \frac{-400}{100}$	$= \sqrt{\frac{27000}{100} - \left(\frac{-400}{100}\right)^2}$
$= 35-4$	$= \sqrt{270.16}$ या $\sqrt{254}$
$\therefore \bar{X} = 31$ अंक	$\therefore = \sigma = 15.94$ अंक।

3. **पद–विचलन रीति (Step-Deceiation Deviation)** : यदि वर्ग–विस्तार समान (Equal intereals) हो, तो कल्पित मध्य–बिन्दु से विचलन ज्ञात करने समय समान वर्ग–विस्तार के बराबर समापवर्त्तक (Common factor) निकाल लिया जाता है अर्थात् विचलन वर्ग–विस्तार इकाइयों (class-interual units) में प्राप्त किये जाते हैं। शेष सभी क्रियाएँ प्रमाप विचलन की लघु दीति की भाँति होती है, केवल सूत्र में समान वर्ग–विस्तार (i) की गुणा दे दी जाती है, अर्थात–

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\sum fd'^2_x}{N} - \left(\frac{\sum fd'^2}{N}\right)^2}$$

उदाहरण (Illustration) :

निम्न आँकड़ों से प्रमाप विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए–

आयु (से कम) :	10	20	30	40	50	60	70	80
व्यक्तियों की संख्या :	15	30	53	75	100	110	115	125

हल (Solution) :

पहले संचयी आवृत्ति श्रेणी को अविच्छिन्न सामान्य आवृत्ति श्रेणी में बदला जाएगा, फिर प्रमाप विचलन व उसका गुणांक ज्ञात किया जाएगा।

आय से कम	मध्य बिन्दु x	व्यक्तियों की संख्या f	AX =35 से पद विचलन	d'= d-i	f व d' की गुणा	d' व fd' की गुणा fd'^2
0–10	5	15	–30	–3	–300	9000
10–20	15	15	–20	–2	–300	6000
20–30	25	23	–10	–1	–2500	2500
30–40	35	22	0	0	0	0
40–50	45	25	+10	+4	+100	1000
50–60	55	10	+20	+2	+200	4000
60–70	65	5	+30	+3	+150	4500
70–80	75	10	+4	+4	+40	160
योग		125 N	+40	–98	–98+ 100 +2 $\Sigma fd'$	488 $\sum fd'2$

समान्तर माध्य ($\bar{x}$)	प्रमाप विचलन
$x = A + \frac{\sum fd'}{N} \times i$	$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2}$
$= 35 + \left(\frac{2}{125} x10\right)$	$= 10 \times \sqrt{\frac{488}{125} - \left(\frac{2}{125}\right)^2}$
$= 35 + 0.16$	$= 10 \times \sqrt{3.904 - 0.000256}$
$= 35.16$	$= 10 \times 1.9758 = 19.75$

प्रमाप विचलन गुणांक $c.of\, \sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{19.758}{35.16} = 0.562$

उपयुक्त रीति : उपयुक्त चारों रीतियों में से प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग तब किया जाता है जब माध्य ($\bar{x}$) पूर्णांक में हो तथा आवृत्तियां (f) बहुत कम हों, अधिक आवृत्तियों वाले ऐसे समूह में जिसका माध्य पूर्णांक में न हो, लघु रीति उपयुक्त होती है। वर्ग–विस्तार समान होने पर पद–विचलन रीति का प्रयोग सुविधाजनक रहता है।

सामूहिक प्रमाप विचलन (Combined standerd deviation) :

जिस प्रकार दो या अधिक समूहों के लिए सामूहिक माध्य ज्ञात ($\bar{X}c$) करना संभव होता है, उसी प्रकार विभिन्न समूहों के प्रमाप विचलों, माध्यों व पद–संख्याओं के आधार पर समूहित (संयोजित) प्रमाप विचलन का परिगणन किया जा सकता है।

समूहित या संयोजित प्रमाप विचलन ज्ञात करने की निम्न किया है–

क. पहले सामूहिक समांतर माध्य ($\bar{X}c$) निकाला जाता है।

ख. प्रत्येक समूह के माध्य में से सामूहिक माध्य घटाकर अंतर (D_1 D_2 ..आदि) निकाल लिए जाते है अर्थात् $D_1 = \bar{X}_1 - \bar{X}c$, $D_2 = \bar{X}_2 - \bar{X}c$, $D_3 = \bar{X}_3 - \bar{X}c$

ग. अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$\sigma c = \sqrt{\left[\frac{N_1(\sigma_1^2 + D_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + D_2^2) + N_3(\sigma_3^2 + D_3^2) - -}{N_1 + N_2 + N_3}\right]}$$

जहाँ– N_1, N_2, N_3 संकेताक्षर अलग–अलग समूहों में मूल्या की संख्या के लिए प्रयुक्त हैं।

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, संकेताक्षर प्रत्येक समूह के प्रमाप विचलन के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

D_1, D_2, D_3 संकेताक्षर प्रत्येक समूह के माध्य के सामूहिक माध्य से अन्तर के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

उदाहरण (Illustration) :

100 तथा 150 के आकार के दो सैम्पलों के क्रमशः माध्य 50 एवं 60 तथा प्रमाप विचलन 5 एवं 6 है। 250 के आकार के सामूहिक सैम्पल का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

$N_1 = 100 \ \bar{X}_1 = 50, \ \sigma_1 = 5$

$N_2 = 150 \ \bar{X}_2 = 60, \ \sigma_2 = 6$

$$\bar{X}c = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \ \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{100X50+150X60}{100+150} = \frac{5000+9000}{250}$$

$$= \frac{14000}{250} = 56$$

$D_1 = \bar{X}_1 - \bar{X}_C = 50\text{-}56 = -\sigma$

$D_2 = X_2 - X_C = 60\text{-}56 = -56 = +4$

$$\sigma c = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + D_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + D_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{100(5)^2 + (-6)^2) + 150\ (6^2) + (4^2)}{100+150}}$$

$$= \sqrt{\frac{100X\,61 \quad 150X52}{250}}$$

$$= \sqrt{\frac{13900}{250}}$$

$$= \sqrt{55.6}$$

$$= 7.4$$

अतः सामूहिक माध्य = 56 तथा प्रमाप विचलन = 7.46।

9.8 विचरण गुणांक (Coefficient of Variation) :

दो या दो से अधिक श्रेणियों (शृंखलाओं) में विचरण की तुलना करने के लिए विचरण गुणांक का प्रयोग किया जाता है। यह वस्तुतः प्रमाप गुणांक अर्थात् $\frac{\sigma}{X}$ का प्रतिशत रूप है। दूसरे शब्दों में प्रमाप विचलन को समांतर माध्य से भाग देकर भजनफल में 100 से गुणा करने से प्राप्त गुणनफल ही विचरण गुणांक होता है। इस सापेक्ष माप का सर्वप्रथम प्रयोग करने का श्रेय प्रसिद्ध वैज्ञानिक कार्लपियर्सन को है। यही कारण है कि इसे **कार्लपियर्सन** गुणांक को कहा जताा है।

विचरण गुणांक का सूत्र निम्न हैं :–

विचरण गुणांक (c.of. v) = $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ 100 या [c.of σ] X 100

विचरण गुणांक का प्रयोग से दो समूहों की अस्थिरता या विचरणीशीलता, सजातीयता, स्थिरता, एकरूपता अथवा संगति की तुलना करने में किया जाता है।

जिस समंक श्रेणी का विचरण गुणांक अधिक होता है। अर्थात् वह अधिक अस्थिर या विचरणशील मानी जाती है। इसके विपरीत जिस श्रेणी में विचरण गुणांक कम होता है। वह अधिक स्थिर 'एकरूप' सजातीय अथवा संगत कहलाती है।

प्रसरण (Variance) : यह भी प्रमाप विचलन पर आधारित माप है। वास्तव में यह किसी श्रेणी के प्रमाप विचलन का वर्ग (σ^2) होता है। इसे द्वितीय परिक्षेपण धात (Second Moment of Disperson) भी कहते है।

सूत्र :

प्रसरण $= \sigma^2$ अथवा $\sigma = \sqrt{v}$

उदाहरण (Illustration) :

किसी फर्म के उत्पादन में से 4 वस्तुओं का एक प्रतिदर्श लिया गया इन पाँच वस्तुओं की लम्बाई व भार निम्नलिखित है– इन दो विशेषताओं के विचरण–गुणांक की तुलना करके बताइए कि किसमें विचरण अधिक है।

लम्बाई	3	4	6	7	10
भार	9	11	14	15	16

हल (Solution) :

X	X – लम्बाई		y – भार		
	विचलन	विचलन वर्ग	Y	विचलन	विचलन वर्ग
3	–3	9	9	–4	16
4	–2	4	11	–2	4
6	0	0	14	+1	1
7	+1	1	15	+2	4
10	+4	16	16	+3	9
$\sum X=30$		$\sum d_\pi^2 = 30$	$\sum y=65$		$\sum d_y^2 = 34$

समान्तर माध्य (X)

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{N} \quad \frac{30}{5} = 6$$

$$\sigma x = \sqrt{\left(\frac{\Sigma d_x^2}{N}\right)} = \sqrt{\frac{30}{5}} = \sqrt{6}$$

$$= 2.4495$$

$$c.of\ v = \frac{\sigma}{X}100 = \frac{2.495}{6}x100$$

$$= 40.825\%$$

प्रमाप विचलन

$$Y = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{65}{5} = 13$$

$$\sigma y = \sqrt{\left(\frac{\Sigma d_y^2}{125}\right)} \quad \sqrt{\frac{34}{5}} = \sqrt{6.8}$$

$$= 2.6077$$

$$c.of\ v = \frac{\sigma}{y}x\,100 = \frac{2.6077}{13}x100$$

$$= 20.059\%$$

अत : लम्बाई में विचरण अधिक है।

प्रमाप विचलन के बीजगणितीय गुण :

प्रमाप विचलन में निम्नलिखित प्रमुख बीजगणितीय गुण पायें जाते हैं–

(क). **सामूहिक प्रमाप विचलन–** विभिन्न उपवर्गों के प्रमाप विचलनों के आधार पर पूरे समूह का सामूहिक प्रमाप विचलन मालूम किया जा सकता है।

(ख). **क्रमानुसार प्राकृतिक अंकों ('N' Natural numbers)** का प्रमाप विचलन– निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है–

$$= \quad \sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)(N^2 - 1)}$$

(ग). समान्तर माध्य से विचलन के लिए जाने के कारण प्रमाप विचलन में विचलन–वर्गों का जोड़–न्यूनतम होता है।

$$\left[\sum d^2 = \sum \left(x - \bar{X}\right)^2 = \text{Minimum}\right]$$

(घ). **प्रमाप विचलन पर गणितीय क्रियाओं का प्रभाव** : किसी समंक श्रेणी के प्रत्येक पद–मूल्य में एक स्थिरोक या अचर–मूल्य जोड़ने, घटाने, गुणा करने या भाग करने का उस श्रेणी के माध्य और प्रमाप विचलन पर निम्नांकित प्रभाव पड़ता है–

1. **स्थिरांक जोड़ने पर** : श्रेणी के प्रत्येक मूल्य में अचर– मूल्य (Constant 'a') जोड़ने पर समान्तर माध्य अचर–मूल्य से बढ़ जाता है, $\left(\frac{1}{\bar{X}} + a\right)$ परन्तु माप विचलन (σ) पूर्ववत् रहता है।

2. **स्थिरांक घटाने पर** : श्रेणी के प्रत्येक मूल्य में से यदि किसी अचर मूल्य (a) को घटा दिया जाए तो समान्तर माध्य उस मूल्य हो से कम हो जाता है। $\left(\bar{X} - a\right)$ परंतु प्रमाप विचलन (σ) पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। निम्न उदाहरण से ये स्थितियाँ स्पष्ट हो जाएंगी–

मूल्य समंक	विचलन	वि0वर्ग	(क) अचरण मूल्य (2) जोड़ने पर			(ख) अचर मूल्य (2) घटाने पर		
x	dx	d_x^2	x+2	dx	d_x^2	x − 2	dx	d_x^2
7	+3	9	9	−3	9	5	−3	9
9	−1	1	11	−1	1	7	−1	1
9	−1	1	11	−1	1	7	−1	1
15	+5	25	17	+5	25	13	+5	25
$\sum x=40$		$\sum d_x^2 = 36$	48		$\sum d_x^2 = 36$	32	$\bar{X}=8$	$\sum d_x^2 = 36$
N=4	$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum d_x^2}{N}\right)}$		$\bar{X}=12$	$\sigma = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9}$	X=8	$\bar{X}=8$	$\bar{X}=8$	$\sigma = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9}$
$\bar{X}=10$	$\sigma = \sqrt{\left(\frac{36}{4}\right)} = 9$		$\bar{X}=10+2$	$\therefore \sigma=3$	$\sum d_x^2$	$\bar{X}=18-2$	$\therefore \sigma = 3$	

3. **स्थिरांक से गुणा करने पर** : यदि प्रत्येक मूल्य में एक अचर मूल्य (a) की गुणा की जाए तो उस श्रेणी के समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन में भी उस अचर मूल्य की गुणा हो जाती है–

तथा

$[\bar{x}$ x a तथा σ xa]

4. **स्थिरांक से भाग देने पर** : श्रेणी के प्रत्येक मूल्य मे अचर मूल्य (a) का भाग देकर समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन निकालने पर इन दोनों मापों में भी उस अचरांक का भाग हो जाता है।

$$[\bar{x} \div a \quad \text{और} \quad \sigma \div a]$$

उदाहरण (**Ilustration**) :

(ग) अचर–मूल्य (2) से गुणा करने पर			अचर–मूल्य (2) से भाग देने पर		
xxa	dx	d_x^2	X ÷ a	dx	d_x^2
14	−6	36	3.5	−1.5	2.25
18	−2	4	4.5	−0.5	0.25
18	´2	4	4.5	−0.5	0.25
30	+10	100	7.5	+2.5	6.25
80		$ed_x^2 = 144$	20	5.σ	$\sum d_x^2 = 9.00$

$\bar{x}$ = 20 अर्थात् $10x2\ \sigma = \sqrt{\frac{144}{44} = 6}$ $\qquad$ $\bar{x}$ अर्थात् $\frac{10}{2}$

अर्थात् 3 X 2 $\qquad$ $\sigma = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right) = 1.5}$

अर्थात् 3÷2

5. प्रमाप विचलन का प्रसामान्य–वक्र के क्षेत्रफल से एक विशिष्ट संबंध होता है। इसके फलस्वरूप प्रसामान्य एवं साधारण असमियत बंटन में $\bar{x} \pm \sigma$ में मूल्यों 68.27%, $\bar{x} \pm 2\sigma$ में 95.45%, तथा $\bar{x} \pm 3\sigma$ 99.73%, का समावेश होता है।

प्रमाप विचलन के लाभ– प्रमाप विचलन के निम्नलिखित लाभ हैं–

क. **सभी मूल्यों पर आधारित**– प्रमाप विचलन श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। इसमें किसी मूल्य को छोड़ा नहीं जाता।

ख. **उच्चतर बीजगणितीय अध्ययन में प्रयोग** : प्रमाप विचलन निकालने में विचलनों का वर्ग करने से ऋणात्मक विचलन गणितीय रीति से स्वयं ही धनात्मक हो जाते हैं। विचलन समान्तर माध्य से निकाले जाते हैं जो एक आदर्श माध्य है। अतः उच्चतर गणितीय रीतियों में इसका काफी प्रयोग होता है।

ग. **प्रतिचयन परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव** : प्रमाप विचलन पर अन्य परिक्षेपण मापों की अपेक्षा निदर्शन परिवर्तनों का सबसे कम प्रभाव पड़ता है।

घ. **स्पष्ट व निश्चित माप** : प्रमाप विचलन परिक्षेपण का एक स्पष्ट और निश्चित माप है जो प्रत्येक स्थिति में ज्ञात किया जा सकता है।

उपयोगिता : प्रमाप विचलन परिक्षेपण का सर्वश्रेष्ठ माप है जो विभिन्न समूहों की तुलना करने में तथा दैव प्रतिदर्शों में विभिन्न मापों की अर्थपूर्णता की जाँच (test of significance) करने में प्रसामान्य वक्र की अधीनस्थ क्षेत्रफल ज्ञात करने में सहःसंबंध विश्लेषण में तथा सही तुलना में निर्वचन में अत्यन्त उपयोगी है।

दोष : प्रमाप विचलन में दो प्रमुख दोष हैं– प्रथम यह ज्ञात करने व समझने में अन्य मापों की अपेक्षा कठीन है। **दूसरे**– यह चरण मूल्यों को अधिक महत्व देता है। इन दोषों के कारण अर्थशास्त्र व व्यापार वाणिज्य के क्षेत्र में

इस माप का अधिक प्रयोग नहीं किया जाता परन्तु फिर भी जिस प्रकार केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में समान्तर माध्य संतोषजनक माध्य होता है उसी प्रभा परिक्षेपण के मापों में प्रमाप विचलन आदर्श माना जाता है।

9.9 लोरंज बक (**Lorenz Curue**) :

सांख्यिकी श्रृंखला में परिक्षेपण का एक अन्य महत्वपूर्ण माप लारेंज वक्र है। इसकी सहायता से ग्राफिक विधि के प्रयोग द्वारा परिक्षेपण का प्रदर्शन किया जाता है है। इस वक्र का सबसे पहले प्रयोग डॉ0 मैक्स लारेंज (Dr. Max Lorenz) ने किया था, इसलिए इसे लोरंज वक्र कहते है। लोरंज वक्र के अन्तर्गत एक श्रृंखला को रेखाचित द्वारा प्रकट किया जाता है।

डॉ0 लोरिंज ने इन वक्रों का प्रयोग धन और आय की विषमता का अध्ययन करने के लिए किया था। लारेंज वक्र समान वितरण रेखा से वास्तविक वितरण के विचलन का माप है। लोरंज वक्र एक संचयी प्रतिशत वक्र (Cunulative percentage cance) है। लोरंज वक्र समान वितरण की रेखा (Line of equal distnibution) से जितना दूर होगा, उसकी श्रृंखला में असमानता उतनी ही अधिक होती है। इसके विपरीत लारेंज वक्र समान वितरण रेखा के जितना पास होगा उसमें परिक्षेपण की मात्रा उतनी ही कम होगी।

लोरंज वक्र की रचना :

लारेंज वक्र को ग्राफ पेपर पर बनाने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया हैं :–

1. सबसे पहले दिए हुए मूल्यों वर्गों के मध्य–मूल्य का संचयी योग निकाल लिया जाता है। अंतिम संचयी योग को 100 मानकर विभिन्न संचयी योगों का प्रतिशत निकाला जाता है। आवृत्ति वितरण का भी संचयी योग निकाला जाता है। अंतिम संचयी योग को 100 मानकर अन्य संचयी योगों का प्रतिशत निकाला जाता है।
2. सभी संचयी आवृत्तियों को X–अक्ष पर और संचयी मूल्यों को Y- अक्ष पर प्रकट किया जाता है।
3. X- अक्ष पर मादण्ड 0 से 100 तक लिया जाता है। Y- अक्ष पर भी मापदंड 0 से 100 तक लिया जाता है।
4. X- अक्ष के 0 (Zero) मापदंड को Y- के मापदंड से मिलाने के लिए जो रेखा खींची जाती है उसे समान वितरण रेखा (Line of equal distribution) कहते हैं।
5. ग्राफ पेपर पर आँकड़े अंकित कर लिए जाते हैं और उन्हें मिलाते हुए एक वक्र खींच लिया जाता है। इस वक्र को वास्तविक वितरण वक्र कहा जाता है।
6. लारेंज वक्र समान वितरण रेखा से जितना पास होगा, परिक्षेपण की मात्रा उतनी ही कम होगी अर्थात् वितरण में उतनी ही काम असमातनाएं होगी। इसके विपरीत लारेंज वक्र समान वितरण रेखा जितना दूर होगा, अपकिरण की असमानता की मात्रा उतनी ही अधिक होगी। दो वक्रों में जो सम–वितरण रेखा से अधिक दूरी पर होगा, उसकी श्रृंखला में ही परिक्षेपण की मात्रा अधिक होगी।

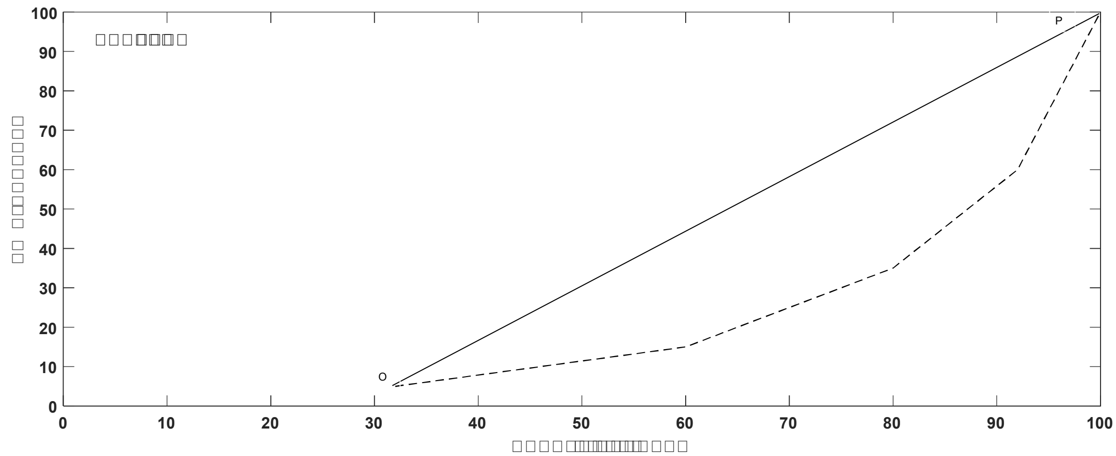
उदाहरण (Illustration) :

नीचे दिए आँकड़ो से एक लोरंज वक खीचिए–

आयु (रूपये में) :	100	200	400	500	800
व्यक्तियों की संख्या :	80	70	50	30	20

हल (**Solution**) :

आय x	संचंयी योग	संचयी प्रतिशत	व्यक्तियों की संख्या f	संचंयी योग	संचंयी प्रतिशत
100	100	5	80	80	32
200	300	15	70	150	60
400	700	35	50	200	80
500	1200	35	50	200	80
800	2000	100	20	250	100
$\sum x =$ 2000			$\sum f =$ 250		



उदाहरण (**Illustration**) :

दो कारखानों में मजदूरी वितरण की समानताओं की तुलना करने के लिए एक लोरंज व्रक की रचना कीजिए–

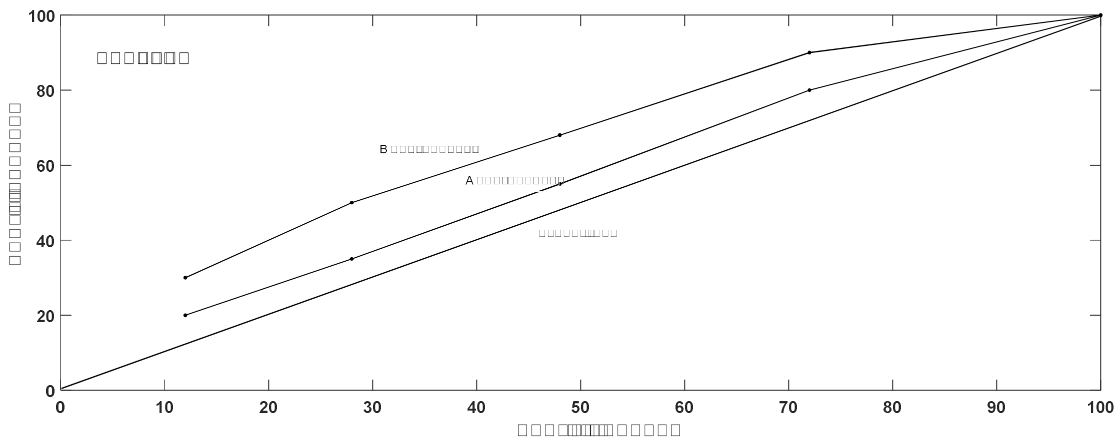
मजदूरी (रूपये में) :	50–70	70–90	90–110	110–130	130–150
मजदूरों की संख्या (**A**) :	20	15	20	25	20
मजदूरों की संख्या (**B**) :	150	100	90	110	50

हल (**Solution**) :

संचयी योग व प्रतिशतों की गणना

मजदूरी	मजदूरी (मध्य–मूल्य) (x)	संचंयी योग	संचयी %	कारखाना A			कारखाना B		
				मजदूरों की संख्या	संचयी आवृत्ति	संचयी आवृत्ति %	मजदूरों की संख्या	संचयी आवृत्ति	संचयी आवृत्ति %
50–70	60	60	12	20	20	20	150	150	30
70–90	80	140	28	15	35	35	100	250	50

90—110	100	240	48	20	55	55	90	340	68
110—130	120	360	72	25	80	80	110	450	90
130—150	140	500	100	20	100	100	50	500	100
	$\sum x=500$								



प्रेक्षण : फार्म A और फार्म B दोनों में ही मजदूरियों का वितरण समानता से दूर है। फिर फार्म A की स्थिति में असामनता फार्म B से ज्यादा व्यवस्थित है क्योंकि फार्म B का लोरंज वक्र समान वितरण की रेखा से और अधिक दूर हो।

लारेंज वक्र के अनुप्रयोग (Application of Loreng Curvce) :

लोरंज वक्र एक सांख्यिकीय श्रेणी में परिक्षेपण का ग्राफिक माप है। यह एक अत्यन्त सरल माप है तथा यह सांख्यिकीय वितरण में माध्य मूल्य (Meanvalue) से परिवर्तन के माप का शीघ्रता से मापन करता है।

इसका सर्वप्रथम प्रयोग प्रो0 लारेंज ने विभिन्न राष्ट्रों तथा एक ही राष्ट्र के भिन्न–भिन्न समयों पर आय तथा संपत्ति के वितरण की आसमानता को मापने के लिए किया था। समय के साथ–साथ लोरंज वक्र का अनुप्रयोग विभिन्न प्राचीन वितरणों (जैसे की लाक तथा मजदूरी का वितरण) की असमानता को चापने के लिए किया जाने लगा।

9.10 बोध प्रश्न :

रिक्त स्थनों की पूर्ति करें –

1. श्रृंखला की प्रकृति एवं रचना की जानकारी .... से मिलती है।
2. परिक्षेपण का सबसे सरलतम माप .... है।
3. चतुर्थक विचलन गुणांक, परिक्षेपण क ा....................... माप है।
4. श्रेणी के किसी औसत मूल्य से निकाले गये विचलनों के जोड़ के समान्तर माध्य को .... कहा जाता है।
5. माध्य विचलन निकालने के लिए चिन्ह ....व .... को छोड़ दिया जाता है।
6. दो श्रेणियों के परिक्षेपण की तुलना करने के लिए प्रभाव विचलन का .... निकाला जाता है।
7. प्रमाप विचरण गुणांक .... का प्रतिशत रूप है।
8. स्थिरांक को जोड़ने व घटाने का प्रभाव .... का प्रतिशत रूप हैं।

9. लोरंज वक्र समान वितरण रेखा से वास्तविक वितरण के .... है।
10. लोरंज वक्र का प्रयोग सर्वप्रथम .... ने किया था।

सत्य एवं असत्य कथन छाटिएँ :

1. ''परिक्षेपण मदों के विचरण का माप है।'' यह कथन डॉ0 बाडले का है।
2. माध्य विचलन से परिक्षेपण की माप नहीं की जाती है।
3. परास गुणांकका सूत्र $\frac{L-S}{L-S}$ नहीं है।
4. माध्य विचलन निकालने के लिए सबसे पहले माध्य की गणना की जाती है।
5. प्रमाप विचलन को S से संकेत करते हैं।

9.11 बोध प्रश्नों के उत्तर :

खाली स्थान भरने वाले प्रश्नों के उत्तर –

1. परिक्षपेण; 2. विस्तार ; 3. सापेक्ष; 4. माध्य विचलन; 5.+ –; 6. सापेक्ष माप ; 7 :$\frac{6}{X}$; 8. नहीं; 9. विचलन का माप; 10. प्रो0 लोरंज।

सत्य एवं असत्य वाले प्रश्नों के उत्तर :–

1. सत्य; 2. असत्य; 3. असत्य; 4. सत्य; 5. असत्य

9.12 स्व परख एवं आंकिक प्रश्न :

1. परिक्षेपण (अपकिरण) को समझाइए। परिक्षेपण को मापने की कौन–कौन सी विधियाँ है?
2. परिक्षेपण के मापों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत कीजिए।
3. परिक्षेपण के मापों के रूप में प्रयुक्त विस्तार, प्रमाप विचलन एवं माध्य विचलन के तुलनात्मक गुणों का विवेचन कीजिए।
4. अपकिरण (परिक्षेपण) के अन्य मापों की तुलना में प्रमाप विचलन क्यों अधिक अच्छा माना जाता है? समझाइए तथा इसके प्रमुख दोषों पर प्रकाश डालिए।
5. निम्नांकित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए–

   क. परिक्षेपण के निरपेक्ष व सापेक्ष माप

   ख. प्रसरण व विचरण गुणांक

   ग. लोरंज वक्र

6. निम्न पदों से विस्तार व गुणांक ज्ञात कीजिए–

   क. 20, 8, 10, –20, 10, 4

   उत्तर = 40;0.00

   ख. –0, –3, –8, –7, –20, –1, –17

   उत्तर = R = 19 CR= 0.905

7. किसी परीक्षा में निम्न 25 छात्रों के अंक है–

अंक	5–9,	10–14,	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39
छात्र की संख्या	1	3	8	5	4	2	2

विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए– उत्तर 0.795

8. निम्न वितरण से विस्तार का निरपेक्ष और सापेक्ष माप ज्ञात कीजिए–

X	4	5	7	10	12	14
f	10	13	12	17	13	12

उत्तर : R=10, C.R. = 0.556

9. निम्नलिखित बंटन से चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक मालूम कीजिए–

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
आय	39	40	40	41	41	42	42	43	43	44	44	45

उत्तर : Q. D= 1.75 c.of QD =0.042

10. निम्न समंको से चतुर्थक विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए–

ऊँचाई (सेमी. में)	150	151	152	153	154	155	156	157	158
छात्रों की संख्या	15	20	32	35	33	22	20	12	10

उत्तर : Q.D= 1.5; C.of QD =0.0098

11. निम्न से चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए–

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
वंखोरता (f)	4	15	28	16	7

उत्तर : cof Q.D= 0.2754

12. निम्न समंको से मध्यका द्वारा माध्य विचलन की गणना कीजिए–

अंक (से कम)	80	70	60	50	40	30	20	10
विद्यार्थियों की संख्या	100	90	80	60	32	20	13	5

उत्तर : (M=46.43, δm= 14.286)

13. वाणिज्य की परीक्षा में किसी एक प्रश्न पत्र में सात विद्यार्थियों ने निम्न अंक प्राप्त किये इनके माध्य मध्यका और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

A	B	C	D	E	F	G
20	30	40	60	75	35	90

उत्तर : $\bar{x}$=50; M =40

14. निम्न आँकड़ों से तथा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए–

मूल्य (x)	60	61	62	63	64	65
आवृत्ति (f)	5	15	8	8	6	8

उत्तर : ($\bar{x}$ = 62.317; σ= 14.89)

15. निम्न आँकड़ों से समान्तर माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए–

आयु	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
आवृत्ति	2	4	4	8	6	3	2

उत्तर : $\bar{x}$ (M=45. σ = 15.97)

16. निम्न आँकड़ों से विचरण गुणांक ज्ञात कीजिए–

आकार	5	10	15	20	25	30
आवृत्ति	2	3	5	10	6	4

उत्तर : (c.of V = 35.25%)

/ / / /

इकाई – 10 सह–सम्बन्ध और प्रतीपगमन (Correlation and Regression)

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात आप निम्न का ज्ञान कर पायेंगे–

- विभिन्न चरों के मात्रात्मक संबंध का ज्ञान।
- दो चरों के कारण एवं परिणाम का ज्ञान।
- दो या दो से अधिक चर मूल्यों के दिशा का ज्ञान।
- स्वतंत्र श्रेणी एवं आश्रित श्रेणी का ज्ञान।
- स्वतंत्र चर के आधार पर आश्रित चर मूल्य के अनुमान का ज्ञान।

10.1 प्रस्तावना

हमने अभी तक पिछले अध्यायों में जिन सांख्यिकी विधियों का अध्ययन किया है वे केवल एक ही चर (Varialde) के विश्लेषण से संबंधित है। परन्तु सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए इतना ही काफी नहीं है। वास्तविक जीवन में दो या दो से अधिक श्रृंखलाओं में परस्पर संबंध पाया जाता है। उदाहरण के लिए, कीमत में परिवर्तन होने पर माँग में परिवर्तन होता है। मुद्रा की पूर्ति बढ़ने पर कीमत स्तर बढ़ता है। रोजगार में वृद्धि होने पर उत्पादन में वृद्धि होता है। इस प्रकार की स्थितियों में दो या अधिक सांख्यिकीय श्रृंखलाओं का एक साथ अध्ययन करना आवश्यक हो जाता है। इस अध्ययन का केन्द्र–बिन्दु विभिन्न सांख्यिकीय श्रृंखलाओं में पाए जाने वाले संबंधों की मात्राओं की गणना जिस सांख्यिकीय तकनीक से की जाती है, उसे सहःसंबंध की तकनीक कहा जाता है।

सह–सम्बन्ध का सिद्धान्त यह स्पष्ट करता है कि दो संबंधित श्रेणियों में कितना और किस प्रकार का सम्बन्ध है। लेकिन एक स्वतंत्र श्रेणी के निश्चित मूल्य के आधार पर दूसरी आश्रित श्रेणी के तत्संवादी मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाने के लिए प्रतीपगमन–विश्लेषण का प्रयोग करना आवश्यक होता है। किसी वस्तु की कीमत और यांग की पारस्परिक संबंध के आधार पर प्रतीपगमन समीकरण द्वारा वस्तु की किसी निश्चित कीमत के लिए मांग का अनुमान लगाया जा सकता है। प्रस्तुत अध्याय दोनों रीतियों का विश्लेषण है।

10.2 सहः सम्बन्ध का अर्थ एवं परिभाषा :

सहः सम्बन्ध एक सांख्यिकीय विधि या सांख्यिकीय तकनीक है जो विभिन्न चरों जैसे कीमत तथा माँग के मात्रात्मक संबंध की गणना करती है। दूसरे शब्दों में दो सम्बद्ध समंक मालाओं की परस्पर आश्रितता का विधिवत् सांख्यिकीय अध्ययन सहःसम्बन्ध के सिद्धान्त (Theory of Correlation) के अन्तर्गत किया जाता है। **क्राक्सटन एंव काइडेन के अनुसार**', जब संबंध संख्यात्मक स्वभाव के हों तो उन संबंधों की जानने एवं मापने और एक संक्षिप्त सूत्र में स्पष्ट करने के उचित सांख्यिकीय यंत्र को सहःसंबंध कहा जाता है।

बोडिंगटन के अनुसार, ''जब कभी दो या अधिक समूहों अथवा वर्गो अथवा श्रृंखलाओं में निश्चित संबंध पाया जाता है तो उसे सह–संबंध कहा जाता है।''

इस प्रकार सह–संबंध दो चरों के बीच किसी कारण और प्रभाव संबंध के साथ या उसके बिना, संबंध की कोटि (Degree) और तीव्रता (Intensity) को मापता है।

10.3 सह–सम्बन्ध का महत्व :

किंग के अनुसार– ''यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में दो चर–समूहों में दो चर–मूल्य सदा एक दिशा में या विपरीत दिशा में घटने–बढ़ने की प्रवृत्ति रखते हैं तो ऐसी स्थितियों में हम यह समझते है कि उनमें एक सुनिश्चित संबंध पाया जाता है। यह सम्बन्ध ही सह–संबंध कहलाता है। संक्षेप में जब दो चर–मूल्यों में इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि एक में कमी या वृद्धि होने से दूसरे में भी उसी दिशा में या विपरीत दिशा में परिवर्तन होते हैं तो वे दोंनो सह–संबंधित कहलाते है।

खांख्यिकी में सह–सम्बन्ध का सिद्धान्त बहुत महत्वपूर्ण है। इसके मूल तत्वों का प्रतिपादन सर्वप्रथम फ्रांस को खगोली शास्त्री **ब्रावे (Bravais)** ने किया था, परन्तु इस सिद्धान्त को विकसित करने व आधुनिक रूप देने का श्रेय प्रसिद्ध प्राणिशास्त्री **फ्रांसिस गाल्टन (Frances Graltion)** तथा कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) के प्राप्त है। इस प्रसिद्ध वैज्ञानिकों ने प्रणिशास्त्र (Biology) तथा जनन विधा (Gemetics) के क्षेत्र में सह–संबंध के सिद्धान्त के

आधार पर अनेक समस्याओं का वैज्ञानिक विश्लेषण किया है। इस सिद्धान्त के आधार पर ही प्रत्येक क्षेत्र में दो या दो से अधिक घटनाओं के परस्पर संबंधों का स्पष्टीकरण होता है। सह–सम्बन्ध विश्लेषण से हमें यह पता चलता है कि दो सम्बन्धित चर–मूल्यों में कितना और किस प्रकार का सम्बन्ध है। प्रतीपगम (Regression) तथा विचरण–अनुपात (Ratio of Variation) की धारणाएं सह–सम्बन्ध सिद्धान्त पर आधारित हैं। इनकी सहायता से दो सम्बन्धित श्रेणियों में से एक दिए हुए निश्चित चर–मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के संभावित चर मूल्य का विश्वसनीय अनुमान लगाया जा सकता है। टिपैट का कथन है, ''सह–सम्बन्ध का प्रभाव हमारी भविष्यवाणी को अनश्चितता के विस्तार को कम करना है।'' सह–सम्बन्ध विश्लेषण पर आधारित अनुमान अधिक विश्वसनीय और निश्चयात्मक होते हैं।

इस प्रकार व्यावहारिक जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में दो या दो से अधिक सम्बन्धित घटनाओं का तुलनात्मक अध्ययन करने, उनमें पारस्परिक सम्बन्ध का विवेचन करने तथा पूर्वानुमन लगाने में सह–सम्बन्ध का सिद्धान्त बहुत उपयोगी सिद्ध होता है।

10.4 सह–सम्बन्ध के प्रकार :

सम्बद्ध समंकमालाओं में चर–मूल्यों के परिवर्तनों की दिशा, अनुपात तथा मालाओं की संख्या के आधार पर सह–सम्ब्ध के निम्नलिखित भेद हैं–

क. धनात्मक तथा ऋणात्मक सह–संबंध (**Possetive and Negative Correlation**)

1. **धनात्मक सह–संबंध** : जब दो चरों में परिवर्तन एक ही दिशा की ओर होता है अर्थात् जब एक बढ़ता है तो दूसरा भी बढ़ता है और अगर एक घटता है तो दूसरा भी घटता है तो ऐसे सम्बन्धों को चरों का धनात्मक सह–संबंध कहा जाता है। कीमत और पूर्ती में धनात्मक सह–सम्बन्ध उदाहरण के द्वारा प्रमाणित हो जाता है। निम्नलिखित तालिका से उदाहरण की जाँच निम्न है–

तालिका 10.1 चरों के धनात्मक सह–संबंध

(A) दोनों चरों के मूल्य में वृद्धि		(B) दोनों चरों के मूल्य में कमी	
X	Y	X	Y
10	100	50	200
20	150	40	150
30	200	30	100
40	250	20	50

2. **ऋणात्मक सह–संबंध** : जब दो चरों में परिवर्तन विपरीत दिशा की ओर होता है अर्थात् एक पद के मूल्य में वृद्धि होती है तो दूसरी श्रेणी के मूल्य में कमी हो जाती है या एक के घटने से दूसरे के मूल्य बढ़ने लगते हैं। तो वहाँ ऋणात्मक सह–संबंध पाया जाता है। अग्रलिखित तालिका द्वारा यह संबंध प्रदर्शित किया गया है–

तालिका 10.2 चरों में ऋणात्मक सह–संबंध

एक चर की कीमत में वृद्धि तथा दूसरे में कमी	
X	Y
1	5
2	4
4	2
5	1

ख. समरेखीय और अरेखीय सह–संबंध (**Linear and Non- Linear correlation**)

1. **समरेखीय सह–संबंध** : जब दो चरों में स्थायी रूप से समान अनुपात में परिवर्तन होता है तो इसे समरेखीय सह–संबंध कहा जाता है क्योंकि यदि इस प्रकार के स्थाई अनुपात वाले आँकड़े को ग्राफ पेपर पर फैलाया जाए तो दोनों सीधीं रेखाओं के रूप में बनेगें। उदाहरणार्थ, यदि मुद्रा की मात्रा में 10% वृद्धि होने से सामान्य की मत–स्तर में सदा 50% की वृद्धि हो जाती है तो उनमें रेखीय सह–सम्न्ध हुआ। इस प्रकार का सह–संबंध भौतिक व पूर्ण विज्ञानों में पाया जाता है।

2. **अरेखीय सह–सम्बन्ध** : जब दो चरों के परिवर्तन का अनुपात असमान व अस्थाई हो तो इसे अरेखीय या वक्रीय रेखा सह–संबंध कहा जाता है। इस संबंध को एक सरल रेखा के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में अधिकतर अरेखीय (वक्र रेखीय) सह–संबंध पाया जाता है। उदारणार्थ यदि मुद्रा की मात्रा में 10% वृद्धि होने से सामान्य कीमत स्तर में 5% वृद्धि हो जाती है, कमी 6%, कभी 9% तो मुद्रा की मात्रा और सामान्य कीमत स्तर का सह–सम्बन्ध अरेखीय कहलायेगा।

तालिका 10.3 रेखीय एवं अरेखीय सह–सम्बन्ध

रेखीय सह–संबंध		अरेखीय सह–संबंध	
X	Y	X	Y
100	20	100	20
110	22	110	22
145	29	121	33
215	43	180	45
260	52	198	60

ग. सरल और बहुमुखी सह–संबंध (**Simple and Multiple Correlation**)

1. **सरल सह–संबंध** : जब केवल दो चरों के संबंधों का ही अध्ययन किया जाता है और इन दोनों में एक प्रधान या स्वतंत्र व दूसरा गौण या निर्भर चर होता है तो ऐसे सह–संबंध को सरल

सह–संबंध कहा जाता है जैसे–आय और व्यय कीमत और माँग का संबंध या मुद्रा पूर्ति और कीमत स्तर के बीच संबंध।

2. बहुमुखी सह–संबंध : जब तीन या तीन से अधिक चरों के संबंधों का एक साथ अध्ययन किया जाता है तो ऐसे संबंधों को बहुमुखी सह–संबंध कहा जाता है। ऐसे सह–संबंध में स्वतंत्र और निर्भर दोनों प्रकार के चरों का सम्मिलित अध्ययन किया जाता है जैसे– प्रति हेक्टेयर गेहूँ की उपज के संबंध में वर्षा, खाद, पानी आदि के प्रभावों का सम्मिलित अध्ययन करना।

10.5 सह–संबंध की मात्रा :

सह–संबंध का परिमाण सह–संबंध गुणांक (Coeffecient of corralation) द्वारा ज्ञात कियाजाता है। इसके आधार पर धनात्मक और ऋणात्मक सह–संबंध के निम्न परिणाम हो सकते है।

क. **पूर्ण सह–संबंध (Perfect Correlation)** : जब दो चर–मूल्यों के परिवर्तन समान अनुपात में तथा एक ही दिशा में हों तो उनमें पूर्ण धनात्मक सह–संबंध होता है। ऐसी स्थिति में सह–संबंध गुणांक + 1 होता है। इसके विपरीत, यदि दोनों चर–मूल्यों के परिवर्तन समान अनुपात परन्तु विपरीत दिशा में हों तो उनमें पूर्ण ऋणात्मक सह–संबंध होता है तथा इसका गुणांक –1 होता है। आर्थिक और सामाजिक क्षेत्रों में पूर्ण सह–संबंध दृष्टिगोचर नहीं होता।

ख. **सह–संबंध की अनुपस्थिति (Absence of Correlation)** : यदि दो श्रेणियों में परस्पर आश्रितता बिल्कुल न पाई जाये अर्थात् परिवर्तनों में कोई भी सहानुभूतिपूर्ण संबंध न हो तो उस स्थिति को सह–सम्बन्ध का अभाव (No Correlation) कहते हैं। ऐसी स्थिति में गुणांक शून्य (0) होता है।

ग. **सह–सम्बन्ध की सीमित मात्रा (Limit degree of Correlation)** : सह–सम्बन्ध के अभाव और पूर्ण सह–सम्बन्ध की स्थितियों के बीच सीमित मात्रा का धनात्मक या ऋणात्मक सह–संबंध होता है। आर्थिक, व्यावसायिक तथा सामाजिक क्षेत्रों में अधिकतर सीमित मात्रा का सह–संबंध ही देखनें को मिलता है। इन परिस्थितियों में सह–संबंध गुणांक शून्य (0) से अधिक किन्तु 1 से कम (>0 but < 1) होता है। सीमित सह–संबंध का इस प्रकार से मूल्यांकन किया जा सकता है :–

1. **उच्च (High)** : जब दो शृंखलाओं के बीच सह–संबंध की यात्रा न बहुत अधिक हो और न कम हो तो इसका सह–संबंध गुणांक 0.25 तथा 0.75 के बीच आता है।

2. **मध्यम (Moderate)** : जब शृंखलाओं के बीच सह–संबंध की मात्रा अधिक हो तो वह उच्च यात्रा का सह–संबंध कहलाता है। इसका गुणांक 0.75 तथा 1 के बीच में होता है। इस प्रकार का सहःसंबंध मध्यम सह–संबंध कहलाता है।

3. **निम्न (low)** : जब दो शृंखलाओं में कम अनुपात में सह–संबंध होता है अर्थात् सह–संबंध 0 तथा 0.25 के बीच होता है। तो वह निम्न सह–संबंध कहलाता है।

उपरोक्त सभी सह–संबंध धनात्मक तथा ऋणात्मक होते हैं।

सह संबंध का परिमाण
(Degree of Correlation)

परिमाण	धनात्मक	ऋणात्मक
पूर्ण	+1	−1
उच्च	+0.75 और +1 के बीच	−0.75 और −1 के बीच
मध्यम	0.25 और +0.75 के बीच	−0.25 और −0.75 के बीच
निम्न	0 और +0.25 के बीच	0 और −0.25 के बीच
शून्य	0	0

10.6 सह–संबंध ज्ञात करने की रीतियाँ :

सह–संबंध ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रमुख रीतियाँ हैं–

क. विक्षेप चित्र या बिन्दु–चित्र (Digram or Dot Digram)

ख. कार्ल पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक

ग. स्पियर मैन की कोटि–अन्तर विधि

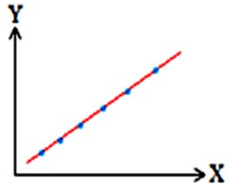
घ. संगामी विचलन रीति (Concurrent DeviationMethod)

ड़ न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least squares)

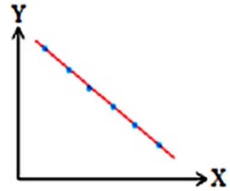
क. विक्षेप चित्र या बिन्दु–चित्र :

दो श्रृंखलाओं के परस्पर सह–संबंध की दिशा और मात्रा का अनुमान चित्र बनाकर भी किया जा सकता है। इन चित्रों को ही विक्षेप चित्र या बिन्दु–चित्र या प्रकीर्ण आरेख कहा जाता है। इस विधि के अनुसार ग्राफ पेपर X- अक्ष पर स्वतंत्र तथ्यों से संबंधित मूल्य (Dndependent Variables) तथा Y– अक्ष पर आश्रित तथ्यों से संबंधित मूल्य (Rependent Variables) अंकित किये जाते हैं। प्रत्येक मद की X श्रेणी और Y श्रेणी को एक बिन्दु द्वारा अंकित किया जाता है। इस प्रकार दोनों तथ्यों के जितने जोड़ बनते हैं, वे विभिन्न बिन्दुओं के रूप में ग्राफ पेपर पर अंकित हो जाते हैं। ये बिन्दु एक निश्चित प्रवृत्ति प्रकट करते हैं। नीचे दिये गये चित्र द्वारा विभिन्न प्रकार के बिन्दु–चित्र प्रकट किये गये हैं। ग्प्रफ पेपर पर अंकित किए गये विभिन्न बिन्दु जितने एक दूसरे के निकट होगें उतनी ही सह–संबंध की मात्रा अधिक होगी। इसके विपरीत ये बिन्दु जितने दूर होगें, सह–संबंध की मात्रा उतनी ही कम होगी।

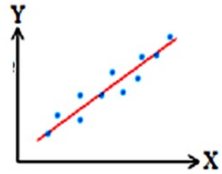
विक्षेप चित्र निम्नलिखित प्रकार के हो सकते हैं :–



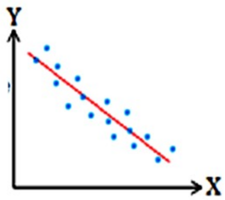
r = + 1
पूर्ण धनात्मक



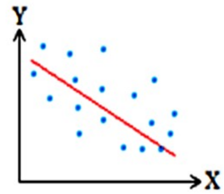
r = - 1
पूर्ण ऋणात्मक



धनात्मक



ऋणात्मक



सह सम्बन्ध का अभाव

टिप्पणी :

विक्षेप चित्र आँकड़ों के दो समूह के संबंधों में केवल अनुमान को प्रकट करता है। इसके द्वारा इनमें पाये जाने वाले संबंध को निश्चित मात्रा में प्रकट नहीं किया जा सकता।

गुण :

1. विक्षेप चित्र सह–संबंध की प्रकृति को प्रकट करने का सरल और आकर्षक तरीका है।
2. इसके आधार पर तुरंत ही पता चल जाता है कि दो श्रृंखलाओं के मूल्य में संबंध है अथवा नहीं।
3. इस ओरख द्वारा यह भी तुरन्त ही पता चल जाता है कि संबंध धनात्मक है अथवा ऋणात्मक

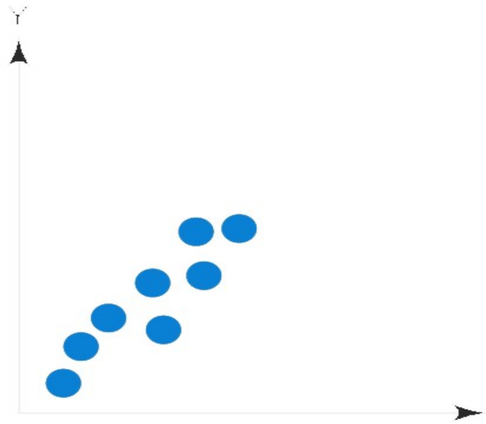
अवगुण :

1. इस विधि द्वारा सह–संबंध के परिमाण के बारे में कोई निश्चित जानकारी प्राप्त नहीं होती।
2. इस विधि द्वारा सह–संबंध की मात्रा का केवल अनुमान ही लगाया जा सकता है।
3. इस विधि द्वारा सह–संबंध का संख्यात्मक माप संभव नहीं है। ये सिर्फ संख्यात्मक बदलाव का गुणात्मक भाव है।

उदाहरण (Illustration) :

एक कक्षा के विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई तथा वजन निम्न सारणी में दिए गए हैं। एक बिन्दु–चित्र बनाकर बताइए कि संबंध धनात्मक है या ऋणात्मक और संबंध मजबूत है या कमजोर।

ऊँचाई (से0मी0)	180	150	158	165	175	163	195	155
वजन (कि0 ग्रा0)	65	54	55	65	60	54	63	50



उपरोक्त बिन्दु–चित्र से ज्ञात होता है कि ऊँचाई तथा वजन में धनात्मक सह–संबंध है। इसका कारण यह है कि विभिन्न बिन्दु बाएँ से दाएँ नीचे से ऊपर की ओर उठ रहे हैं। इससे ज्ञात होता है कि ऊँचाई मे वृद्धि के साथ वजन में भी वृद्धि होती है। अतएव यह एक सीमित धनात्मक सह–संबंध है क्योंकि बिन्दु कोई एक सीधी रेखा नही बनाती।

ख. कार्ल पियर्सन का सह–संबंध गुणांक (**Karl Pearson's Caoefficient of carrelation**)

कार्ल पियर्सन नामक प्रसिद्ध प्राणिशास्त्री ने उन्नीसवीं शताब्दी में सह–सम्बन्ध ज्ञात करने की गुणन–परिघात सह–संबंध गुणांक रीति (Product-Moment coefficient method) का प्रतिपादन किया था। यह रीति सर्वोत्त मानी जाती है क्योंकि इससे सह–सम्बन्ध की दिशा और मात्रा का संतोषजनक अंकात्मक माप ज्ञात हो जाता है। पियरसन के सह–संबंध गुणाक को 'r' चिन्ह द्वारा प्रकट किया जाता है।

सह–सम्बन्ध गुणांक का परिकलन करने के लिए सबसे पहले सह–विचरण (Co-Variance) का माप ज्ञात किया जाता है, फिर इस निरपेक्ष माप को गुणांक में परिवर्तित करने के लिए दोनों श्रेणियों के प्रमाप–विचलनों (σx और σy) के गुणनफल से भाग दे दिया जाता है। इस प्रकार उपलब्ध अनुपात ही कार्ल–पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक कहलाता है। सूत्र के रूप में–

$$r = \frac{\frac{\sum dxdy}{N}}{6x6y}$$

$$\text{या} = \frac{\text{X व X का सह–विचरण}}{\sqrt{\text{प्रसरण X प्रसरण Y}}}$$

Co variance of x and y

$$= \sqrt{}$$
Co variance of x and y

$$\text{या} = \frac{\sum dxdy}{6x6y}$$

यह पियर्सन के सह–संबंध गुणांक का मूल सूत्र है।

व्यक्तिगत श्रेणियों में प्रत्यक्ष रीति से सह–संबंध की गणना :

निम्नलिखित प्रक्रियाओं का पालन करते हुए व्यक्तिगत श्रेणी में प्रत्यक्ष रीति से सह–संबंध की गणना की जाती है–

क. दोनों श्रेणियों (X व Y) का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है।

ख. दोनों समंकमालाओं के समान्तर माध्यों से उनके व्यक्तिगत मूल्यों के विचलन ज्ञात कर लिए जाते हैं। X और Yश्रेणियों के विचलनों के लिए क्रमशः dx और dy चिन्हों का प्रयोग होता है।

$$= \quad dx = \left(x - \bar{x}\right); \quad dy = \left(y - \bar{y}\right)$$

ग. दोनों श्रेणियों के परस्पर सम्बन्धित विचलनों अर्थात् dx और dy की गुणा करके उन गुणाओं का जोड़ ($\sum dxdy$) निकाला जाता है। इन गुणाओं को सारिणी के अंतिम कालम में रखा जाता है।

घ. दोनों श्रेणियों के विचलनों के वर्ग (Square) करके अलग–अलग उन विचलन–वर्गों के जोड़ प्राप्त कर लिए जाते हैं। अर्थात् ($\sum d_x^2$ व $\sum d_y^2$)

ड़. दोनों श्रेणियों के प्रमाप–विचलन (6x तथा 6y) निकाल लिए जाते हैं।

$$6x = \sqrt{\frac{\sum d_x^2}{N})}; \quad 6y = \sqrt{\left(\frac{\sum d_y^2}{N}\right)};$$

च. अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$r = \frac{\sum dxdy}{N\sigma x\sigma y} \text{ – प्रथम सूत्र}$$

जहाँ– r = सह–संबंध गुणांक

$\sum dxdy =$ दोनों श्रेणियों के विचलनों की गुणाओं का जोड़ है।

$\sigma x, \sigma y =$ दोनों श्रेणियों के प्रमाप–विचलनों की अभिव्यक्ति।

N = पद–युग्मों की संख्या।

उपर्युक्त प्रत्यक्ष रीति में दोनों श्रेणियों के अलग–अलग प्रमाप विचलन भी निकालने पड़ते है, जिसमें समय अधिक लगता है, और गणन–क्रिया बढ़ जाती है। अतः पियर्सन के मूल–सूत्र में σx और σy के स्थान पर उन्हें ज्ञात करने के सूत्र रखकर इस विधि को सरल बनाया जा सकता है। ऐसा करने में अंतिम प्रक्रिया नहीं करनी पड़ेगी। सूत्र निम्नलिखित हैं–

$$r = \frac{\sum dxdy}{N\sqrt{\left(\frac{\sum d_x^2}{N}\right) X \sqrt{\left(\frac{\sum d_y^2}{N}\right)}}}$$ – द्वितीय सूत्र

$$r = \frac{\sum dxdy}{N\sqrt{\left(\frac{\sum d_x^2 \text{ x ed}_y^2}{NXN}\right)}} \quad \text{या} \quad \frac{\sum dxdy}{\frac{N}{N}\sqrt{\sum d_x^2 \text{ x} \sum d_y^2}} = \frac{\sum dxdy}{\sqrt{\sum d_x^2 \text{ x} \sum d_y^2}}$$ –तृतीय सूत्र

तृतीय सूत्र प्रत्यक्ष रीति का सबसे अधिक सरल सूत्र है। अतः इसी सूत्र का सर्वाधिक प्रयोग किया जताा है।

उदाहरण (Illustration) :

निम्न आँकड़ों से कार्ल पियर्सन का सह–संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए–

पति की आयु (वर्ष)	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
पत्नी की आयु (वर्ष)	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

हल (Solution) : कार्ल पियर्सन का सह–संबंध गुणांक (प्रत्यक्ष रीति)

पति की आयु			पत्नी की आयु			
X	$dx = (x - \bar{y})$	d_x^2	Y	dy = (y – y)	d^2y	dxdy
23	–7	49	18	–7	49	+49
27	–3	9	20	–5	25	+15
28	–2	4	22	–3	9	+6
28	–2	4	27	+2	4	–4
29	–1	1	21	–4	16	+4
30	0	0	29	+4	16	0
31	+1	1	27	+2	4	+2
33	+3	9	29	+4	16	+12
35	+5	25	28	+3	9	+15
36	+6	36	29	+4	16	+24
N=10 $\sum$x=300		$138 = \sum d_x^2$	N=100 $\sum$y=250		$164 = \sum d_y^2$	+127-4=123 $\sum$ dxdy

$\bar{X} = \frac{\sum x}{N} \quad \frac{300}{10} = 30$

$\sigma x = \sqrt{\left(\frac{\sum d_X^2}{N}\right)} = \sqrt{\frac{138}{10}} = 3.71$

मूल सूत्र के अनुसार–

$r = \frac{\sum dxdy}{N\sigma X \sigma Y} = \frac{123}{10x3.71x4.05}$

$= \frac{123}{150.3} = +0.82$

$\bar{Y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{250}{10} \quad = 25$

$\sigma y = \sqrt{\left(\frac{\sum d_y^2}{N}\right)} \quad = \sqrt{\frac{164}{10}} = 4.05$

द्वितीय सूत्र के अनुसार–

$r = \frac{\sum dxdy}{NX\sqrt{\left(\frac{\sum d_X^2}{N}\right)} X \sqrt{\left(\frac{\sum d_y^2}{N}\right)}}$

$= \frac{123}{10\sqrt{\left(\frac{138}{10}\right)} X \sqrt{\left(\frac{164}{10}\right)}}$

$= \frac{123}{10X\sqrt{13.8}\,X\,\sqrt{164.4}}$

$= \frac{123}{150.3} = +0.82$

तृतीय सूत्रानुसार :

$r = \frac{\sum dxdy}{\sqrt{\sum d_y^2 \, x \sum d_y^2}}$

$= \frac{123}{\sqrt{138 \, X \, 164}} = +\ 08.82$

अतः पति और पत्नी की आयु में अधिक मात्रा का धनात्मक सह–सम्बन्ध है।

(क). निम्नलिखित संमकों से X और Y के मध्य सह–संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए–

विवरण	X	Y
अवलोकनों की संख्या	15	15
समान्तर माध्य ($\bar{X}$)	25	18
मानक विचलन (σ)	3.01	3.03

X व Y श्रेणी के समान्तर माध्य से तत्संवादी विचलनों की गुणाओं का योग = +122 है।

ख. यदि X और Y चरों में सह–विचरण 10 है एवं X और Y के प्रसरण क्रमशः 16 व 19 है तो सह–संबध गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

क. ज्ञात है : $N = 15$, $\bar{X} = 25$; $\sigma x = 3.01$

$\bar{Y} = 18$; $\sigma y = 3.03$

$\sum dxdy = +122$

$r = \frac{\sum dxdy}{N\sigma \, X \, \sigma y} = \frac{+122}{15x3.01x3.03} = \frac{122.0}{136.8} = \underline{70.892}$

अतः X और Y में उच्च मात्रा का धनात्मक सह–संबंध है।

ख. प्रदत्त : सह–विचरण = 10, प्रसरण (X,Y) =16, प्रसरण y=9

$$r = \frac{\text{Co-varianc } (X,Y)}{\sqrt{\text{Variance X}}\sqrt{\text{Variance Y}}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{16}\,X\,\sqrt{9}} = \frac{10}{12}$$

$$= +\ 0.8\ 333$$

अतः X और Y में उच्च मात्रा का धनात्मक सह–संबंध है।

नोट : सह–संबंध गुणांक एक विभाहीन गुणांक होता है, अर्थात् वह एक ऐसा निरपेक्ष शुद्ध अंक है जो मूल बिन्दु और तुलना मापदण्ड या पैमाने में परिवर्तन करने से प्रभावित नहीं होता। मूल–बिन्दु में परिवर्तन का तात्पर्य है X और Y के सभी मूल्यों में से एक स्थिरांक (Constant) का घटाया जाना या जोड़ा जाना और तुलना–मापदण्ड (पैमाने) में परिवर्तन का अर्थ है X और Y के प्रत्येक मूल्य को किसी स्थिरांक या समापवर्तक से गुणा या भाग करना।

वर्गीकृत श्रेणी में सह–संबंध (Correlation in Grouped series) :

वर्गीकृत श्रेणी में भी पियर्सन का सह–संबंध गुणांक उसी प्रकार निकाला जायेगा जिस प्रकार वह व्यक्तिगत समंकों में ज्ञात किया जाता है। परंतु वर्गीकरण श्रेणी में सह–सम्बन्ध सारणी (Corralation table) की आवश्यकत होती है। सह–संबंध सारणी वर्गीकृत मालाओं की एक द्विचर आवृत्ति सारणी है। इसमें दो परस्पर सम्बन्धित अविच्छिन्न अथवा विच्छिन्न श्रेणियों की कोष्ठ आवृत्तियाँ (Cell Frequenciees) तथा कुल आवृत्तियाँ इस प्रकार प्रस्तुत की जाती हैं, कि दोनों का अन्तर्सबंध स्पष्ट हो जाए। इस सारणी में अनेक कोष्ठ (Cells) होते है जिनमें X और Y श्रेणी की उभयनिष्ठ (Common) आवृत्तियाँ लिखी जाती हैं। नीचे 50 विद्यार्थियों के अर्थशास्त्र और सांख्यिकी में प्राप्तांक सह–संबंध सारणी के रूप में प्रस्तुत किये गये हैं–

सह–सम्बन्ध सारणी

Y अर्थशास्त्र में प्राप्तांक	X– सांख्यिकी में प्राप्तांक					
	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	योग
0–10	6	8				14
10–20		5	10	1		16
20–30			6	4		10
30–40				3	3	6
40–50				3	1	4
योग	6	13	16	11	4	N=50

उपर्युक्त सारणी में 50 विद्यार्थियों की सांख्यिकी और अर्थशास्त्र में प्राप्तांकों की विस्तृत एवं विश्लेषणात्मक सूचना दी गई है। सांख्यिकी में (0–10) प्राप्तांक वर्ग में कुल 6 विद्यार्थी है जिन्होंने अर्थशास्त्र में भी (0–10) वर्ग में ही–अंक प्राप्त किये हैं। (10–20) वर्ग में कुल 13 छात्र हैं जिनमें से 8 के अर्थशास्त्र में (0–10) प्राप्तांक वर्ग में कुल 14 विद्यार्थी हैं, जिनमें से सांख्यिकी में (0–10) अंक है और 5 के (10–20) वर्ग में अंक है। इसी प्रकार अर्थशास्त्र में (0–10) वर्ग के अंक प्राप्त करने वाले 6 है और शेष 8 के (10–20) वर्ग में प्राप्तांक है। इस प्रकार

हम देखते हैं कि अधिकतर जिन विद्यार्थियों के सांख्यिकी में अधिक अंक हैं उनके अर्थशास्त्र में भी अधिक प्राप्तांक है। अतः दोनों में धनात्मक सह–संबंध है। अतः सह–संबंध सारणी की सहायता से वर्गीकृत श्रेणी में सह–संबंध का अनुमान लगाया जा सकता है।

वर्गीकृत श्रेणी में सह–संबंध गुणांक की गणना : वर्गीकृत श्रेणी में पियर्सन का सह–संबंध गुणांक ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रक्रिया है।

(क). एक नयी सारणी का निर्माण किया जायेगा जिसमें चार खान (Columms) दाहिनी ओर क्रमशः dy, fdy, fd_Y^2 fdxdy तथा और चार पंक्तियाँ Rows नीचे की ओर (क्रमशः dx, fdy, fd_x^2, तथा fdxdy बनायी जायेगीं।

(ख). X और Y के अलग–अलग सुविधाजनक मध्य–बिन्दुओं या मूल्यों को कल्पित माध्य मानकर मुख्य–बिन्दुओं या मूल्यों के विचलन (dx व dy) निकाले जायेंगे, यदि वर्गान्तर समान हों या मूल्यों के अन्तर बराबर हों तो उभयनिष्ठ गुणांक (Common factor) निकालकर पद विचलन ज्ञात करना अधिक सरल होता है। इससे गुणन क्रिया में काफी बचत होती है। पद–विचलन, निकालने के लिए X श्रेणी के वर्ग–विस्तार आपस में समान होने चाहिए। इसी प्रकार Y श्रेणी के वर्ग–विस्तार आपस में समान होने चाहिए। इसी प्रकार श्रेणी Y के वर्ग–विस्तार या मूल्यों के अंतर भी बराबर होने चाहिए X श्रेणी में यदि 5–5 का वर्ग विस्तार है और पूरी Y श्रेणी में 6–6 का या 10–10 का विस्तार हो, तो पद–विचलन रीति का प्रयोग किया जा सकता है।

(ग). दोनों श्रेणियों के विचलनों व आवृत्तियों की गुणा करके गुणनफल संबंधित खाने और पंक्ति में लिखे जायेंगें। इन गुणनफलों के जोड़ क्रमशः $\sum fdx$ और $\sum fdy$ होगें।

(ङ). fdx की dx से तथा fdy की dy से गुणा करके उन गुणांकों के जोड़ $\sum fdx$ और $\sum fd_x^2$ प्राप्त कर लिए जायेंगे।

(च). $\sum fdxdy$ की गणना करने के लिए प्रत्येक को कोष्ठ–आवृत्ति (Cell-frequncey) तथा तत्सम्बन्धी dx और dy की आपस में गुणा की जायेगी। इसकी प्रक्रिया यह है– प्रत्येक वर्ग या कोष्ठ के नीचे की ओर वाले तथा सामने की ओर वाले विचलनों (dx और dy) की आपस में गुणा करके गुणनफल (dxdy) उस कोष्ठ में बाएँ कोने में ऊपर की ओर लिखा जायेगा। फिर इस गुणनफल (dxdy) की कोष्ठ–आवृत्ति (f) से गुणा करके गुणनफल (fdxdy) उसी वर्ग में दाहिने कोने में नीचे की ओर लिख दिया जायेगा। इन गुणनफलों का क्षैतिज जोड़ (बायीं से दाहिने ओर) अंतिम खाने (fdxdy) में लिख दिया जायेगा तथा उदग्र जोड़ अंतिम पंक्ति में लिखा जाएगा। इस प्रकार सभी कोष्ठ–आवृत्तियों के fdxdy का जोड़ अन्तिम खाने (तथा अंतिम पंक्ति) में लिखकर इन जोड़ों का कुल योग निकाल लिया जायेगा। यही $\sum fdxdy$ होगा। स्पष्ट है कि कोष्ठ fdxdy का उदग्र जो़ (नीचे की ओर) और क्षैतिज जोड़ एक ही होगा।

छ. अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जायेगा–

$$r = \frac{N \, X \sum dxdy - \sum fdx \, X \sum fdy}{\sqrt{[N \, X \sum fd_x^2 - (\sum fdx)^2]\,[N \, X \sum fd_y^2 - (\sum fdy)^2]}}$$

यद्यपि उपर्युक्त रीति में कल्पित माध्य से पद–विचलन लिये गये हैं तो भी समान गुणांक (Common factor) से dx और dy को गुणा नहीं किया जायेग क्योंकि सूत्र में अंश और हर दोनों में वर्ग–विस्तार के बराबर उपभनिष्ठ गुणांक (ix X iy) से गुणा करने पर अंश व हर का अनुपात पूर्ववत् रहेगा।

उदाहरण (Illustration) :

निम्न सारणी से कार्ल–पियर्सन का सह–संबंध गुणांक निकालिए–

Y \ X	18	19	20	21	22	योग
0—5				3	1	4
5—10				3	2	5
10—15			7	10		17
15—20		5	4			9
20—25	3	2				5
योग	3	7	11	16	3	40

हल (Solution) :

X श्रेणी के मूल्यों का अन्तर बराबर है। Y श्रेणी के वर्गान्तरों का विस्तार की समान है। अतः पद–विचलन लिए जायेंगे। निमन सारणी द्वारा $\sum fdxdy, \sum fdy$ तथा $\sum fd_y^2$ की गणना की जाएगी।

Y	मध्य बिन्दु	X					योग	dy	fdy	fd_y^2	fdxdy
		18	19	20	21	22	fy				
0-5	2.5				-2 3 -6	-4 -1	4	-2	-8	16	-10
5-10	7.5				-1 3 -3	-2 2 -4	5	-1	-5	5	-7
10-15	12.5			0 7 0	0 10 0		17	0	0	0	0
15-20	22.5			0 4 0			9	+1	+9	9	-5
20-25	17.5	-4 3 -12	- 2 2 - 4				5	+2	+10	20	-16
योग	fx	3	7	11	16	3	40=N	.	+6	50	-38
	dx	-2	-1	0	+1	+2					
	fdx	-6	-7	0	+16	+6	+9	$\sum fdy$			
	fd_x^2	12	7	0	16	12	47	$\sum fd_x^2$			
	fdxdy	-12	-9	0	-9	-8	-38	$\sum fdxdy$ *			

fdxdy * व्यवहार में इस पंक्ति की आवश्यकता नहीं है। $\sum dxdy$ का मान, नए चौथे खाने की पूर्ति द्वारा ही ज्ञात किया जा सकता है। परन्तु चौथी पंक्ति द्वारा उसकी पुष्टि हो जाती है।

$$r = \frac{\sum fdxdy - \frac{\sum fdx - \sum fdy}{N}}{\sqrt{\left[\sum fd_x^2 - \left(\frac{\sum fd_x^2}{N}\right)^2\right]\left[\sum fd_y^2 - \left(\frac{\sum fdy}{N}\right)^2\right]}}$$

$$r = \frac{-38 - \frac{9x6}{40}}{\sqrt{\left[47 - \frac{(9)^2}{40}\right]\left[50 - \frac{(6)^2}{40}\right]}}$$

$$= \frac{-38 - 1.35}{\sqrt{(47-2.025)\ (50-0.9)}}$$

$$= \frac{-38.35}{\sqrt{44.975X4\ \ .1}} \quad = \frac{39.35}{46.99} = -0.8 \text{ या } -0.84$$

अतः X और Y में अधिक मात्रा ऋणात्मक सह–संबंध चतुर्थ सूत्र द्वारा तथा लघुगुणांक की सहायता से सह–सम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है–

$$r = \frac{N\,X \sum fdxdy \quad \sum fdx\ X\ \sum fdy}{\sqrt{\left[Nx\sum fd_x^2 - (\sum fdx)^2\right]\left[Nx\sum fd_y^2 - (\sum fdy)^2\right]}}$$

$$r = \frac{40\ X\ -38\ -\ (9X6)}{\sqrt{[40x47\ \ (9)^2]\ [40X50\ (6)^2]}}$$

$$= \frac{-1520 - 54}{\sqrt{(1880-81)\ (2000-36)}} \quad = \quad \frac{-1574}{\sqrt{1799X1964}} = \quad -0.84$$

$-$ 39.35

पिर्यसन के सह–संबंध गुणांक की मान्यताएँ : निम्नलिखित तीन मान्यताओं पर आधारित है कार्ल पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक–

क. **प्रसामान्यता (Normality)** : सह–सम्बन्धित समंक श्रेणियों पर अनेक कारणों का प्रभाव पड़ता है जिससे उनमें प्रसामान्यता आ जाती है।

ख. **कार्य–कारण सम्बन्ध** : सह–सम्बन्धित को प्रभावित करने वाले स्वतन्त्र कारणों में परस्पर कारण और परिणाम का संबंध होता है। कार्य–कारण सम्बन्ध के अभाव में सह–सम्बन्ध निरर्थक होता है।

ग. **रेखीय प्रकृति (Linear Nature)** : यह भी परिकल्पना की जाती है कि दोनों समंकमालाओं में रेखीय संबंध है अर्थात् यदि दोनों पद–युग्मों को बिन्दु–रेखीय पत्र पर प्रांकित किया जाये तो बिन्दुचित्र पर एक सरल रेखा खीचीं जा सकती है।

पियर्सन के सह–संबंध गुणांक की परिसीमाएँ : चर–मूल्यों में अन्तर्सम्बन्ध ज्ञात करने की गणितीय रीतियों में कार्ल–पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक एक आदर्श एवं लोकप्रिय गुणांक है जिससे न केवल सम्बन्ध की मात्रा निर्धारित होती है, वरन् यह भी पता चलता है कि सह–सम्बन्ध की दिशा क्या है– वह धनात्मक या अनुलोम है अथवा ऋणात्मक या विलोम है। परन्तु पियर्सन के सह–सम्बन्ध गुणांक की निम्न प्रमुख परिसीमाएँ हैं–

(क). **जटिल परिगणन प्रक्रिया** : यह सम्बन्ध ज्ञात करने की अन्य रीतियों की तुलना में कार्ल पियर्सन विधि अत्यन्त जटिल और दीर्घ सूत्री है।

(ख). **चरम पद–मूल्यों द्वारा प्रभावित** : पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक चरम पद–मूल्यों द्वारा अत्याधिक रूप से प्रभावित होता है।

(ग). **दोषपूर्ण निर्वचन की संभावना** : सह–संबंध गुणांक के दोषपूर्ण या अशुद्ध निर्वचन की बहुत सम्भावना रहती है। अतः इसका विश्लेषण और निर्वचन करते समय यथेष्ट सावधानी बरतनी चाहिए।

(घ). **रैखिक सम्बन्ध की मान्यता अधिकतर अवास्तविक** : कार्ल पियर्सन का सरल सह–सम्बन्ध गुणांक इस मान्यता पर आधारित है कि चर–मूल्यों से रैखिक सम्बन्ध है जबकि व्यवहार में यह मान्यता सदा सत्य नहीं होती।

पियर्सन के सह–सम्बन्ध गुणांक की महत्वपूर्ण विशेषताएँ : सह–सम्बन्ध गुणांक के निम्नलिखित महत्वपूर्ण गुण है–

1– सह–सम्बन्ध गुणांक का मान–1 और +1 के बीच रहता है। किसी भी स्थिति में यह एक से अधिक नहीं हो सकता–

2– सह–सम्बन्ध गुणांक एक विमाहीन गुणांक होता है। अर्थात् वह एक ऐसा निरपेक्ष अंक (Pure Number) है जो मूल बिन्दु और तुलना मापदण्ड में परिवर्तन से प्रभावित नहीं होता।

3– प्रतीपगमन–गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है–

अर्थात् $r = \sqrt{bxy \text{ X } byx}$

जहाँ bxy और byx X के Y पर और Y के X पर सरल प्रतीपगन गुणांक को व्यक्त करते है। 'सरल प्रतीपगमन विश्लेषण' नामक अध्याय में इन गुणांकों का विस्तृत विवेचन किया गया है।

सम्भाव्य विभ्रम (Probable Error) :

कार्ल–पियर्सन के सह–सम्बन्ध गुणांक की विश्वसनीयता की जाँच करने के लिए सम्भाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है। सम्भाष्य विभ्रम, विभ्रम की वह मात्रा है जिसे यदि किसी विशिष्ट सांख्यिकीय माप (जैसे सह–संबंध गुणांक) में जोड़ दिया जाये और घटा दिया जाये तो वे दो सीमाएँ ज्ञात हो जाती है जिनके अन्तर्गत अन्य दैव प्रतिदर्शों (Random Samples) के कथित सांख्यिकीय माप के पाये जाने की 50% सम्भावना होती है। सह–सम्बन्ध गुणांक के सम्भाव्य विभ्रम से भी इस प्रकार की दो सम्भावना–सीमाएँ ज्ञात हो जाती हैं।

होरेस सिक्राइस्ट के अनुसार, ''कार्ल पियर्सन के सह–संबंध गुणांक का सम्भाष्य विभ्रम वह राशि है जिसे यदि सह–सम्बन्ध गुणांक में जोड़ दिया जाये और घटा दिया जाये तो ऐसी संख्याएँ ज्ञात हो जाती हैं जिनके अन्तर्गत दैव प्रतिचयन के आधार पर छाँटे गये मूल्यों के सह–सम्बन्ध गुणांक के पाये जाने की समान संभावना होती है।''

गणना : सह–सम्बन्ध गुणांक का सम्भाष्य विभ्रम ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

जहाँ $$P.E \text{ or } r = 0.6745 \text{ X } \frac{1 - r^2}{\sqrt{N}}$$

गणना क्रिया को सरल बनाने के लिए 0.6745 के स्थान पर 2/3 का प्रयोग किया जा सकता है, परिणाम में कोई विशिष्ट अन्तर नहीं होगा।

सम्भाव्य विभ्रम का कार्य : सम्भाष्य विभ्रम के मुख्यतः दो कार्य हैं–

(क). **सीमा निर्धारण (Determination of Limits)** : सह–सम्बन्ध गुणांक का सम्भाष्य विभ्रम वे दो सीमाएँ ($r \pm P.E$) निर्धारित करता है। जिनके अन्तर्गत अन्य दैव प्रतिदर्शों के आधार पर निकाले गए या पूरे समग्र पर आधारित सह–सम्बन्ध गुणांक के पाये जाने की 50% सम्भावना होती है।

(ख). **सह–सम्बन्ध–गुणांक का निर्वचन** : सम्भाष्य विभ्रम का दूसरा कार्य यह है कि उसके रूप में कार्ल–पियर्सन के सह–संबंध गुणांक का निम्न नियमों के अनुसार निर्वचन किया जाता है–

1. यदि सह–सम्बन्ध गुणांक विभ्रम के छः गुने से अधिक है ($r > 6\,p.e$) तो दोनों श्रेणियों में सह–सम्बन्ध अर्थपर्णू अथवा सार्थक (Significant) होता है। दूसरे शब्दों में r से 6 p.e से अधिक होने पर यह कहा जा सकता है कि दोनों सम्बद्ध मालाओं में सह–सम्बन्ध निश्चित रूप से विद्यमान है। यह सम्बन्ध गुणांक सम्भाष्य विभ्रम के छः गुने से जितना अधिक होगा यह–सम्बन्ध उतना ही अधिक अर्थपूर्ण माना जायेगा। यदि सह–संबंध–गुणांक विभ्रम के छः गुने से अधिक नहीं है ($r > 6\,p.e$) तो सह–संबंध अर्थपूर्ण नहीं (Not significant) होता है।

2. यदि सह–सम्बन्ध गुणांक सम्भाव्य विभ्रम से कम है ($r < p.e$) तो यह सिद्ध हो जाता है कि दोनों श्रेणियों में सह–सम्बन्ध की उपस्थिति का कोई प्रमाण नही है।

3. यदि सह–संबंध गुणांक 0.3 से कम है और उसका सम्भाव्य विभ्रम अपेक्षाकृत कम है तो सह–संबंध की मात्रा नगण्य समझनी चाहिए।

4. यदि सह–सम्बन्ध गुणांक 0.5 से अधिक है और सम्भाव्य विभ्रम बहुत कम है तो सह–संबंध का अस्तित्व लगभग निश्चित है। उपुर्यक्त नियमों के अनुसार ही सह–संबंध गुणांक और सम्भाव्य विभ्रम की तुलना करके यह निष्कर्ष निकालना चाहिए कि सह–संबंध अथपूर्ण है अथवा सम्भाव्य विभ्रम नहीं।

सम्भाव्य विभ्रम की सीमाएँ :

केवल निम्न परिस्थितियों में ही सम्भाष्य विभ्रम का प्रयोग उचित होता है–

क. जब पद–युग्मों की संख्या (N) अधिक हो,

ख. सह–सम्बन्ध गुणांक यादृच्छिक प्रतिचयन प्रणाली के आधार पर चुने हुए मूल्यों से ज्ञात किया गया हो, तथा

ग. श्रेणी सममित अर्थात प्रसामान्य (Normal) हो अर्थात्, उसके वक्र का स्वरूप घण्टाकार हो।

प्रमाप विभ्रम (Standerd Error) : आधुनिक सांख्यिकी में सम्भाष्य विभ्रम के स्थान पर प्रमाप विभ्रम का प्रयोग अधिक श्रेयस्कर समझा जाता है। प्रमाप विभ्रम, सम्भाव्य विभ्रम का लगभग $\frac{3}{2}$ होता है।

सूत्रानुसार –

$$= \text{S.E. of } r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \quad \text{या P.E of } r = 0.6745 \times \text{S.E}$$

उदाहरण (**Illustration**) :

(क). यदि $r = 0.6$ और $N = 16$ तो सह–संबंध गुणांक की अर्थपूर्णता की जाँच कीजिए–

(ख). यह सिद्ध कीजिए कि r अर्थपूर्ण हो यदि N=16, P.E=0.085; 0.6745 $\frac{2}{3}$ 16

(ग). परिकलन द्वारा यह दर्शाइए कि निम्न में से किस स्थिति में सह–संबंध अधिक अर्थपूर्ण है–

I	II
r = 0.8; P.E.=0.40;	r = 0.5; P.E. = 0.02

हल (**Solution**) :

(क). $r = 0.6; N = 16$; $P.E=0.6745 \text{ x } \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$

$= 0.6745 \text{ X } \frac{1-(6)^2}{\sqrt{-1}}$

$= 0.6745 \text{ X } \frac{0.64}{4} =$ या 0.6745 X 0.16 या 0.108

यहाँ पर r 0.6 है जो कि 6 X 0.108 अर्थात् 0.648 से कम हैं।

अतः सह–संबंध अर्थपूण (Not Significant) नही हैं।

(ख). पहले P.E और N की सहायता से r ज्ञात किया जायेगा–

$P.E. = 0.6745 \text{ X x } \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ या $0.085 = \frac{2}{3} \text{ X } \frac{1-r^2}{\sqrt{16}}$

$0.085 = \frac{2-2r^2}{\sqrt{12}}$ या $1.020 = 2 - 2r^2$

$2r^2 = 2 -1.025 = 0.98; r^2 = 0.49$

$\therefore r = \sqrt{0.49} = 0.7$

6 X P.E = 6x0.085 = 0.510

r, 0.7 है जो कि 6 P.E अर्थात् 0.51 से अधिक है। अतः इससे यह सिद्ध होता है कि सह–संबंध अर्थपूर्ण है।

(ग). जिस स्थिति में r, P.E का अधिक गुना होगा उसी स्थिति में वह अधिक अर्थपूर्ण माना जायेगा।

r और P.E की तुलना निम्न प्रकार की जायेगी–

I	II
r = 0.8 , P.E. =0.04	r = 0.5 , P.E. =0.02

$\frac{r}{P.E} = \frac{0.8}{0.04} = 20$ $\frac{r}{P.E} = \frac{0.5}{0.02} = 25$

r_1 P.E का 20 गुना है। r_1P.E का 25 गुना है।

अतः दूसरी स्थिति में r अधिक अर्थपूर्ण है।

ग. स्पियरमैन की कोटि–अन्तर रीति (**Spearman's Rank Difference Method**) :

ब्रिंटिश मनोवैज्ञानिक चार्ल्स एडवर्ड स्पियरमैन ने सन् 1904 में व्यक्तिगत समंकमालाओं में सह–संबंध ज्ञात करने के लिए एक सरल रीति का प्रतिपादन किया। इन्हीं के नाम पर इस रीति को स्वियरमैन की कोटि–अन्तर या क्रमान्तर रीति कहा गया।

यह रीति ऐसी परिस्थितियों के लिए उपयुक्त है जहाँ तथ्यों का प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप सम्भव न हो तथा उन्हें केवल एक निश्चित कोटि–क्रम (Rank) के अनुसार रखा जा सकें। जैसे–बुद्धिमता, सुन्दरता, स्वास्थ्य आदि गुणात्मक तथ्यों को प्रथम रूप में अंकों में नही मापा जा सकता परन्तु विभिन्न इकाइयों को गुण की कोटि के आधार पर पहला, दूसरा तथा तीसरा इत्यादि कोटि–क्रम (Rank) प्रदान किया जा सकता है। इस क्रमों के आधार पर ही क्रमान्तर या कोटि अन्तर विधि द्वारा सह–संबंध गुणांक निकाला जाता है। यदि समंक माला के पद–मूल्य ज्ञात न हों, केवल उनका कोटि–क्रम मालूम हो तो भी क्रमान्तर सह–संबंध गुणांक निकाला जा सकता है।

निम्नलिखित प्रक्रिया का अनुकरण करके कोटि–अंतर सह–संबंध गुणांक निकाला जा सकता है–

(क). X तथा Y के पद–मूल्यों को अलग–अलग कोटि क्रम (Rank) प्रदान किये जाते है। सबसे अधिक आकार वाले मूल्य को 1, उससे कम आकार वाले को 2 और इसी प्रकार कोटि क्रम निश्चित किये जाते है।

(ख). X के क्रमों से Y के तत्सम्बन्धी क्रम घटाकर कोटि अंतर (Rank differences) निकाले जायेगें–

$$D = X-Y$$

जहाँ (D= कोटि क्रम X कोटिक्रम Y) क्रमान्तरों का बीजगणितीय जोड़ सदैव शून्य होगा ($\sum D = 0$)

(ग). क्रमांतरो के वर्ग करके उन वर्गों का जोड़ निकाला जायेगा अर्थात् $(\sum D)^2$।

(घ). अन्त में, निम्न सूत्र द्वारा कोटि सह–संबंध गुणांक ज्ञात किया जायेगा–

$$p = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

जहाँ P ग्रीक संकेताक्षर rho कोटि सह–संबंध गुणांक के लिए प्रयुक्त हुआ है।

नोटः काल पिर्यसन के सह–संबंध गुणांक (r) की भाँति कोटि अंतर सह–संबंध गुणांक की अधिकतम सीमा भी 1 होती है।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्न समंकों के क्रमांतर रीति द्वारा सह–संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X श्रेणी	85	91	56	72	95	76	89	51	59	90

Y श्रेणी	18.3	20.8	16.9	15.7	19.2	18.1	17.5	14.9	18.9	15.4

हल (**Solution**) :

श्रेणी X		श्रेणी Y		कोटि D	कोटि अंतरों के वर्ग
X	कोटि	Y	कोटि		D^2
85	5	18.3	4	+1	1
91	2	20.8	1	+1	1
56	9	16.9	7	+2	4
72	7	15.7	8	−1	1
95	1	19.2	2	−1	1
76	6	18.1	5	+1	4
89	4	17.5	6	−2	0
51	10	14.9	10	0	25
59	8	18.9	3	+5	36
90	3	15.4	9	−6	36
N=10				$\sum D$	$\sum d^2$

$$p = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6x74}{10\,(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{444}{990} = \frac{990-444}{990} = \frac{546}{990}$$

$$= +0.55$$

अतः X और Y में मध्यम यात्रा का धनात्मक कोटि सह संबंध है।

समान क्रम के लिए संशोधन (Correction for Tied Ranks) :

यदि किसी श्रेणी में दो या अधिक पद–मूल्य बराबर आकार के हों तो उनके अलग–अलग क्रमों की औसत ही उन मूल्यों के क्रम के स्थान पर लिखी जाती है। जैसे X श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य यदि 60 हो तो उसका क्रम 1 होगा, इसके बाद यदि 55 उस श्रेणी में दो बार आया हो तो दोनों स्थानों पर $\frac{2+3}{2}$ अर्थात् 2.5 क्रम लिख दिया जायेगा तथा इसके बाद वाले मूल्य का क्रम 4 होगा इसी प्रकार यदि Y श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य को 1 उससे कम को 2 क्रम देने के बाद तीन मूल्य समान हों तो उनको $\frac{3+4+5}{3} = 4$ कोटि क्रम प्रदान किया जायेगा 1 अगले मूल्य को क्रम दिया जायेगा। इस प्रकार दो या दो से अधिक मूल्य बराबर आकार के होते हैं तो उन्हें बराबर क्रम प्रदान किये जाते हैं। ऐसी स्थिति में कोटि सह–संबंध गुणांक निकालने के लिए निम्नलिखित संशोधित सूत्र का प्रयोग करना पड़ता है–

$$P = 1 - \frac{6\left[6\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3-m)\right]}{N\,(N^2-1)}$$

जहाँ– m उन पद मूल्यों की संख्या है जिनके कोटि क्रय समान हैं।

नोट : M का प्रयोग अलग–अलग समान क्रमों की संख्याओं के लिए किया जायेगा तथा संशोधन कारक उतनी बार प्रयोग किया जायेगा जितनी बार समान क्रम प्रदान किये गये हैं।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्न सारणी से कोटि–सह–संबंध ज्ञात कीजिए–

X :	115	109	112	87	98	98	120	100	98	118
Y :	75	73	85	70	76	65	82	73	68	80

हल (**Solution**) :

X		Y			कोटि अंतरों का वर्ग
X	कोटि	Y	कोटि	कोटि अंतर D	D^2
115	3	75	5	−2	4
109	5	73	6.5	−1.5	2.25
112	4	85	1	+3	9
87	10	70	8	+2	4
98	8	76	4	+4	16
98	8	65	10	−2	4
120	1	82	2	−1	1
100	6	73	6.5	−0.5	0.25
98	8	68	9	−1	1
110	2	80	3	−1	−1
N=10				$\sum D = 0$	ED=0 $\sum D^2$

श्रेणी X में 98 तीन बार आया है तथा तीन समान क्रयों के लिए सूत्र में $\frac{1}{2}\ (3^3 - 3), \sum D^2$ जोड़ना होगा। इसी प्रकार श्रेणी Y में 73 दो बार आया है। अतः दोनों समान क्रयों के लिए $\frac{1}{12}\ (2^3 - 2),$ के बराबर संख्या $\sum D^2$ में जोड़नी पड़ेगी।

सूत्रानुसार–

$$P = \quad 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m) - 12(m^2 - m)\right]}{N\ (N^2 - 1)}$$

$$= \quad 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(2^2 - 2)\right]}{10\ (10^2 - 1)}$$

$$= \quad 1 - \frac{6\ (42.5 + 2 + 0.5)}{990} \qquad = 1 - \frac{6X45}{990}$$

$$= \quad 1 - \frac{270}{990} = \frac{990 - 270}{990} = \frac{720}{990} = +\,0.73$$

अतः X और Y से सामान्य रूप से अधिक मात्रा का धनात्मक कोटि सह–संबंध है।

विशेषताएँ :

1. व्यक्तिगत समंक मालाओं का सह–संबंध निकालने की सबसे सरल रीति है। मध्यम यात्रा का धनात्मक कोटि सह संबंध है।
2. गुणात्मक तथ्यों और अनियमित श्रेणियों में इस रीति का प्रयोग प्रयुक्त होता है।
3. इस रीति द्वारा निकाला गया सह–संबंध गुणांक कार्ल–पियर्सन के सह–संबंध गुणांक के लगभग बराबर होता है।

दोष :

1. इसमें पद–मूल्यों के निरपेक्ष मान का उतना महत्व नही है। जितना उनके सापेक्ष या तुलनात्मक मानों का है।
2. पद–मूल्यों के समान होने पर गणन क्रिया कुछ कठिन हो जाती है।

घ. संगामी विचलन रीति :

जब यह देखा जाता है कि दो चर एक ही दिशा में गतिमान है या विपरीत दिशा में, तब वहाँ पर संगामी या सहगामी विचलन रीति का प्रयोग किया जाता है। अतः जब दो सम्बद्ध चर X और Y एक ही दिशा में साथ–साथ गमन करते तो उनमें धनात्मक सह–संबंध होता है। यदि वे विपरीत दिशा में गमन करते हैं या प्रतिगामी होते हैं तो उनमें ऋणात्मक सह–संबंध पाया जाता है।

इस रीति में मूल्य की उससे पिछले मूल्य से तुलना की जाती है। अतः इससे अल्पकालीन उच्चवाचनों में सह–संबंध ज्ञात हो जाता है। परन्तु विचलनों की दिशा (+या–) को ही ध्यान में रखा जाता है, उनके आकार की गणना नही की जाती।

सह–संबंध निकालने के लिए निम्न प्रक्रिया का पालन करना पड़ता है–

क. X और Y श्रेणी में अलग–अलग प्रत्येक मूल्य की तुलना उससे पिछले मूल्य से की जायेगी। यदि मूल्य पिछले मूल्य से अधिक है तो उसका विचलन (+) होगा यदि कम है तो (–) और यदि समान है तो (= या 0)। यह ध्यान रखना चाहिए कि विचलन का केवल चिन्ह ही लिखा जायेगा उसकी मात्रा नहीं। विचलन–युग्मों की संख्या कुल पद–मूल्यों की संख्या से एक कम होगी। (n=N-1) क्योंकि पहले पद का विचलन नहीं होता।

ख. X और Y के तत्सम्वादी विचलन–चिन्हों का गुणा करके धनात्मक गुणनफलों को गिन लिया जायेगा। यह संगामी विचलनों की संख्या (Number of concurrent Deviation or c) है।

ग. निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा–

$$rc = \pm \sqrt{\pm \left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

rc = संगामी विचलन गुणांक के लिए प्रयुक्त हुआ हैं।

c = संगामी–विचलनों की केवल धनात्मक संख्या हैं।

n = विचलन–युग्मों की संख्या है जो पद–युग्मों की संख्या से 1 कम है। (n= N-1)

सूत्र में + – का प्रयोग :– सूत्र में वर्गमूल चिन्ह से पहले और उसके अन्दर दोनों स्थानों पर या तो + का चिन्ह प्रयोग किया जायेगा या दोनों स्थानों पर – का चिन्ह लिखा जाएगा। यदि (2c-n) धनात्मक है तो दोनों स्थानों पर + का चिन्ह प्रयुक्त होगा। 2c-n के ऋणात्मक होने पर दोनों स्थानों में (–) का प्रयोग ही अनिवार्य हो जाता है। यदि ऐसा न किया जाये तो वर्गमूल चिन्ह के अन्दर की राशि ऋणात्मक ही रहे और उसका वर्गमूल निकालना असम्भव हो।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्न सारणी से कोटि–सह–संबंध ज्ञात कीजिए–

X :	89	85	98	102	100	105	96	68	85	98	76	75
Y :	32	33	35	37	39	41	40	38	42	40	36	35

हल (**Solution**) :

श्रेणी X		श्रेणी Y		विचलनों की गुणा	
X	विचलन चिन्ह	Y	विचलन चिन्ह	+	–
89		32			
85	–	33	+	1	–
98	+	35	+	+	–
102	+	37	+		–
100	–	39	+	+	–
105	+	41	+	+	–
96	–	40	–	+	–
68	–	38	–	+	–
85	+	42	+	+	–
98	+	40	–		–
76	–	36	–	+	–
75	–	35	–	+	–
	n=11			C=8	

$$rc = +\sqrt{+\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

$$rc = +\sqrt{\frac{2x8-11}{11}} = \sqrt{\left(\frac{5}{11}\right)} = \sqrt{0.4545}$$

$$= +\ 0.6742$$

अतः X औ Y में मध्यम मात्रा का धनात्मक सह–संबंध है।

गुण दोष : संगामी विचलन रीति, सह–सम्बन्ध ज्ञात करने की सरलतम रीति है और अल्पकालीन उच्चावचनों में सह–सम्बन्ध का अध्ययन करने के लिए उपयुक्त है। इससे सह–सम्बन्ध की दिशा का ही पता चलता है, उसकी मात्रा का अध्ययन नही होता। दीर्घ कालीन प्रवृत्ति में सम्बन्ध निकालने के लिए यह रीति–सर्वथा अनुपयुक्त है। इन दोषों के कारण इस रीति का अधिक प्रयोग नहीं किया जाता है।

ड़. न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सह–सम्बन्ध :

यह रीति न्यूनतम वर्ग–विधि के अनुसार खींची गई सर्वोत्कृष्ट रेखा (Line of the best fit) पर आधारित है। वस्तुतः न्यूनतम वर्ग रेखा, प्रसामान्य समीकरणों (Normal equations) की सहायता से खींची जाने वाली एक सर्वोपयुक्त आंकलन रेखा (Estimating line of the best fit) है जिसके दो अभिलक्षण होते है–

क. अवलोकित मूल्यों (y) और उक्त रेखा से संगणित तत्संवादी मूल्यों (Yc) के विचलनों का योग शून्य होता है। E(Y-Yc) = 0;

ख. इस रेखा से संगणित मूल्यों के अवलोकित मूल्यों से विचलनों के वर्गों का जोड़ अन्य किसी रेखा से निकालने गए ऐसे विचलन वर्गों के जोड़ की तुलना में न्यून्तम होता है। यही कारण हैं कि इसे न्यूनतम (Line of the best fit draw under the cast Least squares assumption) कहते है। $\sum (Y-Yc)^2$ = न्यूनतम।

उदाहरण **(Illustration)** :

निम्न आँकड़े से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सह–संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X :	2	4	5	6	8	11	36
Y :	18	12	10	8	7	5	60

हल **(Solution)** :

X	Y	X Y	x^2	$\alpha + bx = Yc$
2	18	36	4	18.04+(-1.34X2) = 15.36
4	12	48	16	18.04+(-1.34X4) = 12.68
5	10	50	25	18.04+(-1.34X5) = 11.34
6	10	48	25	18.04+(-1.34X6) = 10.00
6	8	48	36	18.04+(-1.34X6) = 10.00
8	7	56	64	18.04+(-1.34X8) = 7.32
11	5	55	121	18.04+(-1.34X11) = 3.30
$\sum x = 36$	$\sum y = 60$	$\sum xy = 293$	$\sum x^2 = 266$	$\sum yc = 60$

$$s_Y^2 = \frac{\sum (y-yc)^2}{N} = \frac{16.22}{6} = 2.7033$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sum (y-y)^2}{6} = \frac{106}{6} = 17.6667$$

$$r = \sqrt{\left(1-\frac{s_Y^2}{\sigma_Y^2}\right)} = \sqrt{\left(1-\frac{2.7033}{17.6667}\right)} = \sqrt{\left(1-\frac{17.6667-2.7033}{17.6667}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{14.9634}{17.6667}\right)} = \sqrt{0.847} = -0.9203$$

'b' ऋणात्मक (–1.34) है तो r भी ऋणात्मक होगा। X और Y में अत्याधिक मात्रा का ऋणात्मके सह–संबंध है।

10.7 प्रतीगमन का अर्थ और उपयोगिता :

'प्रतीमगमन' (Regression) शब्द का अर्थ 'वापस आना' अर्थात् 'पीछे लौटना' होता है। सर्वप्रथम इस शब्द का प्रयोग 1877 में फ्रांसिस गाल्टन Sir francis Galton ने अपने शोध लेख में 'पैतृक ऊँचाई में मध्यमता की ओर प्रतीपगमन' में Regression towards mechearity in hereditary st atene में किया था। गाल्टन का शोध कए सहस्त्र पिताओं तथा पुत्रों की ऊँचाइयों पर था। शोध से ज्ञात हुआ कि ''लम्बे पिताओं के पुत्र भी लम्बे होते है, तथा छोटे पिताओं के पुत्र भी छोटे होते हैं; परन्तु लम्बे पिताओं के पुत्र की औसत ऊँचाई उनके पिताओं की ऊँचाई की औसत से कम होती है तथा छोटे पिताओं के पुत्रों की औसत ऊँचाई उनके पिताओं की ऊँचाई की औसत से अधिक होती है।'' अतः गाल्टन ने मानव जाति में सामान्य ऊँचाई की ओर लौटने की प्रकृति को प्रतीपगमन की संज्ञा दी है।

सांख्यिकी में 'प्रीपगमन' का प्रयोग अब समस्त क्षेत्रों में किया जताा है, जिनमें दो या अधिक संबंधित चरों में सामान्य माध्य की ओर वापस जाने की प्रवृत्ति पायी जाती है। औसत संबंध के आधार पर पूर्वानुमान करने में प्रतीपगमन तकनीक विशेष उपयोगी है। प्रतीपगमन की सहायता से एक श्रेणी में एक निश्चित मात्रा में, परिवर्तन होने पर दूसरी श्रेणी में होने वाले संभावित औसत परिवर्तन को ज्ञात किया जा सकता है।

आर्थिक व व्यावसायिक जगत में प्रतीपगमन की अव्यधिक व्यावहारिक उपयोगिता है। प्रबन्ध अधिकारियों द्वारा व्यवसाय के नियंत्रण–उपकरण के रूप में प्रतीगमन–विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है। इस प्रविधि के आधार पर उचित व्यावहारिकता की कसौटी पर परखा जा सकता है। व्यवसाय की सफलता के लिए इस प्रकार के अनुमान अनिवार्य होते हैं। परन्तु ये अनुमान तभी यथार्थ होते हैं। जब दोनों श्रेणियों में परस्पर घनिष्ठ सह–संबंध हो। प्रतीपगमन विश्लेषण की सहायता से चर–मूल्यों में सह–सम्बन्ध की मात्रा व दिशा का माप भी किया जा सकता है।

10.8 सह–संबंध और प्रतीपगमन में अंतर :

सह–संबंध और प्रतीपगमन में निम्नलिखित अंतर हैं–

क. **प्रकृति और मात्रा** : सह–संबंध से दो या अधिक चरों में परस्पर औसत सम्बन्ध की मात्रा (Degree) का पता चलता है, जबकि प्रतीपगमन इस संबंध की प्रकृति (Nature) स्पष्ट करता है और यह बतलाता है कि एक स्वतंत्र चर के औसत मूल्य के तत्संवादी दूसरे (आश्रित) चर का सम्भाव्य औसत मूल्य क्या होगा? **वर्नर हर्श के शब्दों** में ''जबकि सह–सम्बन्ध विश्लेषण दो या अधिक घटनाओं के सह–परिवर्तन की घनिष्ठता की जाँच करता है। प्रतीपगमन विश्लेषण इस सम्बन्ध की प्रकृति व मात्रा का माप करके हमें भावी अनुमान की क्षमता प्रदान करता हैं।

ख. **कारण–परिणाम** : सह–संबंध विश्लेषण चरः मूल्यों में कारण–परिणाम सम्बन्ध को अधिक स्प्ष्ट रूप से व्यक्त करता है। दो चरों में अत्यधिक मात्रा का सह–संबंध होने से यह प्रमाणिक रूप से नहीं कहा जा सकता है कि एक कारण है और दूसरा परिणाम परन्तु प्रतीपगमन विश्लेषण में एक चर स्वतंत्र माना जाता

है जिसके लिए मूल्य प्रदत्त होता है और दूसरा आश्रित चर–मूल्य होता है जिसका अनुमान लगाया जाता है।

ग. **स्वतंत्र तथा आश्रित चर** : सह–संबंध विश्लेषण में स्वतंत्र और आश्रित चर का कोई महत्व नहीं है। X और Y के मध्य सह–सम्बन्ध गुणांक rx_y वही होगा जो X और Y के बीच होगा अर्थात् $rx_y = rx_n$ परन्तु प्रतीपगमन विश्लेषण में दो गुणांक होते हैं, एक–bx_y X का y पर; y को स्वतंत्र चर मानते हुए तथा byx Y का x पर; x की byx X स्वतंत्र चर मानते हुए।

ड़. **निरर्थक सम्बन्ध** : X और Y के मध्य कभी–कभी निरर्थक सह–सम्बन्ध हो सकता है परन्तु प्रतीपगमन कभी निरर्थक नहीं होता।

10.9 प्रतीपगमन रेखाएं :

दो संबंधित समंक श्रेणियों में प्रतीपगमन का विश्लेषण अधिकतर बिन्दुरेखीय रीति द्वारा किया जाता है। x तथा y श्रेणी के चर–मूल्य को बिन्दुरेख पर अंकित करने से एक विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र (Scater Diagram or Dot Diagram) बन जाता है। इस चित्र पर अंकित विभिन्न बिन्दुओं के बीच से गुजरती हुई सर्वोपयुक्त रेखाएं (lines of best life) खींची जाती हैं। ये रेखाएं प्रतीपगमन रेखाएं कहलाती है। जब ये रेखाएं सरल (Straight) होती है तो प्रतीपगमन रेखीय (linear) कहलाता है। ये रेखाएं एक श्रेणी के मध्य मूल्यों से संबंधित दूसरी श्रेणी के सर्वोत्तम माध्य मूल्यों (Best mean values) को व्यक्त करती है।

दो रेखाएँ ही क्या? प्रतीपगमन की दो रेखाएं होने को दो कारण है। प्रथम–दो संबंधित श्रेणियों के लिए दो प्रतीपगमन रेखाएँ होती हैं। एक रेखा Y का X पर प्रतीपगमन (Regression of Y on X) प्रकट करती है। दूसरी रेखा Y का Y पर प्रतीपगमन (Regression of X on Y) व्यक्त करती है। अतः दो श्रेणियों के लिए दो प्रतीपगमन रेखाएँ होना आवश्यक है।

दूसरा प्रतीपगमन रेखाएँ वे सर्वोपयुक्त रेखाएँ होती है जिनकी रचना न्यूनतम वर्ग की मान्यता (least squares) के आधार पर की जाती है। न्यूनतम वर्ग रीति के अनुसार खींची जाने वाली रेखा ऐसी होनी चाहिए जिससे विभिन्न बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का जोड़ न्यूनतम है। बिन्दुओं से रेखा तक के विचलनों का माप दो प्रकार से किया जा सकता है– एक क्षैजित रूप से (horizontally) अर्थात् भुजाक्ष के समानान्तर (Parallel to X-axis) तथा दूसरे लम्बवत् (Vaetically) अर्थात् कोटि–अक्ष के समानान्तर (Parallel to Y-axis)। दोनों प्रकार के विचलनों के वर्गों के अलग–अलग जोड़ न्यूनतम करने के लिए दो रेखाओं का होना अनिवार्य है।

प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य : प्रतीपगमन रेखाओं के दो महत्वपूर्ण कार्य होते है–

1. सर्वोपयुक्त अनुमान : स्पष्ट है कि दोनों रेखाओं की सहायता से एक श्रेणी के दिए हुए मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के तत्संवादी सर्वोपयुक्त औसत मूल्य का सांख्यिकीय अनुमान लगाया जा सकता है। X की Y पर प्रतीपगमन रेखा से X का तथा Y की X पर प्रतीपगमन रेखा द्वारा Y का सर्वोत्तम अनुमान लगाया जाता है।

2. सह–संबंध की मात्रा व दिशा का ज्ञान : प्रतीपगमन रेखाओं की सहायता से निम्नलिखित नियमों के आधार पर यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि दोनों श्रेणियों में सह–सम्बन्ध कितना और कैसा है?

क. **धनात्मक** : जब दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ रेखाचित्र पर बाएँ निचले कोने से दाहिने ऊपर के कोने की ओर (ऊर्ध्वगामी) बढ़ती है तो X और Y में धनात्मक सह–सम्बन्ध होता है।

ख. **ऋणात्मक** : इसके विपरीत जब ये रेखाएँ ऊपर से नीचे की ओर (ऊधोगामी) जाती हैं तो सह–सम्बन्ध ऋणात्मक होता है।

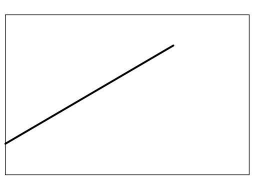
ग. **पूर्ण सह–सम्बन्ध, एक रेखा** : जब विक्षेप चित्र पर प्रांकित एक–दूसरे को पूरी तरह से ढ़क लेती हैं। ऐसी स्थिति में श्रेणियों में पूर्ण सह–सम्बन्ध होता है। दूसरे शब्दों में X और Y में पूर्ण सह–सम्बन्ध होने पर एक ही प्रतीपगमन रेखा बनती है।

घ. **सह–सम्बन्ध का अभाव** : यदि दोनों रेखाएँ एक–दूसरे को समकोंण अर्थात 90^0 के कोण पर करती हो तो X और Y में बिल्कुल सह–सम्बन्ध नहीं पाया जाता है। इस स्थिति में विक्षेत्र–चित्र पर विभिन्न बिन्दु चारो ओर बिखरे होते हैं तथा उनमें कोई सुनिश्चित प्रवृत्ति स्पष्ट नहीं होती।

ड़. **सीमित सह–सम्बन्ध** : दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक–दूसरे के जितने निकट होगीं, X और Y में उतना ही अधिक सह–संबंध होगा। इसके विपरीत ये रेखाएँ एक–दूसरे से जितनी दूर होती जायेगी। सह–सम्बन्ध की यात्रा उतनी ही कम होती जाएगी। ये रेखाएँ दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य के संयोग से प्रांकित बिन्दु पर एक दूसरे को काटती है। अतः इनके सर्वनिष्ठ बिन्दु (Point of Intersection) से दोनों अक्षों पर डाले जाने वाले लम्ब (Perpendicular) X तथा Y के समान्तर माध्य मूल्यों को व्यक्त करते हैं।

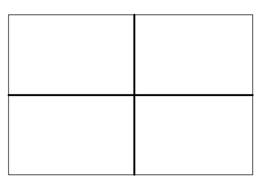
निम्न चित्र से प्रतीपगमन रेखाओं से सम्बन्धित उपर्युक्त नियम स्पष्ट हो जाते हैं।

r=+1



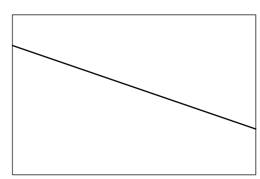
पूर्ण धनात्मक

r=20

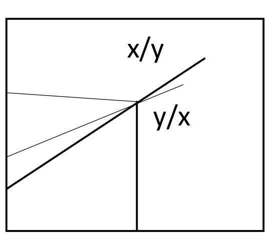


सह–संबंध की अनुपस्थिति

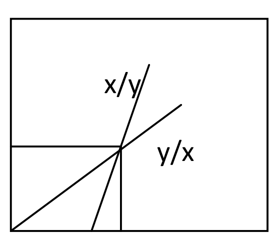
r =- 1



पूर्ण ऋणात्मक



अधिक मात्रा



कम मात्रा

10.10 प्रतीपगमन विश्लेषण की विधियाँ :

प्रतीपगमन विश्लेषण की सहज विधियाँ निम्नलिखित हैं–

1– प्रतीपगमन समीकरण द्वारा गणना।

2– प्रतीपगमन गुणांक के आधार पर गणना–यह दो प्रकार से की जा सकती है।

क. जब सह–संबंध ज्ञात हों।

ख. जब सह–संबंध ज्ञात न हो तब (अ). प्रत्यक्ष रीति द्वारा व (ब). लघु रीति द्वारा।

3– न्यूनतम वर्ग रीति के आधार पर गणना।

1. **प्रतीपगमन समीकरण द्वारा गणना** : प्रतीपगमन समीकरण प्रतीपगमन रेखाओं के व्यक्त करते हैं। प्रतीपगमन रेखाएं दो होती है, अतः प्रतीपगमन समीकरण भी दो होते हैं। X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण Y में दिये गये मूल्यों के लिए X के मूल्यों का अनुमान करने के लिए किया जाता है। इसी प्रकार Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण X में दिये गए परिवर्तनों के लिए Y के मूल्यों के परिवर्तन को बताता है तथा इसका उपयोग X के दिये गये मूल्यों के लिए Y के मूल्यों का अनुमान करने के लिए किया जाता है। ये समीकरण इस प्रकार है–

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression equation of X or Y)

$$X = a+by$$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression equation of Y or π)

$$Y = a+bx$$

उक्त समीकरण में X तथा Y चर मूल्य हैं तथा 'a' और 'b' अचर (Constant) है। अचर 'a' अन्तः खण्ड (Intercept) होता है, अर्थात् यह वह बिन्दु होता है जहाँ प्रतीपगमन रेखा कोटि अक्ष (Y-axis) को स्पर्श करती है। अन्य शब्दों में मूल बिन्दु (Point of oregion) से प्रतीपगमन रेखा द्वारा कोटि अक्ष को स्पर्श करने वाले बिन्दु की दूरी होती है। 'a' धनात्मक होने पर प्रतीपगमन रेखा मूल बिन्दु से उपर तथा ऋणात्मक होने पर मूल बिन्दू से नीचे कोटि अक्ष को स्पर्श करती है।

$X = a + by$, अतः $a = \bar{x} - b\bar{y}$

$y = a + bx$, अतः $a = \bar{y} - b\bar{x}$

(यहाँ पर $\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$, x तथा y श्रेणियों के माध्य–मूल्यों का प्रतिनिधित्व करते हैं।)

अचर 'b' प्रतीपगमन रेखा का छल (Slope of the regrison line) प्रदर्शित करता है। अचर 'b' रेखा उसकी क्षैतिज रेखा के स्पर्श से बने कोण का मूल्य होता है। अन्य शब्दों में 'b' ढ़लान (Gradient or slope) है, अर्थात् भुजाक्ष (x-axis) पर किसी दूरी का माप। यह माप निम्नलिखित प्रकार से गणना किया जाता है :–

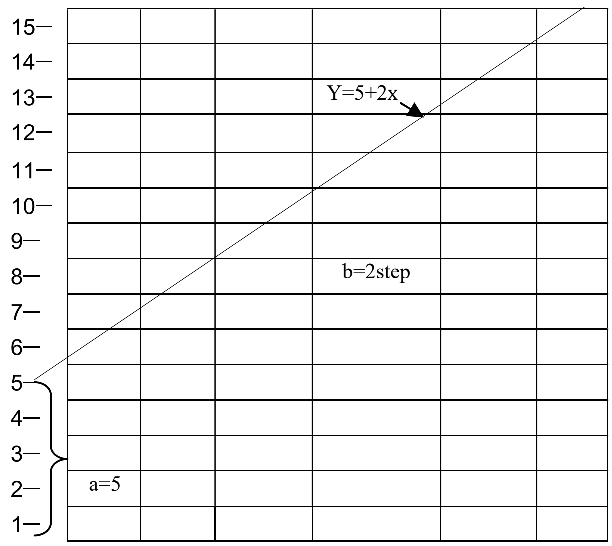
$$b = \frac{\text{कोटि अक्ष के मूल्य में परिवर्तन}}{\text{भुजाक्ष पर दूरी}}$$

निम्न प्रदर्शित बिन्दु रेखा चित्र में Y= a+bx (y=5+2x) समीकरण से वक्र में 'a' तथा 'b' की स्थिति स्पष्ट की गयी है।

$$\sum x = Na + b\sum y$$

$$\sum xy = a\sum y + b\sum y^2$$

Y =	5+2X
X	Y
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15



अचर 'b' को प्रतीपगमन गुणांक भी कहते हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि 'x' में इकाई का परिवर्तन होने पर 'y' में कितना परिवर्तन होगा। यदि 'b' का मूल्य धनात्मक होता है तो प्रतीपगमन रेखा ढ़लान बायँ से दायें की ओर होगा। 'b' का मूल ऋणात्मक होने पर रेखा नीचे की ओर होगी।

यह स्पष्ट है कि किसी भी विशेष रेखा का निर्धारित 'a' तथा 'b' के मूल्यों से होता है, तथा सर्वोचित न्यूनतम वर्गों वाली रेखा उसी दशा में प्राप्त की जा सकती है जबकि 'a' तथा 'b' का सही मान ज्ञात किया जा सकें 'a' तथा 'b' के मूल्य, जिससे विचलनों से वर्गों का योग न्यून्तम हो सके, निम्नलिखित दो समीकरणों को हल करके निकाल जाता है–

प्रथम समीकरण (x= a+by) में $a = \bar{x} - b\bar{y}$

द्वितीय समीकरण (y= a+bx) में $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$\bar{X} - \bar{Y}$ तथा समान्तर माध्यों के लिए प्रयुक्त किये गये हैं।

विजगणितीय दृष्टि में b के मूल्य को सह–सम्बन्ध गुणांक, प्रमाप–विचलन व समान्तर माध्यों के रूप में इस प्रकार प्रकट किया जा सकता है–

प्रथम समीकरण में $b_{xy} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}$

द्वितीय समीकरण में $b_{yx} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$

σx व σ_y क्रमशः x व y श्रेणियों के प्रमाप विचलन है तथा r दोनों श्रेणियों का सम्बन्ध गुणांक है। इस विशेषण के आधार पर प्रतीपगमन रेखाओं को निम्न रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है–

क.	**X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण**	ख.	**Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण**
	a =a+by		Y= a+bx
	$x-\bar{x} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}(x-\bar{y})$		$y-\bar{y} - r\frac{\sigma y}{\sigma x}(x-\bar{x})$

नोट :–

1. यदि x का संभावित मूल्य ज्ञात करना हो तो X का Y पर अर्थात (क) समीकरण का प्रयोग करेगें और यदि Y का अनुमानित मूल्य ज्ञात करना हो तो Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण अर्थात् (ख) का प्रयोग करेगें।

2. इन समीकरणों का प्रयोग तभी करना चाहिए जब प्रश्न में $\bar{X}$ और $\bar{Y}$ तथा Y, 6_σ और σ_y तथा r का मान दिये हों।

उदाहरण (Illustration) :

निम्नलिखित सूचनाएँ प्राप्त है–

	कीमत रूपये	माँगी गई मात्रा(000 ईकाइयाँ)
समान्तर माध्य	10	35
प्रमाप विचलन	2	5
सह–संबंध गुणांक	r =+0.8	

माँगी गई मात्रा का कीमत पर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए और यदि कीमत = रूपया 12.5 हो तो सम्भावित माँग अनुमानित कीजिए।

हल (Solution) :

मान लिया क्रीम x और माँगी गई मात्रा y है।

दिया है – $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 35$

$\sigma x = 2, \quad \sigma y = 5$

$rx_y = +0.8$

यदि = $X=12.5$ तो $y=?$

Y का अनुमान ज्ञात करने के लिए y का x पर प्रतीपगमन समीकरण कीजिए ज्ञात किया जायेगा।

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma y}{\sigma y}(x - \bar{x})$$

$$y - 35 = 0.8 \text{ x} \frac{5}{2}(x - 10)$$

$$y - 35 = 2x - 20$$

$$y = 2x + 15$$

$X= 12.5$ के लिए

$$Y= 2x12.5+15= 40$$

अतः कीमत रूपये 12.5 होने पर माँगी गई अनुमानित मात्रा 40 इकाइयाँ हैं।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्नलिखित सूचना किसी कम्पनी के विज्ञापन व्यय और विक्री से सम्बन्धित है–

	विज्ञापन व्यय (लाख रूपये) x	विक्री (रूपये लाख) y
समान्तर माध्य	20	100
प्रमाप विचलन	3	12
सह–संबंध गुणांक	$r = +0.8$	

(क). दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ख). यदि कम्पनी रूपये 120 लाख का विक्री लक्ष्य प्राप्त करना चाहती है, तो विज्ञापन व्यय कितना होगा?

हल (**Solution**) :

दिया है – $\bar{x} = 20; \quad \bar{y} = 100$

$= \quad 6\sigma = 3; \quad \sigma y = 12$

$r= +0.8$

क. प्रतीपगमन समीकरण

X का Y पर	Y का X पर
$x - \bar{x} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y})$	$y - \bar{y} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}(x - \bar{x})$
$x - 20 = 0.8\,\frac{3}{12}\,(y\text{-}100)$	$y - 100 = 0.8\frac{12}{3}(x - 20)$
$x - 20 = 0.2y\text{-}20$	$y - 100 = 3.2x - 64$
$\therefore\ x = 0.2y$	$\therefore y = 3.2x + 36$

ख. के प्रदत्त मूल्य रू0 120 के तत्संवादी का मूल्य निम्न समीकरण से अनुमानित किया जायेगा–

$$X = 0.2\ y,\ X = 0.2X120 = 24$$

अतः रू0 120 लाख की विक्री का लक्ष्य प्राप्त करने के लिए रू0 24 लाख का अनुमानित विज्ञापन व्यय करना पड़ेगा।

2. प्रतीपगमन गुणांक द्वारा गणना (**Calculating by regression co-efficient**) :

प्रतीपगमन गुणांक यह बतलाता है कि एक पद श्रेणी में एक इकाई (Unit) के परिवर्तन होने से दूसरी पद श्रेणी में कितना परिवर्तन होगा। जैसे प्रतीपगमन समीकरण दो होते है ठीक वैसे प्रतीपगमन गुणांक भी दो होते है। इनका गणना के सूत्र निम्नलिखित हैं :

क. जब सह–सम्बन्ध ज्ञात हो :–

अ. **'x' का 'y' पर प्रतीपगमन गुणांक**

$$b_{xy} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}$$

इसे गुणांक के रूप में x के y पर प्रतीपगमन समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है। $x - \bar{x} = bxy\,(y - \bar{y})$ क्योंकि $r\frac{\sigma x}{\sigma y}bxy$

ब. **'y' का 'x' पर प्रतीपगमन गुणांक**

$$b_{yx} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$$

Y के X पर प्रतीपगमन समीकरण को उक्त गुणांक के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है–

$y - \bar{y} = bxy\,(x - \bar{x})$ क्योंकि $r\frac{\sigma y}{\sigma x}byx$

नोट : यदि प्रश्न या समस्या में दोनों प्रतीपगमन गुणांक दिये हो तो निम्न सूत्र द्वारा सह–संबंध गुणांक आसानी से प्राप्त किया जा सकता है क्योंकि यदि प्रतीपगमन गुणांकों का गुणनफल करके उनका वर्गमूल निकालें तो यह सह–सम्बन्ध गुणांक हो जाता है।

सूत्र : = $\sqrt{bxy\,.\,byx}$ अर्थात् $r = \sqrt{r\frac{\sigma x}{\sigma y}\,r\frac{\sigma y}{\sigma x}}$

2.. इस बात का भी ध्यान रखना चाहिए कि दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के गुणनफल 4 से अधिक नहीं आना चाहिए वरन् सह–संबंध गुणांक भी 1 से अधिक होगा जो कि मूलतः गलत होगा।

ख. जब सह–सम्बन्ध ज्ञात न हो– यदि सह–सम्बन्ध गुणांक न दिया हो उसे ज्ञात करने की आवश्यकता भी न हो तो इस स्थिति में प्रतीपगमन गुणांक दो तरह से निकाले जा सकते हैं :

क. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method) द्वारा : इस रीति का प्रयोग तभी करें जब समान्तर माध्य से विचलन लेना हो, इसके सूत्र निम्न है–

'Y' का 'X' पर प्रतीपगमन गुणांक (Regression co-efficient of X on Y)

$$bxy = \frac{\sum dxdy}{\sum d^2y}$$

'Y' का 'X' पर प्रतीपगमन गुणांक (Regression co-efficient of X on Y)

$$byx = \frac{\sum dxdy}{\sum d^2x}$$

जहाँ : $\sum dxdy$ X एवं Y श्रेणियों के समान्तर माध्य से प्राप्त विचलनों के गुणनफलों का योग है।

$\sum d^2y$ = Y पद श्रेणी के विचलनों के वर्गों का योग।

$\sum d^2x$ = X पद श्रेणी के विचलनों के वर्गों का योग।

उदाहरण (**Illustration**) :

निम्नलिखित समंकों की सहायता से प्रतीपगमन गुणांकों की गणना कीजिए–

X :	3	6	9	12	15
Y :	3	12	27	48	75

हल (**Solution**) :

प्रतीपगमन गुणांक की गणना

X श्रेणी			Y श्रेणी			
मूल्य X	$\bar{x}=9$ विचलन $dx = (x-\bar{x})$	d_x^2	मूल्य Y	$\bar{y} = 33$ निचला $dy = (y-\bar{y})$	d_y^2	dxdy
3	−6	36	3	−30	900	+80
6	−3	9	12	−21	441	+63
9	0	0	27	−6	36	0
12	+3	9	48	+15	225	+45
15	+6	36	75	−42	1764	+252
$\sum x=45$ N=5	$\sum dx = 0$		$\sum y = 165$	$\sum dy = 0$	$\sum d_y^2 = 3366$	$\sum dxdy = +540$

$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{45}{5} = 9$

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$bxy = \frac{\sum dxdy}{\sum d^2y} = \frac{540}{3366} = 0.16$$

$\bar{y} = \frac{\sum dxdy}{N} = \frac{165}{5} = 33$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$byx = \frac{\sum dxdy}{\sum d^2x} = \frac{540}{90} = 6$$

ब. **लघु रीति (Short cut-method)** : समांतर माध्य की संख्या पूर्णांक में हो तो प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रतीपगमन गुणांक सरलता से प्राप्त किये जा सकते हैं, लेकिन यदि ये माध्य पूर्णांक में नही आए तब लघु रीति अपनाना अधिक उपर्युक्त होता है। इस रीति में निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है, अतः कल्पित माध्य मानकर समान्तर माध्य की गणना कीजिए–

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$bxy \frac{\sum dxd\,y\,N - (\sum dxd\,y)}{\sum d^2\,y\,N - (\sum dy)^2}$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$byx \frac{\sum dxd\,y\,N - (\sum dxd\,y)}{\sum d^2\,x\,N - (\sum dx)^2}$$

उदाहरण (Illustration) :

लघु रीति द्वारा निम्नलिखित समंकों की सहायता से प्रतीपगमन गुणांकों की गणना कीजिए–

X :	130	132	134	136	138	140	142	146
Y :	134	136	128	136	144	140	138	140

हल :

लघु विधि द्वारा

प्रतीपगमन का गुणांक

श्रेणी X			श्रेणी Y			
X	A = 134 dx = (x − A)	d_x^2	Y	A = 136 dy = (y − A)	d_y^2	dxdy
130	−4	16	134	−2	4	8
132	−2	4	136	0	0	0
134	0	0	128	−8	64	0
136	0	0	136	0	0	0
138	2	4	144	8	64	16
140	4	16	140	4	16	16
142	8	64	138	2	4	16
146	12	144	140	4	16	48

N=8	$\sum dx = 20$	$\sum d_x^2 = 248$	N = 8	$\sum dy = 8$	$\sum d_y^2 = 168$	$\sum dxd\,y = 104$

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$bxy = \frac{\sum dxdy\ N-(\sum dxdy)}{\sum d^2y\ N-(\sum dy)^2}$$

$$= \frac{104X8-(20X8)}{168X\ 8-(8\ )^2}$$

$$= \frac{832-160}{1344-64} = \frac{672}{1280} = 0.525$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N} = 134 + \frac{20}{8}$$

$$= 134+2.5 = 136.5$$

यहाँ कल्पित माध्य माना गया है क्योंकि $\bar{X}$ दशमलवाश में आया है।

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$byx = \frac{\sum dxdy\ N-(\sum dxdy)}{\sum d^2y\ N-(\sum dy)^2}$$

$$= \frac{104X8-(20X8)}{168X\ 8-(20\ )^2}$$

$$= \frac{832-160}{1984-400} = \frac{672}{1584} = 0.424$$

$$\bar{Y} = A + \frac{\sum dx}{N} = 136 + \frac{8}{8}$$

$$= 136 + 1 = 137$$

यहाँ कल्पित माध्य लेने की आवश्यकता नहीं थी, लेकिन एक श्रेणी में माना गया है तो दूसरी श्रेणी में A लिया गया है।

प्रतीपगमन समीकरण

$$X\ \bar{X} = bxy\ (Y-\bar{Y})$$

$$(X-136.5) = 0.525\ (y-137)$$

$$(X-136.5) = 0.525y\ 71.925$$

$$x = 0.525\ y- 71.925+136.5$$

$$\boxed{X= 0.525y+64.575}$$

$$Y- \bar{Y} = byx\ (X-\bar{X})$$

$$Y-137 = 0.424\ (X-136.5)$$

$$Y-137 = 0.424\ x\ 57.876$$

$$Y = 0.424X – 57.876+137$$

$$\boxed{Y= 0.424\ X +79.124}$$

उदाहरण (**Illustration**) :

(क). यदि दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के मूल्य 0.64 और 0.81 होतो सह–सम्बन्ध गुणांक का मान बताइए।

(ख). निम्न आँकड़ों से (अ) Y का प्रमाप विचलन (σy) और (ब) X और Y के मध्य सह–सम्बन्ध गुणांक (σ_{xy}) ज्ञात कीजिए।

$$X = 0.85Y\ ; Y = 0.89\ X\ ;\ \sigma x = 3$$

(ग). एक विद्यार्थी ने Y के X पर (Y on X) और X के Y पर (X on Y) प्रतीपगमन गुणांकों के मान क्रमशः 1.2 और 0.9 ज्ञात किये। कारण सहित बलाइए कि क्या उसके द्वारा किया गया परिगणन सही है?

(घ). निम्न प्रदत्त सूचना से 'r' का मूल्य ज्ञात कीजिए :–

X का प्रसरण (Variance of x) = 2.25; σ_y=4; तथा x का y पर प्रतीपगमन समीकरण X = - 0.3y+1.8 है।

हल (Solution) :

(क). $r = \sqrt{bxy\,.\,byx} = \sqrt{0.64X0.85} = \sqrt{0.5184}$

$= + 0.72$

(ख). X का Y पर प्रतीपगमन
X = 0.85y
यदि y का मूल्य 1 है तो X0.85 होता अतः bxy=0.85

Y का X पर प्रतीपगमन
y = 0.89
यदि X का मूल्य 1 हो तो Y का मूल्य 0.89 होगा। byx = 0.89

$r = \sqrt{bxy\ byx} = \sqrt{0.85X0.89} = 0.87$

$bxy = r\,\frac{\sigma x}{\sigma y}$ दिये गये मूल्यों की आदिष्ट करने पर–

$0.85 = 0.87 \text{ x } \frac{3}{\sigma y}$

$= \quad 0.85\sigma y = 2.61$

$\therefore\ \sigma y = \frac{2.61}{0.85} = 3.07$

$\therefore\ r = 0.87\ ;\ \sigma y = 3.07$

(ग). विद्यार्थी द्वारा प्राप्त परिणाम इस प्रकार हैं –

byx = 1.2. bxy = 0.9 इन दोनों गुणांकों की गुणा (r^2) 1.2X.9 = 1.08 है जो 1 से अधिक है, इसका वर्गमूल (r) भी 1 से अधिक होगा, परन्तु सह–संबंध गुणांक है जो कि 1 से अधिक नहीं हो सकता। अतः विद्यार्थी ने प्रतीपगमन गुणांकों की गणना में गलती की है।

(घ). X का प्रसरण $\sigma_{\pi}^2 = 2.25$

$\therefore\ \sigma x = \sqrt{2.25} = 1.5, \sigma_y = 4$

X = 0.3 Y + 1.8

उक्त समीकरण X का Y पर प्रतीपगमन प्रकट करता है। इसमें अन्तः खण्ड (a) 1.8 है और पर सर्वोपयुक्त रेखा का ढ़ाल (b)– 0.3 हैं, यही प्रतीपगमन गुणांक है अर्थात्

bxy = –0.3

$bxy = r\frac{\sigma x}{\sigma y}$ या 0.3 or $rx\frac{1.5}{4}$ या– 1.2 = 1.5 $x\,r$

$\therefore r = \frac{-1.2}{1.5} = -0.8$

3. न्यूनतम वर्ग रीति के आधार पर गणना :

पूर्व में बताया जा चुका है कि रेखीय प्रतीपगमन के सभीकरण उन सर्वोपयुक्त रेखाओं के समीकरण होते हैं जिन्हें न्यूनतम वर्ग पद्धति (Least Squares Method) के आधार पर खींचा जाता है। इस रीति के अनुसार 'a' और 'b' की गणना सामान्य समीकरणों (Normal Equation) द्वारा निम्न विधि से की जाती है–

X का Y पर	Y का X पर
$X = -a+by$	$Y = a+by$
$\sum x \text{-} Na + b\sum y$	$\sum y = Na + b\sum x$
$\sum xy = a\sum y + b\sum y^2$	$\sum xy = a\sum y + b\sum x^2$

निम्नलिखित उदाहरण में दोनों प्रतीपगमन समीकरण न्यूनतम वर्ग–रीति द्वारा तथा प्रतीपगमन गुणांक रीति द्वारा निकाले गये हैं :

निम्न समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरणों का परिकलन कीजिए और प्रतीपगमन–गुणांक विधि द्वारा परिणाम की जाँच कीजिए–

X :	1	2	3	4	5
Y :	2	5	3	8	7

हल **(Solution)** :

न्यूनतम रीति

X	Y	x^2	y^2	xy
1	2	1	4	2
2	5	4	25	10
3	3	9	9	9
4	8	16	64	32
5	7	25	49	35
$\sum x = 15$	$\sum y = 25$	$\sum x^2 = 55$	$\sum y^2 = 151$	$\sum xy = 88$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण	Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक
$\sum x = Na + b\sum y$	$\sum y = Na + b\sum x$

$\sum xy = a\sum x + b\sum y^2$

या $15 = 5a + 25\ b$ - - - (i)

$88 = 25a + 151\ b$ - - - (ii)

(i) को 5 से गुणाकर उसे (ii) में से घटाने पर–

$$\begin{array}{l} 88=25\ a+15\ 1b \\ \underline{75=2\ \ a+1\ \ \ b} \\ \ \ 13=2\ \ b \end{array}$$

$\therefore\ b\ \frac{13}{26} = 0.5$

b को (i) में आदिष्ट करने पर–

$15 = 5a + 15 X 0.5$

$\therefore 2.5 = 5\ a$ या $a = 0.5$

$X = a + by$

$X = 0.5 + 0.5\ Y$

$\sum XY = a\sum x + b\sum x^2$

या $25 = 5a + 15\ b$ - - - (i)

$88 = 15a + 55\ b$ - - - (ii)

(i) को 3 उसे गुणा कर उसे (ii) में से घटाने पर–

$25 = 5a + 15 X 1.3$

$25 - 19.5 = 5a$ या $9 = 1.1$

$Y = a + bx$

$Y = 1.1 + 1.3\ x$

b को (i) में आदिस्ट करने पर–

$$\begin{array}{c} 88 = 15\ a + 55\ b \\ \underline{75 = 15\ a + 45\ b} \\ 13 = 10\ b \end{array}$$

$b = \frac{13}{10} = 1.3x$

b को (i) में आदिस्ट करने पर–

$25=5a+15X1.3$

$25-19.5=5\ a$ या $a= 1.1$

$Y=a+bx$

$Y=1.1+1.3x$

अनुमान की प्रमाप त्रुटि :

प्रतीपगमन रेखाओं से एक श्रेणी के दिये हुए चर–मूल्य से सम्बद्ध दूसरी आश्रित श्रेणी के चर–मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाया जाता है। यह ज्ञात करने के लिए कि हमारा अनुमान यर्थार्थता के कितना निकट है, अनुमान की प्रमाप त्रुटि (Standerd Eror of the Estimate) निकालनी आवश्यक होती है।

विक्षेप चित्र पर अंकित विभिन्न बिन्दुओं के प्रतीपगमन रेखा से निकाले गये अन्तरों का प्रमाप विचलन, अनुमान का प्रमाप विभ्रम (Standerd Erorr of Estimate) कहलाता है। दूसरे शब्दों में, आश्रित श्रेणी के वास्तविक मूल्यों (Actual Values) और संगणित या प्रवृत्ति–मूल्यों (Computer values or trenal trend) के विचलनों का औसत माप ही अनुमान की प्रमाप त्रुटि है। यह स्पष्ट या व्याख्या–रहित विचरण मापांक का वर्गमूल (Square root of Unexplained variance) होता है। इसकी गणना प्रमाप विचलन की भाँति की जाती है। अन्तर केवल इतना है कि इसमें वास्तविक मूल्यों के संगणित प्रवृत्ति–मूल्यों से विचलन लिये जाते हैं, समान्तर माध्य से नहीं।

दोनों प्रतीपगमन रेखाओं के अनुमान की प्रमाप त्रुटियाँ निम्नलिखित सूत्रों द्वारा निकाली जायेगी–

X का Y पर	Y का X पर

$$Sxy = \sqrt{\left(\frac{\sum (X-Xc)^2}{N}\right)}$$

$$Syx = \sqrt{\left(\frac{\sum (Y-Yc)^2}{N}\right)}$$

Xc और Yc क्रमशः X व Y के संगणित मूल्य Computed values of X and Y respectively है |

वैकल्पिक सूत्र –

$$Sxy = \sigma x\sqrt{1 - r^2}$$

वैकल्पिक सूत्र –

$$Syx = \sigma y\sqrt{1 - r^2}$$

उदाहरण **(Illustration)** :

सूचनाओं के आधार पर अनुमान का प्रमाप विभ्रम ज्ञात करो :

$$\sigma x = 4, \sigma y = 5, rxy = +0.6, N = 100$$

हल **(Solution)** :

$$Sxy = \sigma x\sqrt{1 - r^2}$$
$$= 4\sqrt{1 - (0.6)^2}$$
$$= 4\sqrt{1 - 3.6}$$
$$= 4\sqrt{0.64}$$
$$= 4x\ 0.8 = 3.2$$

$$xyx = \sigma y\sqrt{1 - r^2}$$
$$= 5\sqrt{1 - (0.6)^2}$$
$$= 5\sqrt{1 - 3.6}$$
$$= 5\sqrt{0.64}$$
$$= 5\ x\ 0.8 = 4.00$$

उदाहरण **(Illustration)** :

निम्न सूचनाओं के आधार पर अनुमान का प्रमाप विभ्रम ज्ञात करो :

X :	2	4	6	8	10
Y :	3	5	7	10	5

हल **(Solution)** :

X	$dx = 2$ $(x - \bar{x})$	d_x^2	Y	$dy =$ $(y - \bar{y})$	d_y^2	$dx.dy$
2	−4	16	3	−5	25	20
4	−2	4	5	−3	2	6
6	0	0	7	−1	1	0
8	+2	4	10	+2	4	4
10	+4	16	15	+7	49	28
N=5 $\sum x = 30$	$\sum dx = 0$	$\sum d_x^2 = 40$	$\sum y = 40$	$\sum dy = 0$	$\sum d_y^2 = 88$	$\sum dxdy = 58$

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{40}{5} = 8$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण (X or Y)

$$\left(X-\bar{X}\right)=\frac{\sum dxdy}{\sum dy^2}\left(Y-\bar{Y}\right)$$

$$X-6=\frac{58}{88}(4-8)$$

$$X-6=0.66\quad(y-8)$$

$$X-6=0.66y\;\;5.28$$

$$\boxed{X-0.66\,y+0.72}$$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण (Y or X)

$$\left(Y-\bar{Y}\right)=\frac{\sum dxdy}{\sum dx^2}\left(X-\bar{X}\right)$$

$$Y-8=\frac{58}{40}(x-8)$$

$$Y-8=1.45\quad(x-6)$$

$$Y-8=1.45x-8.70$$

$$Y=1.45x-8–70+8$$

$$\boxed{Y=1.45x-0.70}$$

उपरोक्त प्रतीपगमन समीकरणों के आधार पर Y के दिये गये मूल्यों से X का मूल्य (Xc) तथा X के दिये गये मूल्यों से Y का मूल्य (Yc) की गणना के उपरान्त अनुमान के प्रमाप विभ्रम की गणना निम्न प्रकार की जायेगी–

X	Xc= 0.66 y+ 0.72	$(x\text{-}Xc)^2$	Y	Yc=1.45X-0.70	$(Y\text{-}\bar{Y}c)^2$
2	(0.66X3) + 0.72 =2.70	0.4906	3	(1.45X2) – 0.70 = 2.20	0.64
4	(0.66X4) + 0.72 = 4.02	0.0004	5	(1.45X5)- 0.70=5.10	0.01
6	(0.66X6) + 0.72 = 5.34	0.4356	7	(1.45X7)- 0.70=8.00	1.00
8	(0.66X10) + 0.72 = 7.32	0.4624	10	(1.45X10)- 0.70=10.9	0.81
10	(0.66X15) + 0.72 = 10.62	0.3844	15	(1.45X15)- 0.70=13.8	1.44
योग		1.7728			3.90

$$Sxy=\sqrt{\frac{\sum(X-Xc)^2}{N}}$$

$$=4\sqrt{\frac{1.7728}{5}}$$

$$=4.595$$

$$Syx=\sqrt{\left(\frac{\sum(Y-Yc)^2}{N}\right)}$$

$$=4\sqrt{\frac{3.90}{5}}$$

$$=0.883$$

10.11 बोध प्रश्न :

1. खाली स्थान की पूर्ति करें–
   1. सह–सम्बन्ध के मूल तत्वों का प्रतिपादन .... ने किया था।
   2. जब दो चरों में परिवर्तन एक ही दिशा की ओर होता है संबंधों को चरों का .... सह–संबंध कहा जाता है।
   3. सह–संबंध की मात्रा .... व .... के बीच में होता है।
   4. पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक .... द्वारा अत्याधिक रूप से प्रभावित होता है।
   5. गुणात्मक तथ्यों के सह–संबंध गुणांक निकालने के लिए .... का प्रयोग किया किया जाता है।
   6. प्रतीपगमन का अर्थ .... होना होता है।
   7. प्रतीपगमन रेखाएँ .... होती है।
   8. .... से एक श्रेणी के दिये हुए चर–मूल्य से सम्बद्ध दूसरी आश्रित श्रेणी के चर–मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाया जाता है।

2. सत्य एवं असत्य कथन छाँटिए–
   1. न्यूनतम वर्ग रीति सह–संबंध ज्ञात करने की रीति नही हैं।

2. उच्च धनात्मक सह–संबंध +0.75 और +1 के बीच में होता है।
3. पियर्सन के सह–संबंध गुणांक को 'r' चिन्ह द्वारा प्रकट किया जाता है।
4. स्पियरमैन की कोटि–अन्तर रीति से निकाला गया सह–संबंध गुणांक का अधिकतम मान 0 होता है।
5. प्रतीपगमन शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम 'फ्रांसिस गाल्टन' ने किया था।

10.12 बोध प्रश्नों के उत्तर :

1. खाली स्थान वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. ब्रावे, 2. धनात्मक, 3. +1 व–1। 4. परम पद–मूल्यों। 5. कोटि अंतर रीति। 6. वापस आना। 7. दो। 8. प्रतीपगमन रेखाओं।

2. सत्य एवं असत्य वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. असत्य, 2. सत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य।

10.13 स्व परख प्रश्न :

1. सह–संबंध से आप क्या समझते हैं?
2. धनात्मक तथा गुणात्मक सह–संबंध में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
3. सह–संबंध की विभिन्न रीतियाँ कौन–कौन सी होगीं? संक्षेप में उनके गुण एंव दोष बताइए।
4. कार्ल पियर्सन के सह–संबंध गुणांक से आप क्या समझते हैं? सह–सम्बन्ध गुणांक के अधिकतम एवं न्यूनतम आप क्या होते हैं।
5. स्पियर मैन का क्रमान्तर सह–सम्बन्ध गुणांक क्या है? इनकी उपयोगिता का वर्णन कीजिए?
6. सह–सम्बध के कौन–कौन से प्रकार है? स्पष्ट कीजिए?
7. सम्भाष्य विभ्रम पर टिप्पणी लिखिए–?
8. प्रतीपगमन अवधारणा की व्याख्या कीजिए।
9. प्रतीपगमन सह–सम्बन्ध से किस प्रकार भिन्न है? प्रतीपगमन रेखाएँ दो क्यों होती हैं?
10. प्रतीपगमन का अर्थ बताइए तथा आर्थिक विश्लेषण में इसकी उपयोगिता पर प्रकाश डालिए।
11. निम्न सूचना से कार्ल–पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X और Y के पद युग्मों की संख्या = 1000

X श्रेणी का प्रमाण विचलन = 4.5

Y श्रेणी का प्रमाण विचलन = 3.6

X और Y श्रेणी के विचलनों की गुणाओं का योग = 4800

(r = +0.962)

12. जिन सामग्री से X और Y श्रेणी में सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

मदों की संख्या	श्रेणी	श्रेणी
समान्तर संख्या	15	15
समान्तर माध्य	25	18
माध्य से लिये गये विचलन वर्गों का योग	136	138

X और Y श्रेणी के माध्यों से विचलनों की गुणाओं का योग = 122 [r = +0.89]

13. पिता व पुत्र की लम्बाई के निम्नलिखित समंकों से सह–सम्बन्ध गुणांक निकालिए–

पिता की ऊचाई (इंच में) :	65	66	67	67	68	69	71	73
पुत्र की ऊचाई (इंच में) :	67	68	64	68	72	70	69	70

[r = +0.472]

14. निम्नांकित श्रेणियाँ एक वस्तु के मूल्य तथा पूर्ति से संबंधित है। उनमें कार्ल–पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक मालूम कीजिए–

कीमत :	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
पूर्ति :	30	29	29	25	24	24	24	21	18	15

$[r = -0962]$

15. दो पद मालाओं (x और y) के माध्यों से निकाले गये विचलन क्रमशः निम्न प्रकार है। अतः कार्ल–पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक निकालिए और अपने परिणाम का विवेचन कीजिए–

X :	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y :	3	–3	–4	0	4	1	2	–2	–1

r = 0

16. निम्नलिखित प्रदत्त सारणी से पतियों और पत्नियों की आयु के बीच सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

पति की आयु (वर्ष में)			पत्नियों की आयु (वर्ष में)			
	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	योग

15–25	6	3	–	–	–	9
25–35	3	16	10	–	–	29
35–45	–	10	15	7	4	32
45–55	–	–	7	10	5	21
55–65	–	–	–	4	5	9
योग	9	29	32	21	9	100
				$[r = +0.802]$		

17. निम्नलिखित समंकों से कोटि सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X :	20	22	24	25	30	32	28	28	26	35
Y :	16	15	20	20	19	18	22	24	23	25

$[p = 0.52]$

18. निम्न समंको से कोटि सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

X :	80	78	75	75	68	67	60	69
Y :	12	13	14	14	14	16	15	17

$p = -0.9286$

19. निम्न समंको से से संगामी विचलन रीति द्वारा सह–सम्बन्ध गुणांक निकालिए–

आपूर्ति :	350	354	375	380	350	365	380
कीमत :	300	280	270	260	290	280	272

$re = -1$

20. $Y = a + bx$ में $'a'$ तथा $'b'$ का क्या अर्थ है?

21. निम्नलिखित आँकड़ों से प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए–

X :	27	27	27	28	28	18	29	29	30	31
Y :	18	18	19	20	21	21	22	23	24	25

$[X = 0.56\,Y + 15.58, Y = 0.26\,x + 13.98, bxy = 0.5\ byx. 026]$

22. दो प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए तथा y का संभावित मूल्य ज्ञात कीजिए जबकि X 55 है। दिया हुआ है।

$\bar{X} = 48,\ \bar{Y}\ 55,\ \sigma_x = 4, \sigma_y = 5, r = +0.8$

$\left[\bar{X} = 0.64\,Y + 12.8; Y = X + 7; Y_{55} = 62\right]$

23. निम्नलिखित समंक किसी परीक्षा में विषय A तथा B में प्राप्त अंकों से संबंधित है–

माध्य प्राप्तांक	**A**	**B**
विचरण (variance)	50	60
पदों की संख्या	2.56	2.25

A और B से सह–सम्बन्ध गुणांक = 0.6 दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए और यह स्पष्ट कीजिए कि प्रतीपगमन रेखाएँ दो क्यों होता है। A में 50 अंक तथा 45 अंक पाने वालों के B में अंक अनुमानित कीजिए।

$$[x = 0.64\,y + 24.4; Y = 0.56\,x + 12; Y_{50} = 54.5; Y_{45} = 51.2]$$

24. निम्न आँकड़ों से X का Y पर तथा Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए तथा सह–सम्बन्ध गुणांक निकालिए–

X :	1	2	3	4	5	
Y :	9	8	10	12	11	

$$[r = 0.8, X = 0.8y - 3; y = 0.8x + 6]$$

25. यदि दोनों प्रतीपगमन गुणांक (bxy, byx) ऋणात्मक है तो सह–सम्बन्ध गुणांक धनात्मक होगा या ऋणात्मक?

26. X तथा Y दो दैव चरों का समान्तर माध्य तथा उनमें सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए जबकि दो प्रतीपगमन रेखाएँ निम्न प्रकार हैं–

$$5_x + 7y - 22 = 0 \quad -- \text{(i)}$$
$$\sigma_x + 2y - 20 = 0 \quad -- \text{(ii)}$$

यदि Y का X प्रसरण 15 है तो X का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए–

$$\left[\bar{X} = 3, \bar{Y} = 1, r = -0.488, \sigma x = 2.65\right]$$

////

इकाई – 11 अवधारणात्मक ढ़ाँचा (Conceptual Framwork)

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य :

एक शोधार्थी इस अध्याय का अध्ययन करने के पश्चात् निम्न की जानकारी कर पायेगा :–

- परिकल्पना क्या है?
- परिकल्पना का महत्त्व शोध में क्यों हैं?
- कौन–कौन सी विशेषताएँ परिकल्पनाओं में होती हैं?
- परिकल्पना का जन्म कहाँ–कहाँ से होता है? अर्थात स्रोत।
- सिद्धान्त और तथ्य के अन्तर की सार्थकता का ज्ञान।
- किसी विशिष्ट क्षेत्र में अवलोकन व प्रत्याशा का अंतर केवल संयोग के कारण है या हमारी आधारभूत (शून्य) परिकल्पना के गलत होने के कारण है की जानकारी।

11.1 प्रस्तावना :

आँकड़ों के खेल में सत्यता के निकट पहुँचने के लिए जितना परिकल्पना का निर्माण करना आवश्यक होता है। उतना ही परिकल्पना के परीक्षण की आवश्यकता होती है। प्रस्तुत अध्याय में परिकल्पना का निर्माण, अवधारणा, विशेषता, क्षेत्र एवं इसके परीक्षण की विधियों का समुचित व्याख्या किया गया है।

11.2 परिकल्पना की अवधारणाएँ :

परिकल्पना का शब्दिक अर्थ है 'पूर्व–चिन्तन'। यह अनुसंधान की प्रक्रिया का दूसरा महत्वपूर्ण स्तम्भ हैं। इसका तात्पर्य है कि किसी समस्या के विश्लेषण और परिभाषीकरण के पश्चात् उसमें कारणों तथा कार्य–कारण के संबंध में पूर्व–चिन्तन कर लिया गया है, अर्थात् इस समस्या का यह कारण हो सकता है। अनुसंधान–कार्य इस परिकल्पना के निर्माण और उसके परीक्षण के बीच की प्रक्रिया है। विद्वानों का विश्वास है कि ज्यों ही समस्या की जानकारी हो जाती है, उसके लिए परिकल्पना का निर्माण हो जाना चाहिए। किन्तु बिना पूर्ण रूप से विचार किये हुए शीघ्रता से बनायी गयी कल्पना व्यर्थ होती है, तथा समय और श्रम नष्ट होता है। अतः सबसे महत्वपूर्ण कार्य तो यह है कि समस्या का उचित रूप में विश्लेषण किया जाय, सावधानी से उसे परिभाषित किया जाय और तब परिकल्पनाओं का निर्माण किया जाय।

क्या परिकल्पना के निर्माण के बिना कोई प्रयोग हो सकता है? वास्तव में परिकल्पना के अभाव में अनुसंधान कार्य एक उद्देश्यहीन क्रिया है अर्थात् न तो कोई प्रयोग हो सकता है और न ही कोई वैज्ञानिक विधि से अनुसंधान ही संभव है। अब प्रश्न यह उठता है कि सभी विज्ञानों में सभी अनुसंधान परिकल्पना के निर्माण के द्वारा ही हुए है, या होते है? उच्च सापेक्षता (Relativity) के सिद्वान्त, गुरूत्वाकर्षण सिद्धान्त, आर्किमिडीज के सिद्धान्त आदि बड़े अविष्कारों के पीछे कोई परिकल्पना थी? उत्तर मिलता है 'नही' ये आविष्कार संयोगवश वैज्ञानिकों में सूझ पैदा हो जाने के कारण हुए थे, किन्तु उसके पश्चात मूल, सिद्धान्तों को विकसित किया गया तो परिकल्पनाओं का निर्माण अवश्य हुआ था। अतः यह कहा जा सकता है कि भौतिक विज्ञानों में परिकल्पनाओं का निर्माण विशेष महत्व नहीं रखता। किन्तु फिर भी व्यावहारिक दृष्टि से इनका स्थान अवश्य है। एक डॉक्टर किसी की चिकित्सा करते समय परिकल्पना की सहारा लेता है और कहता है कि अमुक लक्षणों के कारण अमुक रोग हो सकता है, तथा इस विशेष औषधि की यह प्रतिक्रिया हो सकती हैं। इस पकिल्पना के साथ वह अपना कार्य आंरभ करता है।

इसका दूसरा पहलू भी है। विज्ञानों में किसी कार्य का कारण केवल एक ही हो सकता है। ऊपर से वस्तुएँ नीचे की ओर ही क्यों गिरती हैं? गुरूत्वाकर्षण के कारण किन्तु सामाजिक विज्ञानों यें तो किसी भी व्यवहार के अनेक कारण हो सकते हैं। एक वस्तु का मूल्य गिरता है इसके अनेक कारण हो सकते है जैसे– उस वस्तु की पूर्ति अधिक होना, सम्बन्धित वस्तु का मूल्य गिरना, प्रचलन से बाहर होना इत्यादि कारणों की इसी बहुलता के कारण सामाजिक अथवा वाणिज्यिक अनुसंधानों में परिकल्पनाओं का निर्माण आवश्यक हो जाता है। परिकल्पना एक भी हो सकती है और अनेक भी। बहुधा भौतिक विज्ञान में एक परिकल्पना को ही लेकर उसका परीक्षण करते है, जबकि सामाजिक विज्ञानों में अनेक परिकल्पनाएँ लेते हैं और प्रत्येक की सत्यता का परीक्षण करते है। यदि समस्या सर्वेक्षण प्रकार की हो तो एक परिकल्पना नही लेनी चाहिए बल्कि अनेक परिकल्पना लेनी चाहिए। अतः परिल्पना का निर्माण समस्या की प्रकृति पर निर्भर है।

स्वयंसिद्धियाँ, धारणाएँ और परिकल्पनाओं का स्पष्टीकरण :

अनुसंधान–साहित्य में इन तीनों शब्दों का प्रयोग होता है। अतः इस स्तर पर इनका स्पष्टीकरण आवश्यक है।

स्वयंसिद्धियाँ (Pastulates) :

स्वयंसिद्धियाँ जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है, अनेक वैज्ञानिक क्रियाओं के पीछे निहित विश्वास है। यह विवाद–सहित होते हैं। इनकों प्रमाणित करने की आवश्यकता नहीं होती है। इन्हें उसी रूप में मान लेते है जिससे आगे का अनुसंधान–कार्य प्रारंभ किया जा सकें। गणितज्ञ 0 से 9 तक अंक को मानकर चलते हैं। ईश्वर की स्थिति में धर्य की आस्था रखने वालों के लिए स्वयंसिद्ध है।

अवधारणाएँ (Assumptions) :

अवधारणाएँ किसी विशेष परिस्थिति में मान ली गयी स्थितियाँ है जो हमारे तर्कपूर्ण वैज्ञानिक निष्कर्षों को प्राप्त करने में सहायक होती है। सार्वजनिक रूप में इसका सत्य होना आवश्यक नहीं है। कोई अनुसंधान कार्य प्रारंभ करने से पूर्व हम कुछ धारणाएं निश्चित कर लेते हैं। हमारे द्वारा प्राप्त निष्कर्ष उसी सीमा तक सत्य होते हैं, जहाँ तक हमारी धारणाएँ सत्य हैं। इनके आधार पर तार्किक सामान्यीकरण में सुविधा होती है। उदाहरण के लिए चीनी मिलों के उपत्पादित चीनी के आँकड़ों को लेकर अनुसंधान करने वाले इस धारणा के साथ कार्य प्रारम्भ करते है कि ये आँकड़ों विश्वसनीय और वैध हैं। किसी न्यादर्श में उत्पादन का वितरण सामान्य होता है। यादृच्छिक त्रुटियों में सह–संबंध नहीं होता। इस धारणा को मानने के पश्चात् ही परीक्षण–सिद्धान्त के अनेक सूत्रों की व्याख्या संभव है। अवधारणाओं का निर्माण तार्किक सूत्र के आधार पर किया जाता है और आँकड़ों के द्वारा इनकी जाँच की जा सकती है।

अवधारणाएँ दो प्रकार की होती है–

क. सरल करने वाली अवधारणाएँ :

अनुसंधान कार्य को सरल करने के लिए इनका प्रयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ उद्योगों की उपलब्धि के मापन की अनेक विधियाँ हो सकती है किन्तु सरलता के लिए उत्पादन के आँकड़ों को विश्वसनीय मानकर अनुसंधान कार्य प्रारंभ कर देते है।

ख. मूलभूत अवधारणाएँ :

प्रत्येक अनुसंधान–कार्य में कुछ मूलभूत अवधारणाओं को लेकर चलते हैं। इनके बिना अनुसंधान कार्य संभव नहीं होगा। प्रश्नावली का प्रयोग इस मूल धारणा पर आधारित है कि उत्तर–दाता को भाषा का ठीक ज्ञान है और माँगी गयी सूचना के प्रति वह जानकारी रखता है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि स्वयंसिद्धियाँ आधार है किसी तर्क का मूलबिन्दु बनती है, जबकि आवधारणाओं का चुनाव होता है। परिकल्पना इन दोनों से भिन्न है।

परिकल्पना (**Hypothesis**) :

गुड तथा स्केट्स (Good & Scates) के अनुसार– परिकल्पना एक अनुमान है जिसे अंतिम अथवा अस्थायी रूप में किसी निरीक्षित तथ्य अथवा दशाओं की व्याख्या हेतु स्वीकार किया गया हों एवं जिसके अन्वेषण को आगे पथ–प्रदर्शन प्राप्त होता है।''

इस परिभाषा के अनुसार प्रत्येक वैज्ञानिक अनुसंधान समस्या के समाधान के लिए किसी निर्देशित व्याख्या से प्रारम्भ होता है। ऐसे निर्देशित उत्तर अनुसंधानकर्त्ता को अध्ययन की विषय–सामग्री तथा अपने पूर्व ज्ञान से प्राप्त होते हैं। इन आधारों पर जब अनुसंधानकर्त्ता किसी समस्या के समाधान के लिए निर्देशित व्याख्या को बनाता है, तो इन्हें परिकल्पना कहा जाता है।

गुड तथा हैट (Good & Hatt) के अनुसार–, ''परिकल्पना इस बात का वर्णन करती है कि हम क्या देखना चाहते हैं? परिकल्पना भविष्य की ओर देखती है। यह एक तर्कपूर्ण वाक्य है जिसकी वैधता की परीक्षा की जा सकती है। यह सही भी सिद्ध हो सकती है, और गलत भी।''

जब अनुसंधानकर्त्ता के समक्ष कोई समस्या आती है, तो उसका विश्लेषण करने के पश्चात् वह कुछ संभावित सुझाव प्रस्तुत करता है और फिर अनुसंधान–कार्य में इस सुझाव की सत्यता की जाँच करता है। इसी सुझाव को परिकल्पना कहते हैं।

11.3 परिकल्पना की विशेषताएँ :

परिकल्पना की विशेषताएँ निम्नलिखित हैं :–

1. परिकल्पना समस्या का सरल उत्तर होता है–

समस्या के समाधान हेतु कई परिकल्पनाएँ हो सकती हैं। किन्तु वही परिकल्पना सर्वश्रेष्ठ होती है जो समस्या का सर्वश्रेष्ठ समाधान प्रस्तुत करती हैं। यह शोधकर्त्ता के अनुभव और उसकी सूझ पर निर्भर है कि अनेक परिकल्पनाओं में से किसे अपने परीक्षण का विषय बनायें।

2. परिकल्पना समस्या का पर्याप्त उत्तर होता है–

कोई भी परिकल्पना जिस समस्या का सरलतम एवं स्वयं उत्तर प्रस्तुत करती है, उसके परीक्षण में कठिनाई नहीं आती है। इसके विपरीत, जटिल एवं भ्रमपूर्ण परिकल्पना का परीक्षण ही जटिल हो जाता है और निष्कर्ष प्राप्ति संदिग्ध रहती है।

3. परिकल्पना प्रमाणित करने योग्य होती है :

परिकल्पना का परीक्षण कर एक निष्कर्ष निकालते हैं और यही शोध का उद्देश्य होता है। यदि परिकल्पना ऐसी होगी जिसका परीक्षण ही नहीं हो सकता अथवा उसे प्रमाणित ही नहीं कर सकते तो उसे लेना व्यर्थ है।

4. **परिकल्पना विशिष्ट होती है :**

विशिष्ट होना परिकल्पना का एक विशेष गुण है। उदाहरण के लिए यदि ''लाइफव्याय तथा लक्स साबुन में भिन्नता हैं। तो इसमें यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि किस प्रकार की गुणों के समक्ष भिन्नता है। यह विशिष्टीकरण उसके मापन में सहायक होगा।

5. **आँकड़े प्राप्त हो सकें :**

वही परिकल्पना लेनी चाहिए जिसके लिए आँकड़े प्राप्त हो सकें।

6. **शून्य परिकल्पना सर्वोत्तम होती है :**

शून्य परिकल्पना सर्वोत्तम होती है क्योंकि इसमें कोई दिशा–निर्देशन न होने के कारण सत्य अथवा असत्य, प्रमाणित करने के लिए अनुसन्धानकर्त्ता कटिबद्ध नहीं होता। वह स्वाभाविक रूप में परीक्षण करता है तथा उसका निष्कर्ष घोषित कर देता है।

11.4 परिकल्पना के स्रोत :

परिकल्पनाओं के निम्नलिखित मुख्य स्रोत है :–

1. **संस्कृति** : परिकल्पना का एक स्रोत संस्कृति हैं सामाजिक दृष्टिकोण से यह अत्यन्त महत्वपूर्ण है। प्रत्येक समाज में अनेक प्रकार की समस्याएँ होती है, इन समस्याओं के चिंतन से परिकल्पना का जन्म होता है। इनकी परीक्षा करके शोधकर्त्ता उनकी विश्वसनीयता ज्ञात करता है। उदाहरणार्थ हम ग्रामीण समाज में होने वाले परिवर्तनों के कारण का अध्ययन करना चाहते हैं। हमारी एक परिकल्पना यह हो सकती है कि 'ग्रामीण संस्कृति पर नगरीय संस्कृति का प्रभाव पड़ रहा हैं, इसकी परीक्षा करके, देख सकते हैं।

2. **विज्ञान** : सभी विज्ञान स्वयं परिकल्पना के स्रोत है। उदाहरण के लिए मनोविज्ञान में ही अनेक समस्याएँ है। इन समस्याओं के अध्ययन के लिए हम परिकल्पनाएं बना सकते हैं, उनकी जाँच कर सकते हैं। जाँच के आधार पर नवीन ज्ञान प्राप्त होगा तथा वैज्ञानिक सिद्धान्तों में सुधार होगा।

3. **प्राप्त परिकल्पनाओं का विश्लेषण** : किसी क्षेत्र में जो परिकल्पनाएं उपलब्ध हैं जिन पर बहुत दिन पूर्व कार्य हो चुका है, पुनः उन्ही को लेकर उनके परीक्षण द्वारा सत्यता की जाँच की जा सकती है। उदाहरण के लिए, विभिन्न व्यवसायों के प्रतिष्ठात्मक मूल्य (Prestige value of different occupations) का अध्ययन कई वर्ष पूर्व हो चुका है। अब पुनः उसे देख सकते हैं कि क्या उसमें कोई परिवर्तन आया है।

4. **साम्यानुमान (Analogy)** : इसका अर्थ दो विषयों अथवा दो घटनाओं में समानता से है। दो व्यवहारों में समानता क्यों है? और किस सीमा तक है? उदाहरण के लिए, मानव व्यवहार और पशु व्यवहार में समानता, मानव–प्रेरणा तथा पशु–प्रेरणा में समानता आदि ले सकते हैं।

5. **व्यक्तिगत अनुभव** : व्यक्तिगत अनुभव भी परिकल्पपना का आधार होता है किन्तु नये शोधकर्त्ताओं के लिए इसमें कठिनाई है। किसी भी क्षेत्र में जिनका अनुभव जितना ही समृद्ध होता है, उन्हें समस्या के ढूढ़ने तथा परिकल्पना बनाने में उतना ही सरलता होती है।

6. **रचनात्मक चिन्तन** : रचनात्मक चिन्तन परिकल्पना के बनाने का बहुत बड़ा साधन है, जिसके चार पद बताये गये है– तैयारी, विकास, प्रेरणा और परीक्षण। कोई विचार आया, उसे विकसित किया, उस पर कार्य करने के लिए प्ररेणा मिलीं परिकल्पना का निर्माण और परीक्षण किया।

7. **सूझ** : शोधकर्त्ता की सूझ भी अच्छी परिकल्पना के निर्माण में सहायक होती है। जिसमें जितनी अच्छी सूझ होगी, वह परिकल्पना का निर्माण उतना अच्छा ही कर सकेगा।

8. **अनुभवी व्यक्तियों से परिचर्चा** : जो व्यक्ति इस क्षेत्र में कार्य कर चुके हैं, उनसे परिचर्चा करने से भी परिकल्पना निर्माण में सहायता मिलती है तथा उसमें स्पष्टता आती है।

9. **उस क्षेत्र में हुए अनुसंधान** : उस क्षेत्र में जो अनुसंधान कार्य हो चुके हैं, उन्हें देखने से यह ज्ञात होगा कि किस प्रकार की परिकल्पनाओं पर कार्य किया गया है। उसी आधार पर अपनी भी परिकल्पना बनाया जा सकता है।

11.5 काई–वर्ग (Chi-squar) :

सर्वप्रथम काई–वर्ग को समझने के लिए आपको आसंग–सारणी को समझना होगा। संख्यात्मक तथ्य ही सांख्यिकी की विषम–सामग्री है, जो दो प्रकार से प्रस्तुत किया जाता है प्रथम अंकात्मक अभिलक्षण (जैसे ऊँचाई, भार, आयु, आय आदि) तथा दूसरे वर्णानात्मक गुण (जैसे साक्षरता, अंधापन सुन्दरता आदि) प्रथम प्रकार के संख्यात्मक तथ्य चर–समंक (Statistcs of variables) होते है। केन्द्रीत प्रवृत्ति की माप, अपकिरण, विषमता, सहःसम्बन्ध, प्रतीपगमन आदि प्रविधियाँ चर समंकों से संबंधित हैं। दूसरे प्रकार के तथ्य गुण समंक (Statisting of Attribution) कहलाते हैं। गुण–समंको के लिए जिस रीति का प्रयोग किया जाता है उसे गुण–साहचर्य की रीति कहते हैं।

गुणात्मक समंकों का वर्गीकरण दो प्रकार से हो सकता है– (क), द्वन्द्व भाजन और (ख), बहुगुणी–वर्गीकरण द्वन्द्व भाजन के अन्तर्गत एक गुण की उपस्थिति और अनुपस्थिति के आधार पर दो परस्पर अपवर्जी (Mutual exculsive) वर्ग बनाए जाते हें जैसे ''साक्षरता'' गुण के आधार पर साक्षर 'निरक्षर', रोजगार के आधार पर रोजगार प्राप्त और बेरोजगार, लिंग के आधार पर पुरूष और स्त्री।

गणन क्रिया को सरल बनाने के लिए कुछ संकेताक्षरों का प्रयोग किया जाता है जैसे– N = समग्र के लिए, समग्र में निश्चित गुण की उपस्थिति के लिए रोमन वर्णमाला के बड़े अक्षरों A,B,C, और गुण की अनुपस्थिति के लिए रोमन के छोटे अक्षर a,b,c या ग्रीक की अनुपस्थिति के छोटे अक्षर α, β, γ का प्रयोग किया जाता है।

बहुगुणी वर्गीकरण के अन्तर्गत जब एक से अधिक गुणों का अध्ययन एक साथ किया जाए तो उससे प्राप्त होने वाले वर्गीकरण को बहुगुणी वर्गीकरण कहते हैं। जैसे– पुरूष, साक्षर, बेरोजगार अथवा पुरूष साक्षर, रोजगार प्राप्त। बहुगुणी वर्गीकरण में गुण–साहचर्य ज्ञात करने के लिए कार्ल पियर्सन के वर्ग–माध्य आसंग–गुणांक का प्रयोग होता है।

आसंग–सारणी (सामान्य रूप) **'p x q'** सारणी

गुण–A

गुण B

A / B	A_1	A_2	A_3	-- --	A_P	योग
B_1	$(A_1 B_1)$	$(A_2 B_1)$	$(A_3 B_1)$	-- --	$(A_P B_1)$	(B_1)
B_2	$(A_1 B_2)$	$(A_2 B_2)$	$(A_3 B_2)$	-- --	$(A_P B_2)$	(B_2)
B_3	$(A_1 B_3)$	$(A_2 B_3)$	$(A_3 B_3)$	-- --	$(A_P B_3)$	(B_3)
-- --	-- --	-- --	-- --	-- --	-- --	-- --
B_q	$A_1 B_q$	$A_2 B_q$	$A_3 B_q$	-- --	$A_p B_q$	(B_q)
योग	(A_1)	(A_2)	(A_3)	-- --	(A_P)	N

आसंग–तालिक में–

$$N = (A_1)+(A_2)+(A_3)\text{----} (A_P) \text{ या } N= (B_1)+(B_2)+(B_3)+\text{----}(B_q)$$

$$(A_1) = (A_1 B_2)+(A_1 B_2)+(A_1 B_3)+\text{----} (A_1 B_q), \text{ या}$$

$$(B_1) = (A_1 B_2)+(A_2 B_1)+(A_3 B_1)+\text{----} (A_P B_1),$$

इस प्रकार, कोष्ठकों के विभिन्न खानों (Columes) का जोड़ (A_1), (A_2), (A_3) आदि होता है और कतारों (rows) का जोड़ (B_1), (B_2) आदि होता है। (A_1), (A_2), (A_3) आदि का जोड़ N हैं जो कि (B_1), (B_2), (B_3) आदि को जोड़ने से भी प्राप्त हो जाता है।

यदि पिताओं की बुद्धिमता के आधार पर पिताओं (A) को तीन वर्गों– बुद्धिमान– A_1 सामान्य– A_2 और मन्दबुद्धि A_3 मे बाँटा जाए और इसी प्रकार उनके पुत्रों (B) को भी बुद्धिमान (B_1), सामान्य– (B_2) और मन्दबुद्धि (B_3) वर्गों में बाँटा जाये तो इस प्रकार के वर्गीकरण को निम्न 3X3 आसंग–सारणी में प्रस्तुत किया जाएगा–

आसंग–सारणी (**ContigencyTable**)

3X3

पुत्रों मे बुद्धिमता **'B'**	पिताओं मे बुद्धिमता **'A'**			योग
	बुद्धिमान A_1	सामान्य A_2	मन्दबुद्धि A_1	
बुद्धिमान B_1	$(A_1 B_1)$	$(A_2 B_1)$	$(A_3 B_1)$	(B_1)
सामान्य B_2	$(A_1 B_2)$	$(A_2 B_2)$	$(A_3 B_2)$	(B_2)
मन्दबुद्धि B_3	(A_1)	$(A_2 B_3)$	$(A_3 B_3)$	(B_3)
योग	(A_1)	(A_2)	(A_3)	N

(क). **आसंग सारणी में गुण–साहचर्य :**

आसंग–सारणी में गुण–साहचर्य दो प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है– (क) आसंग सारणी को अनेक 2X2 गुण सहचर्य सारणियों में बदलकर उनमें अलग–अलग मूल के साहचर्य–गुणांक या प्रतिशत रीति या सम्भावना–प्रत्याशा रीति द्वारा गुण–साहचर्य की गणना की जा सकती है। उपर्युक्त 3 X 3 सारणी में सामान्य बुद्धि वाले तथा मन्दबुद्धि वाले पिताओं (A_2 व A_3) को मन्दबुद्धि पुत्र (β) मानकर तथा इसी प्रकार सामान्य व मन्दबुद्धी पुत्रों (B_2 व B_3) को मन्दबुद्धि पुत्र (β) मानकर 2 X 2 पिता सारणी बनाई जाएगी तथा फिर उसमें A और B में गुण–साहचर्य गुणांक निकाला जाएगा।

(ख). **वर्ग माध्य आसंग गुणांक :**

बहुगुणी वर्गीकरण में दो गुणों का साहचर्य ज्ञात करने की आदर्श रीति कार्ल पियर्सन का वर्ग माध्य आसंग गुणांक है। इस रीति से आसंग–गुणांक निकालने के लिए काई–वर्ग (Chi-square or x^2) निकाला जाता है।

आसंग सारणी में, दूसरे क्रम का प्रेक्षित या वास्तविक आवृत्तियों तथा गुण–स्वातन्त्र्य की कल्पना के अधीन प्रत्याशित आवृत्तियों से भाग देने पर प्राप्त व्यंजकों के योग को काई–वर्ग (x^2) कहते हैं। यदि अवलोकित एवं प्रत्याशित आवृत्तियों समान है तो दोनों गुण स्वतंत्र होगें और काई–वर्ग (x^2) का मूल्य शून्य (0) होगा।

x^2 वर्ग निकालने के लिए निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती हैं–

(क) A और B को स्वतंत्र मानते हुए आसंग–सारणी के विभिन्न गुण–संयोगो के कोष्ठो ($A_1 B_1$), ($A_1 B_2$), ($A_2 B_1$), आदि की प्रत्याशित आवृत्तियाँ निम्न सुत्रानुसार निकाली जायेगीं जिसमें योगों (Totals) का प्रयोग किया जाता हैं–

प्रत्याशित आवृत्ति (Expected frequency-fe) $= \frac{CT \text{ X } RT}{N}$

जहाँ CT =सम्बद्ध खाने का जोड़ है।

RT =सम्बद्ध पंक्ति का जोड़े है। तथा

N = कुल जोड़ (N)

इस आधार पर = $(A_1 B_1) = \frac{(A_1) \text{ X } (B_1)}{N}$, $(A_1 B_2) = \frac{(A_1) \text{ X } (B_2)}{N}$

और इसी प्रकार –

सभी कोष्ठों की प्रत्याशित आवृत्तियाँ निकाल कर उन्हें एक अलग प्रत्याशित आवृत्ति सारणी में रखा जायेगा 3X3 आसंग सारणी के आधार पर अवलोकित व प्रत्याशित आवृत्तियों की साराणियाँ निम्नांकित हैं :–

अवलोकित आवृत्ति सारणी **प्रत्याशित आवृत्ति सारणी**

A / B	A_1	A_2	A_3	योग
B_1	$(A_1 B_1)$	$(A_2 B_1)$	$(A_3 B_1)$	B_1
B_2	$(A_1 B_2)$	$(A_2 B_3)$	$(A_3 B_2)$	B_2
B_3	$(A_1 B_3)$	$(A_2 B_3)$	$(A_3 B_3)$	B_3
योग	A_1	A_2	A_3	N

A / B	A_1	A_2	A_3	योग
B_1	$\frac{(A_1) X (B_1)}{N}$	$\frac{(A_2) X (B_1)}{N}$	$\frac{(A_3) X (B_1)}{N}$	B_1
B_2	$\frac{(A_1) X (B_2)}{N}$	$\frac{(A_2) X (B_2)}{N}$	$\frac{(A_3) X (B_2)}{N}$	B_2
B_3	$\frac{(A_1) X (B_3)}{N}$	$\frac{(A_2) X (B_3)}{N}$	$\frac{(A_3) X (B_3)}{N}$	B_3
योग	(A_1)	(A_2)	(A_3)	(N)

(ख). प्रत्येक अवलोकित आवृत्ति (**fo** या 0) में तत्सम्बादी प्रत्याशित आवृत्ति ($\int e$ या Σ) घटाकर निम्न सूत्र द्वारा x^2 प्राप्त किया जायेगा–

$$= \quad x^2 = \Sigma \left[\frac{(fo-fe)^2}{fe}\right] \quad \text{या } \Sigma \left[\frac{(0-E)^2}{E}\right]$$

जहाँ – fe या 0 संकते अवलोकित आवृत्ति के लिए है।

fe या E संकेत तत्संवादी प्रत्याशित आवृत्ति के लिए प्रयोग किया गया है।

उदाहरण (**Illustration**) :–

स्थानीय चुनावों में लोग वोट क्यों डालते हैं? यह जानने के लिए एक अध्ययन किया गया। 500 लोगों का एक सर्वेक्षण किया गया तथा लोगों के मकान, मालिक होने तथा वोट डालने के बीच 'क्रास–टेबुलेसन' किया गया तथा निम्न परिणाम सामने आए। x^2 वर्ग का मान निकालिए–

		मकान मालिक		
स्थानीय चुनाव में वोट डालना		हाँ	नहीं	योग
	हाँ	100	50	150
	नही	200	150	350
		300	200	500

हल (**Solution**) :–

मकान मालिक होने को A_1 न होने को α स्थानीय चुनाव में वोट डालने को B वोट न डालने को β द्वारा संकेतन करने पर A और B की 'अवलोकित' और प्रत्याशित आवृत्तियाँ निम्न तालिकाओं मे प्रदर्शित की जायेगी।

अवलोकित आवृत्तियाँ

f0

	A.	α	योग
B	100	50	150
β	200	150	350
योग	300	200	500
	(A)	(α)	N

प्रत्याशित आवृत्तियाँ

fe

	A_1	A_2	योग	
B	$\frac{(A_1) X (\beta_1)}{N} = 90$	$\frac{(\alpha) X (\beta)}{N} = 60$	B=150	(B)
β	$\frac{(A) X (\beta)}{N} = 210$	$\frac{(\alpha) X (\beta)}{N} = 140$	β=350	(β)
योग	(A)=800	(α)=200	योग 500	
	(A)	(α)	N	

$(f - (AB) = \frac{(A)X(\beta)}{N}$=या $\frac{300 \, X \, 150}{500}$ = 90, शेष fe स्तम्भ व पंक्ति के जोड़ों में से घटाकर प्राप्त कर ली जायेगी।

fo	fe	(fo – fe)	$(fo - fe)^2$	$\left(\frac{fo-fe}{fe}\right)^2$
100	90	10	100	100 ÷ 90=1.1111
200	210	−10	100	100 ÷ 210=0.4762
50	60	−10	100	100 ÷ 60=1.6666
150	140	−10	100	100 ÷ 140=0.7143
				x^2 = 3.9682

11.6 आंसजन–उत्तमता (श्रेष्ठता) की जांच (Test of goodness of fit):

काई–वर्ग जाँच को आसंजन या अन्वायोजन की उत्तमता की जाँच के लिए भी प्रयोग किया जाता है। इसमें हमें सिद्धान्त (Theory of expection) और तथ्य (Fact or observation) के अन्तर की सार्थकता (sighifecance) का पता चलता है। वस्तुतः अन्वायोजन–उत्तमता जाँच सैद्धान्तिक और प्रतिदर्श बंटन की अनुरूपता या संगति का परीक्षण है। यदि x^2 का परिकलित मूल्य सारणी से देखे गये π^2 मूल्य से कम है तो अन्वयोजन श्रेष्ठ (Good fit) माना जाता है, अर्थात् अवलोकित और प्रत्याशित आवृत्तियों को वक्र लगभग एक दूसरे के अनुरूप है उनका मामूली सा अन्तर केवल दैव के कारण है, अतः अर्थहीन (Insignificant) है। इसके विपरीत, यदि x^2 का संगणित मूल्य सारणी–मूल्य से अधिक है तो वक्र अन्वायोजन श्रेष्ठ नहीं है (The fit is not good), वास्तविक व प्रत्याशित आवृत्तियों के वक्रों में काफी दूरी है अर्थात् अन्तर अर्थपूर्ण (Segnificnat) है, केवल दैव के कारण नहीं है।

उदाहरण (Illustration) :–

मटर–प्रजनन पर किए गए प्रयोगों से ग्रेगर मेण्डल ने बीजों की निम्न आवृत्तियाँ प्राप्त कीं–

315 गोल व पीलें ; 101 झुर्रीदार व पीले

108 गोल व हरें ; 32 झुर्रीदार व हरे।

योग 556 सिद्धान्त के अनुसार आवृत्तियाँ 9:3:3:1 के अनुपात में होनी चाहिए। सिद्धान्त एवं प्रयोग में सामंजस्य की जाँच कीजिए। (5% सार्थकता स्तर पर स्वातन्त्र्य कोटि 4 और 3 के लिए x^2 का सारणी मूल्य : 9. 488 व 7.815 हैं)।

बीज–समिश्रण	अवलोकित आवृत्ति fo – fe	प्रत्याशित आवृत्ति fe	अन्तर fo – fe	वर्ग $\left(\frac{fo-fe}{fe}\right)^2$	$\left(\frac{fo-fe}{fe}\right)^2$
गोल व पीले	315	$\frac{556 \, X \, 9}{16} = 313$	+2	4	0.128
झुर्रीदार व पीले	101	$\frac{556 \, X \, 3}{16} = 104$	−3	9	0.0865
गोले व हरे	108	$\frac{556 \, X \, 3}{16} = 104$	+4	16	0.1538

झुर्रीदार व हरे	32	$\frac{556 \text{ X } 1}{16} = 35$	−3	9	0.2571
योग	$\sum$ fo=556	$\sum$ fe=556	0		x^2=0.5102

इस प्रकार की सामान्य श्रेणियों में स्वातन्त्र्य–कोटि आवृत्तियों की संख्या में से 1 घटाने पर ज्ञात होती है, अर्थात्–

$$d.f = (n-1) = 4-1 = 3$$

5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर 3 स्वातन्त्र्य–कोटि के लिए सारणी में का x^2 मूल्य 7.815 है। x^2 का निकाला हुआ मूल्य 0.51 है जो कि सारणी मूल्य से बहुत कम है, अतः आसन्जन उपयुक्त या श्रेष्ठ हैं; दूसरे शब्दों में, सिद्धान्त व प्रयोग में काफी मात्रा में सामंजस्य है।

11.7 बोध प्रश्न :

खाली स्थान की पूर्ति करें :–

1. परिकल्पना के अभाव में अनुसंधान कार्य एक...........................क्रिया है।
2. परिकल्पना............................भी और..............................भी हो सकती है।
3. अवधारणााओं का सार्वजनिक रूप से.........................होना आवश्यक नहीं है।
4. किसी समस्या का संभावित हल/सुझाव........................होता है।
5. वही...........................लेनी चाहिए जिसके आँकड़े प्राप्त हों।
6. प्रत्याशित आवृत्ति का संकलन................................है।
7. .... को आसंजन या अन्वायोजन की उत्तमता की जाँच के लिए प्रयोग भी किया जाता है।
8. आसंग–गुणांक निकालने के लिए............................निकाला जाता हैं।

सत्य एवं असत्य छाँटिए :–

1. परिकल्पना का शब्दिक अर्थ पूर्व, चिन्तन होता है।
2. स्वयं सिद्धियाँ, धारणाएँ तथा परिकल्पनाओं में अन्तर नहीं होता है।
3. परिकल्पपना विशिष्ट होता है।
4. गुण समंकों के लिए चर समकों के माप की रीतियों का प्रयोग किया जाता है।
5. N कुल जोड़ को प्रदर्शित करता है।

11.8 बोध प्रश्न के उत्तर :

खाली स्थान की पूर्ति वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. उद्देश्यहीन, 2– एक, अनेक, 3– सत्य :, 4– परिकल्पना : 5– परिकल्पना, 6– fe, 7– काई–वर्ग जाँच, 8– काई वर्ग

सत्य एवं असत्य :

1. सत्य, 2– असत्य, 3– सत्य, 4– असत्य, 5– सत्य।

11.9 स्वपरख आंकिक प्रश्न :

1. परिकल्पना के अर्थ एवं परिभाषा को स्पष्ट कीजिए।
2. परिकल्पना के विविध अवधारणाओं को समझाइए।
3. परिकल्पना के निर्माण के लिए किन–किन स्रोतों की आवश्यकता होती है स्पष्ट कीजिए।
4. काई–वर्ग x^2 से आप क्या समझते हैं स्पष्ट कीजिए।
5. आसंग–सारणी की व्याख्या कीजिए।
6. आसंजन उत्तमता (श्रेष्ठता) की जाँच पर टिप्पणी कीजिए।

/ / / /

इकाई – 12 प्रसरण विश्लेषण एवं अन्य (Anova and others)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य :

इस अध्याय का अध्ययन करने के पश्चात् निम्नलिखित का ज्ञान कर पायेगें।–

- एक ही परीक्षण द्वारा अनेक माध्यों की सजातीयता की जाँच;
- विभिन्न सह–सम्बन्धित परीक्षणों की बीच प्राप्त सह–संबंध गुणांकों के लिए उत्तरदायी स्वतंत्र कारकों का ज्ञान करक पायेगें।
- विभिन्न कारक किस–किस मात्रा में विभिन्न परीक्षणों में विद्यमान है का ज्ञान कर पायेगें।
- विभिन्न समूहों के लिए अनेक चरों पर प्राप्तांक ज्ञात करना तथा इन विभिन्न चरों के प्राप्तांकों का विश्लेषण करके समूहों के मध्य विभिन्न चरों के आधार पर विभेद की संभावना का ज्ञान।

12.1 प्रस्तावना :

प्रस्तुत अध्याय में हम यह अध्ययन करेगें कि दो या दो से अधिक प्रतिदर्श–माध्यों के अन्तरों की सार्थकता का परीक्षण कैसे किया जाता है? इसके अतिरिक्त कुछ परम्परागत तथा बहुतायत से प्रयुक्त होने वाली सांख्यिकीय विधियों जैसे सहसम्बन्ध, प्रसरण विश्लेषण, प्रतीपगमन आदि की चर्चा हुई है। वर्तमान में सामाजिक तथा व्यावहारिक विज्ञानों के अनुसंधान कार्यों में कुछ नवीन प्रविधियों का प्रयोग किया जाने लगा है, जिन्हें बहुस्तरीय समंक विश्लेषण प्रविधियाँ कहा जाता है। कारक विश्लेषण एवं विभेदक विश्लेषण भी बहुस्तरीय समंक विश्लेषण की ही प्रविधियाँ हैं। इस सभी का विस्तार से विस्तृत अध्याय सामग्री आपके समक्ष प्रस्तुत है।

12.2 चरिता (प्रसरण) विश्लेषण की अवधारणा :

टी–परीक्षण (T-test) जिसका वर्णन आगे के अध्यायों में किया गया है। दो प्रतिदर्शों की तुलना उनके मध्यमानों के आधार पर करता है। परन्तु कभी–कभी अनसुंधानकर्त्ता दो से अधिक समूहों के मध्यमानों की तुलना करना चाहता है। इस प्रकार की स्थिति मे टी–परीक्षण का उपयोग कई बार किया जा सकता है लेकिन यह एक लम्बी तथा श्रमसाध्य के साथ–साथ इस बात की भी संभावना रहती है कि केवल संयोगवश ही सर्वाधिकार अन्तर वाले दो प्रतिदर्श मध्यमानों के बीच का अन्तर सार्थक सिद्ध न हो जायें। इन दो आपत्तियों के वजह से दो से अधिक मध्यमानों की तुलना के लिए टी–परीक्षण का प्रयोग उचित नहीं माना जाता है। इसके अतिरिक्त टी–परीक्षण में मानक त्रुटि का मान प्रत्येक बार दो भिन्न–भिन्न प्रतिदर्शों के मानक विचलन पर निर्भर करता है जबकि सभी प्रतिदर्शों के मानक विचलन पर निर्भर करता है जबकि सभी प्रतिदर्शों के समूहन (Pool) से मानक त्रुटि का अधिक अच्छा अनुमान मिल सकता है। यही कारण है कि दो से अधिक मध्यमानों की तुलना के लिए प्रसरण विश्लेषण (Analysis of variance) नामक की प्रविधि का प्रयोग किया जाता है। इसको संक्षेप में एनोवा (ANOVA) भी कहते हैं। ANOVA, Analysis of variance का समुचित रूप है।

अतः दो से अधिक प्रतिदर्श–मध्यों के अन्तरों की सार्थकता की जाँच प्रसरण–विश्लेषण की प्रविधि द्वारा सम्पन्न की जाती है। प्रसरण–विश्लेषण का उद्देश्य परीक्षण द्वारा अनेक माध्यों की सजातीयता (homeogenetiy) की जाँच करना है।

12.2.1 एफ वितरण (F-Distribution) :

इस विधि का प्रतिपादन ब्रिटिश सांख्यिकी विद् सर रोनाल्ड ए0 फिशर (R.A. Fisher) ने किया था। यह विधि एक साथ अनेक प्रतिदर्शों के मध्यमानों की तुलना करके बताती है कि क्या ये सभी, प्रतिदर्श कए ही समष्टि अथवा एक ही जैसी समाष्टियों) से लिये गये हैं अथवा नहीं। अर्थात् यह विधि अनेक मध्यमानों की तुलना करके बताती है कि ये मध्यमान परस्पर सार्थक रूप से भिन्न है अथवा नहीं। पिछले अध्यायों में चर्चा किया जा चुका है कि प्रायः विचलन के वर्ग को ही प्रसरण कहते है अर्थात् σ^2। इसे s^2 के रूप में भी व्यक्त किया जाता है। यहाँ यह समझना आवश्यक है कि प्रसरण–विश्लेषण विधि अनेक समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता ज्ञात करने की सांख्यिकीय विधि है तथा इसका विभिन्न समूहों के प्रसरणों के बीच अन्तर से कोई सम्बन्ध नही हैं। प्रसरण–विश्लेषण शब्द का प्रयोग इसलिए किया जाता है कि यह विधि सभी समूहों के कुल प्रसरण को कुछ भागों में विभक्त अर्थात् विश्लेषित करके उनके आधार पर मध्यमानों के बीच अन्तर की सार्थकता का परीक्षण करती है।

प्रसरण विश्लेषण विधि एफ–वितरण (F-Distribution) पर आधारित है। सर आर0ए0 फिशर ने सन् 1925 में एफ वितरण $Z=(1/2)\log_e (S^2_1/S^2_2)$ प्रस्तुत किया था। इस वितरण को ही आधार बनाकर सन् 1934 में स्नेडेकोर ने दो प्रसरणों के अनुपात (S^2_1/S^2_2) के लिए वितरण तैयार किया और फिशर के सम्मान में एफ–अनुपात (F-Ratio) तथा एफ–वितरण (degree of freedom) नाम दिया। यदि किसी समाष्टि से n_1 तथा n_2 आकार के दो रैन्डम प्रतिदर्श लिए जाएं तथा इनका प्रसरण क्रमशः S_1^2, व S_2^2 हो तब S_1^2 व S_2^2 के अनुपात अर्थात् $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ को $(n_1\text{-}1)$ व $(n_2\text{-}1)$ मुक्तांश (degree of freedom) वाला एफ–अनुपात कहा जायेगा। अतः एफ अनुपात को $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इस प्रकार के अनेक एफ अनुपातों के वितरण को (n-1) व $(n_2\text{-}1)$ मुक्तांश वाला एफ–वितरण कहा

जायेगा। आपने देखा कि एफ–अनुपात तथा एफ वितरण के साथ दो मुक्तांश (n_1-1) व (n_2-1) संबंधित है। इसका आशय यह है कि एफ मुक्तांश (df) हर में आये प्रसरण (S_2^2) के लिए होता है। एफ वितरण धनात्मक रूप से विषम (Positively skeweed) वितरण है तथा इसका वितरण पूर्ण रूपेण दोनों मुक्तांशों पर निर्भर करता है। एफ–वितरण उस समाप्ति के प्रसरण से मुक्त होता है। जिससे प्रतिदर्श छाँटे जाते हैं। अतः मुक्ताशों के विभिन्न युग्मों (Pairs) के लिए भिन्न–भिन्न एफ–वितरण होते हैं।

12.2.2 F- वितरण (F-Distribution) की विशेषताएं :

क. प्रत्येक एक–वितरण का विस्तार 0 से $+\infty$ तक होता है।

ख. एफ–वितरण को अंश (Numerator) तथा हर (Denomenator) की स्वातंत्र्य कोटियों के आधार पर देखा जाता है।

ग. प्रत्येक एक–वितरण एक प्रायिकता बंटन हैं तथा इसका क्षेत्रफल 1 होता है।

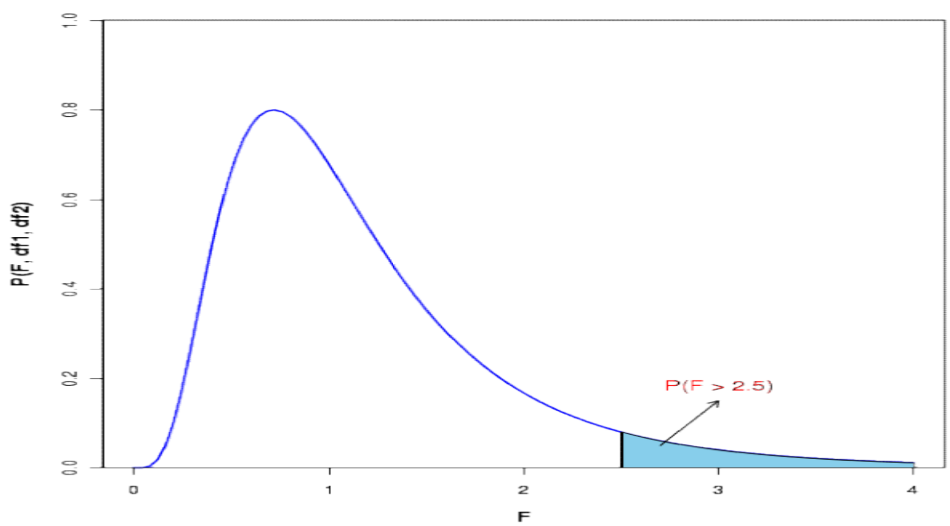
घ. यह एफ सतत् बंटन है, अतः क्षेत्रफल (प्रायिकता) का अनुमान लगाने के लिए दो सीमाओं की आवश्यकता होती है।

ड़. एफ सममित बंटन नहीं है तथा एफ के मूल्य सदैव धनात्मक होते हैं, क्योंकि प्रसरण जब ऋणात्मक नहीं हो सकता, तब प्रसरण का अनुपात ऋणात्मक कैसे होगा?

च. प्रत्येक अंश तथा हर की मुक्तांश के समुच्य के लिए एक पृथक एफ–वितरण होता है, इस प्रकार एफ–वितरण का एक वृहत् परिवार है।

छ. एफ–वितरण का प्रयोग बहुत सावधानीपूर्वक करने की आवश्यकता है, क्योंकि इसका प्रयोग तभी सम्भव है जब दोनों समग्र प्रसामान्य है, इसमें किसी प्रकार की कोई छूट की गुंजाइश नहीं है।

एफ–वितरण (n_1-1=12 तथा n_2-1=16 कोटियों के लिए



चित्र 12.2.1 एक–वितरण

उपरोक्त चित्र एफ वितरण को प्रदर्शित कर रहा है, जबकि अंश तथा हर की मुक्तांश (स्वातंत्र्य कोटिया) 12 तथा 16 है यह प्रदर्शित कर रहा है कि 5 प्रतिशत मूल्य 2.42 से अधिक होगें। सामान्यतया 5% तथा 10% सार्थकता स्तर के लिए एफ वितरण की सारणियाँ उपलब्ध होती हैं। जैसे 5% सार्थकता स्तर पर अंश की मुक्तांश 12 तथा हर का मुक्तांश 16 के लिए मूल्य देखना है, स्तम्भ में 12 तथा पंक्ति में 16 के लिए जो उभयनिष्ठ मूल्य

(Intersectional value) 2.42, एफ–वितरण की अधिकतम सीमा निर्धारित करेगा, परिलक्षित एफ मान यदि इससे अधिक होगा, तो शून्य परिकल्पना अस्वीकृत कर दी जायेगी।

12.3 प्रसरण विश्लेषण की मान्यताएँ :

प्रसरण विश्लेषण निम्नलिखित मूलभूत मान्यताओं पर आधारित है जिनकी पूर्ति आवश्यक है :–

क. **प्रसामान्यता (Normailty)** : इस समाष्टि का वितरण प्रसामान्य होना चाहिए जिसमें से यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन किया गया है। मूल समाष्टि में मानक प्रसामान्य वक्र के सभी मौलिक अभिलक्षण विद्यमान होने चाहिए जिससे कि प्रतिदर्श समाष्टि का प्रतिनिधित्व कर सकें।

ख. **स्वतंत्रता (Independence)** : प्रतिदर्श इकाईयों का चयन यादृच्छिक, सम–सम्भावी औछ स्वतंत्र होना चाहिए। यदि चयन स्वतंत्र नहीं होता है तो सह–सम्बन्ध की उपस्थिति के कारण प्रसरण–विश्लेषण परीक्षण की उपादेयता कुछ कम हो जाती है।

ग. **सजातीयता (Homogneeity)** : उन मूल समाष्टियों के माध्य और प्रसरण जिनसे प्रतिदर्श लिये गये हैं, सजातीय होने चाहिए अर्थात् उनमें सार्थक अंतर नहीं होना चाहिए। सूत्रानुसार–

$$Ho \quad : \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \text{- - - - - - -} \ \mu_k$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = - - \sigma_K^2$$

घ. **संजोज्यता (Additine Property)** : प्रसरण के विभिन्न स्रोतों का कुल प्रसरण के प्रति योगदान संयोजन (Addive) होना चाहिए अर्थात् विभिन्न संघटक–प्रसरणों का योग कुल प्रसरण के बराबर होना चाहिए।

12.4 प्रसरण विश्लेषण की उपयोगिता :

प्रसरण विश्लेषण विधि का उपयोग विज्ञान की, अनेक शाखाओं में विस्तृत प्रयोग होता है। प्रमुख रूप से निम्न क्षेत्रों में इस प्रविधि के अधिकांश अनुप्रयोग किये जाते हैं :–

क– अनेक माध्यों के अन्तरों की जाँच :

दो प्रतिदर्शों की समान्तर माध्यों के अन्तर की सार्थकता जाँचने के लिए बड़े प्रतिदर्शों में सामान्य वितरण के क्षेत्रफल पर आधारित Z- आमाप का तथा छोटे प्रतिदर्शों के लिए स्टुडेन्ट के टी–परीक्षण (Students test) का प्रयोग किया जाता है। परन्तु दो से अधिक अर्थात् अनेक माध्यों के अन्तरों की एक साथ जाँच करने के लिए प्रसरण–विश्लेषण विधि अपनाई जाती है। इससे यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि सभी प्रतिदर्श एक ही सजातीय मूल समष्टि से चुने गये हैं और माध्यों में अन्तर केवल प्रतिचयन त्रुटि के कारण है अथवा अन्तर सार्थक है और अन्य कारणों से हैं।

ख. **प्रसरणों के अन्तर का सार्थकता–परीक्षण** : प्रसरण विश्लेषण में प्रयुक्त एक गुणांक (F-coefficient) या प्रसरण अनुपात (Variation Ratio) का अनुप्रयोग विभिन्न प्रतिदर्शों के प्रसरणों के अन्तर की सार्थकता की जाँच करने के लिए भी किया जाता है।

ग. **द्वि–मार्गी वर्गीकरण में प्रयोग** : जब समंकों को दो अधारों पर अनेक वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है तब भी प्रसरण–विश्लेषण की प्रक्रिया द्वारा सजातीयता का अध्ययन किया जाता है।

घ. **सह–सम्बन्ध एवं प्रतीपगमन की जाँच** : प्रतीपगमन की रैखिकता (lineartiy of regression), सह–सबंध अनुपात की सार्थकता और बहुगुणी–सह–सम्बन्ध गुणांक की सार्थकता का परीक्षण करने के लिए भी प्रसरण–विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है।

इस प्रकार विभिन्न क्षेत्रों में प्रसरण–विश्लेषण शोध–कार्य का एक महत्वपूर्ण और उपयोगी उपकरण है।

12.5 कारक विश्लेषण (Factor Analysis) :

आजकल के अनुसंधानों में बहु–चरीय समंकों के विश्लेषण का प्रचलन बढ़ता जा रहा है। जिसके लिए अनेक बहु–चरीय प्रविधियों का प्रयोग किया जा रहा है। इन्हीं में से एक प्रविधि कारक विश्लेषण प्रविधि हैं। इस विधि में गणना कार्य अत्यन्त जटिल होता है तथा इनमें प्रायः उच्च गणित का प्रयोग करना होता है। इसलिए इस विधि के द्वारा समंक विश्लेषण के लिए प्रायः कम्प्यूटर का उपयोग किया जाता है। फिर भी विधियों के उपयोग की सम्भावना को समझने तथा कम्प्यूटर से प्राप्त परिणामों की समुचित व्याख्या के लिए इन विधियों के सैद्धान्तिक पत्र का ज्ञान अत्यन्त आवश्यक है।

कारक विश्लेषण विधि का प्रतिपादन वस्तुतः परीक्षण प्राप्तांकों के रूप में मापी गई योग्यताओं में व्यक्तिगत भिन्नता के लिए उत्तरदायी चरों को ज्ञात करने के लिए किया गया था। इस विधि में विभिन्न परीक्षणों या चरों पर प्राप्त अंकों के मध्य सह–सम्बन्ध गुणांक (rs) ज्ञात किये जाते हैं तथा फिर इन सह–सम्बन्ध गुणांकों का सांख्यिकीय विश्लेषण करके उन विमाओं (Dimensions) या कारकों (Factors) को ज्ञात किया जाता है जो विभिन्न चरों में कुछ न कुछ मात्रा में उपस्थित है। इन विभागों अथवा कारकों की व्याख्या इस आधार पर की जाती है कि इनका विभिन्न परीक्षणों में क्या भार (weitage) है। इसके लिए किसी विभा या कारक पर अधिक भार रखने वाले परीक्षणों में देखा जाता है कि उनमें ऐसा उभयनिष्ठ अंश (Common Portion) क्या है जो उन परीक्षणों में लगभग नहीं है जिनके लिए इस वीया या कारक पर बहुत कम अथवा नगण्य भार है। अतः कारक विश्लेषण को एक ऐसी सांख्यिकीय विधि के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसके द्वारा अनेक चरों के वर्णित किसी समूह को अपेक्षाकृत कम अन्तर्निहित कारकों के द्वारा अधिक सरलता से प्रस्तुत किया जा सकता है। कारक विश्लेषण की तुलना रसायन शास्त्र के तत्व विश्लेषण से की जा सकती है, जिसमें विभिन्न यौगिकों (Coompounds) को उनके मूल तत्वों (Elements) के रूप में विश्लेषित करके समझा जाता है। अनेक विमाओं वाली योग्यता के सैद्धान्तिक विवेचन को समझने के कार्य मे कारक विश्लेषण एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती है।

12.5.1 कारक विश्लेषण की मान्यताएँ :

कारक विश्लेषण तीन मूल मान्यताओं पर आधारित है। इन तीनों मान्यताओं का ज्ञान कारक विश्लेषण की प्रकृति को समझने के लिए अत्यन्त आवश्यक होने के कारण इन तीनों मान्यताओं को संक्षेप में आगे प्रस्तुत किया जा रहा है।

प्रथम : किसी व्यक्ति के द्वारा किसी परीक्षण पर अर्जित प्राप्तांक (X) दो बातों– प्रथम परीक्षण के द्वारा मापी जा रही विभिन्न परस्पर असम्बन्धित मूल योग्यताओं अर्थात् कारकों को परीक्षण में दिये भार, तथा द्वितीय उस व्यक्ति में विद्यमान उस योग्यताओं के परिमाण पर निर्भर करता हैं। अतः किसी व्यक्ति i के द्वारा परीक्षण पर प्राप्तांक के सापेक्ष मानक प्राप्तांक को रेखीय फलन (liner function) के रूप में निम्नवत् लिखा जा सकता है–

$$Sji = CjiX_1i + C_{j2}X_2 + \ldots\ldots cjg\ x\ gi$$

जहाँ– Sji = i वे व्यक्ति का j वे परीक्षण पर मानक प्राप्तांक

Cji = परीक्षण j का प्रथम कारक के लिए भार

C_{J2} = परीक्षण j का दूसरे कारक के लिए भार और इसी तरह Cj3--- C_{Jg} इत्यादि।

X_{1i} = i वे व्यक्ति में विद्यमान प्रथम कारक का मानक प्राप्तांक के रूप में परिमाण

X_{2i} = i वे व्यक्ति में विद्यमान दूसरे कारक का मानक प्राप्तांक के रूप में परिमाण और इसी तरह Xgi इत्यादि।

द्वितीयः परस्पर सम्बन्धित अनेक परीक्षणों में उभयनिष्ठ कुछ मूलभूत योग्यताएँ (Common Basic Abilities) होती है जिन्हें उभयनिष्ठ कारक कहा जा सकता है। उभयनिष्ठ कारक शब्द से तात्पर्य किसी ऐसे कारक से नहीं है, जो सभी परीक्षणों में विद्यमान हैं। वरन् ऐसे कारक से है जो कम–से–कम दो अथवा अधिक (At least two or more) परीक्षणों में विद्यमान है। अतः किसी परीक्षण में दो तरह के कारक विद्यमान है। अतः किसी परीक्षण में दो तरह के कारक विद्यमान हो सकते हैं, उभयनिष्ठ कारक जो अन्य परीक्षणों में भी विद्यमान होते है तथा विशिष्ट कारक जो केवल उसी परीक्षण में विद्यमान होता है। क्योंकि किसी भी परीक्षण में कुल प्रसरण का एक भाग मापन की त्रुटियों के कारण होता हें अतः किसी भी परीक्षण के कुल प्रसरण को उभयनिष्ठ कारक प्रसरण (specifice factor variance) तथा त्रुटि प्रसरण (Eror variance) में बांटा जा सकता है। समीकरण के रूप में– $\sigma_{T}^{2} = \sigma_{C}^{2} + \sigma_{S}^{2} + \sigma_{E}^{2}$

यदि विभिन्न उभयनिष्ठ कारकों के प्रसरणों को अलग–अलग लिखा जाये तक यह समीकरण निम्न होगा–

$$\sigma_{T}^{2} = \sigma_{C_1}^{2} + \sigma_{C_2}^{2} - - - - - \sigma_{C_r}^{2} + \sigma_{C}^{2} + \sigma_{E}^{2}$$

इसी समीकरण को उसके बायें पक्ष अर्थात् σ_{T}^{2} से भाग करने पर

परास्नातक कक्षाओं में छात्र संख्या

वर्ष	कला संकाय	विज्ञान संकाय	वाणिज्य संकाय	विधि संकाय
प्रथम वर्ष	200	170	165	250
द्वितीय वर्ष	180	140	160	220
तृतीय वर्ष	150	125	145	190

मैट्रिक्स रूप

$$\begin{bmatrix} 200 & 170 & 165 & 250 \\ 180 & 140 & 160 & 220 \\ 150 & 125 & 145 & 190 \end{bmatrix}$$

सारणी 12.5.1

चरों के बीच परस्पर सह–सम्बन्ध गुणांकों को मैट्रिक्स के रूप में निम्नवत् ढ़ंग से प्रस्तुत किया जा सकता है–

सह–सम्बन्ध गुणांक सारणी

चर	X_1	X_2	X_3
X_1	1.00	.45	.38
X_2	.45	1.00	.27
X_3	.38	.27	1.00

मैट्रिक्स रूप

$$\begin{bmatrix} 1.00 & .45 & .38 \\ .45 & 1.00 & .27 \\ .38 & .27 & 1.00 \end{bmatrix}$$

सारणी 12.5.2

विभिन्न प्रकार की मैट्रिक्सों तथा मैट्रिक्सों के योग, अन्तर व गुणा के कुछ सरल उदाहरण आपके समझ को विकसित करने के लिए प्रस्तुत है–

ऐसे मैट्रिक्स जिसमें सभी अंक शून्य होते है, उन्हें शून्य मैट्रिक्स कहा जाता है जैसे–

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ इसे 0 संकेताक्षर से प्रदर्शित करते हैं।

शून्य मैट्रिक्स (Zero Matrix)

जब किसी मैट्रिक्स में पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या समान होती है अर्थात् m=n तब ऐसी मैट्रिक्स को वर्ग मैट्रिक्स (Square Matrix) कहते हैं जैसे–

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 9 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

वर्ग मैट्रिक्स (Zero Matrix)

एक ऐसा वर्ग मैट्रिक्स जिसमें मुख्य कर्ण (Principal Diagonal) के सभी अंकएक तथा शेष अंक शून्य होते है, इकाई मैट्रिक्स कहलाती है तथा इसे I संकेताक्षर से प्रदर्शित करते हैं। जैसे

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इकाई मैट्रिक्स (Unit Matrix)

नोट : शून्य मैट्रिक्स तथा इकाई मैट्रिक्स क्रमशः सामान्य अंकगणित के शून्य तथा एक अंक के समकक्ष (Analogous) होती हैं।

यदि किसी मैट्रिक्स A की पंक्तियों तथा स्तम्भों को एक दूसरे से परिवर्तित (Interchange) कर दिया जाए तक प्राप्त मैट्रिक्स A की क्रांसपोज मैट्रिक्स (Transpose Matrix) कहा जाता हैं जिसे A’ से इंगित किया जाता है। जैसे–

$$A= \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad A^1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

यदि किसी मैट्रिक्स की ट्रान्सपोज मैट्रिक्स 'A' मूल मैट्रिक्स A के समान होती है अर्थात् $A=A^1$ तब ऐसी मैट्रिक्स को सममित मैट्रिक्स (Sgmementrical Matrix) कहते हैं। समयित मैट्रिक्स में मुख्य त्रिकार्ण के दोनों ओर की संख्याएं एक जैसी होती है। सममित मैट्रिक्स में प्रायः निष्कर्षों के नीचे के अथवा ऊपर के भाग की संख्याओं को प्रायः नहीं देते हैं। जैसे–

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ अथवा } \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ & 6 & 1 \\ & & 8 \end{bmatrix} \text{ अथवा } \begin{bmatrix} 3 & & \\ 4 & 6 & \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

सममित मैट्रिक्स

समान आकार की दो मैट्रिक्सों का योग उनके समकक्ष (Crasponding) मानों के योग से बनी मैट्रिक्स होता है। इसी प्रकार से समान आकार की दो मैट्रिक्सों का अंतर उनके समकक्ष मानों के अन्तर से बनी मैट्रिक्स होता है।

$$A= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+B \quad \begin{bmatrix} 3+5 & 5+9 & 2+2 \\ 0+4 & 6+6 & 1+3 \\ 2+5 & 7+0 & 8+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 4 \\ 4 & 12 & 4 \\ 7 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A-B \quad \begin{bmatrix} 3-5 & 5-9 & 2-2 \\ 0-4 & 6-6 & 1-3 \\ 2-5 & 7-0 & 8-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्सों की गुणा में ''पंक्ति से स्तम्भ'' (Row by columm) के नियम का पालन किया जाता है। अतः गुणा करने के लिए मैट्रिक्स 'A' तथा मैट्रिक्स 'B' के क्रमशः स्तम्भ एवं पंक्तियों की संख्या बराबर होनी चाहिए। मैट्रिक्स A को मैट्रिक्स B से गुणा करने पर प्राप्त मैट्रिक्स AB के विभिन्न मान मैट्रिक्स A की विभिन्न पंक्तियों तथा मैट्रिक्स B के विभिन्न स्तम्भों के मानों के गुणनफलों का योग करके प्राप्त किये जाते हैं। मैट्रिक्स A की i वीं पंक्ति तथा मैट्रिक्स B के J वें स्तम्भ के मानों के गुणनफलों का योग मैट्रिक्स AB के I वीं पंक्ति व J वें स्तम्भ पर स्थित मान होता है। अतः मैट्रिक्स A की प्रथम पंक्ति के मानों की गुणा मैट्रिक्स B के प्रथम स्तम्भ के मानों से करने पर प्राप्त गुणनफलों का योग मैट्रिक्स AB की प्रथम पंक्ति व प्रथम स्तम्भ पर स्थित मान होता है। इसी प्रकार से A

की प्रथम पंक्ति व B की द्वितीय स्तम्भ के मानों के गुणनफलों का योग मैट्रिक्स AB की प्रथम पंक्ति व द्वितीय स्तम्भ के मान को बताता है। अतः m x n आकार की मैट्रिक्स को nxk आकार की मैट्रिक्स से गुणा करने पर mxk आकार की मैट्रिक्स प्राप्त होती है। अर्थात्–

$$A\, m \times n \,^{XB}\, nxk = {}^{AB}\, nxk$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2X2+4X1+0X5 & 2X3+4X0+0X2 \\ 3X2+1X1+5X5 & 3X3+1X0+5X2 \\ 3X2+4X1+2X5 & 3X3+4X0+2X2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 32 & 19 \\ 20 & 13 \end{bmatrix}$$

किसी मैट्रिक्स की गुणा शून्य मैट्रिक्स से करने पर गुणनफल के रूप में सदैव ही शून्य मैट्रिक्स ही प्राप्त होती है। अतः

$$AO = O \text{ तथा } OA = O$$

किसी वर्ग मैट्रिक्स की उसी आकार की इकाई मैट्रिक्स से गुणा करने पर वही मैट्रिक्स प्राप्त होती है। अतः

$$AI = A \text{ तथा } IA=A$$

यदि A तथा B दो ऐसी मैट्रिक्स है की AB=I, तब B मैट्रिक्स को A मैट्रिक्स का विलोम कहते हैं तथा A' से लिखते हैं। अतः

$$A\,A' = I = A'\,A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \text{ प्रतिलोम मैट्रिक्स } \quad A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times A' = \begin{bmatrix} 1X3+2X\text{-}4+3X2 & 1X-2+2X1+3X0 & 1X-1+2X\text{-}1+3X1 \\ 2X3+5X-4+7X2 & 2X\text{-}2+5X1+7X0 & 2X-1+5X\text{-}1+7X1 \\ -2X3+-4X-4+-5X2 & -2X\text{-}2+-4X1+-5X0 & -2X\text{-}1+-4X\text{-}1+ -5X1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

एक मैट्रिक्स से दूसरे मैट्रिक्स का गुणा करने के पश्चात् यदि भाग देना हो तो भाग नहीं दिया जात सकता, इसलिए किसी मैट्रिक्स का प्रतिलोम सीधे–सीधे ज्ञात करना सम्भव नहीं है। वस्तुतः प्रतिलोम मैट्रिक्स ज्ञात करने के लिए मैट्रिक्स विजगणित के ज्ञान की आवश्यकता होती है। इच्छुक पाठक अन्यत्र से ज्ञान प्राप्त कर सकते हैं। कम्प्यूटर के द्वारा समंक विश्लेषण कराते समय कम्प्यूटर कार्यक्रम (Software) स्वतः ही प्रतिलोम मैट्रिक्स तैयार कर लेते हैं। इसलिए सामान्य पाठकों के लिए आवश्यक नही है।

12.5.3 कारक विश्लेषण की विधि :

कारक विश्लेषण जिन तीन मान्यताओं पर आधारित है उसी पर कारक विश्लेषण की विधि का प्रतिपादन किया गया है। निम्न उदाहरण से कारण विश्लेषण के प्रत्यय को स्पष्ट किया गया है। दह परस्पर सह–सम्बन्धित परीक्षणों में चार उभयनिष्ठ कारक (Common Factors) हैं। इन परीक्षणों के प्रसरण समीकरणों को उभयनिष्ठ कारक प्रसरण, विशिष्ट कारक प्रसरण तथा त्रुटि प्रसरण के रूप में निम्न ढ़ंग से प्रस्तुत किया जा सकता है–

प्रथम परीक्षण के लिए $1.00 = a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13} + s^2_{14} + e^2_1$

द्वितीय परीक्षण के लिए $1.00 = a^2_{21} + a^2_{22} + a^2_{23} + s^2_2 + e^2_2$

तृतीय परीक्षण के लिए $1.00 = a^2_{31} + a^2_{32} + a^2_{33} + s^2_3 + e^2_3$

चतुर्थ परीक्षण के लिए $1.00 = a^2_{41} + a^2_{42} + a^2_{43} + s^2_4 + e^2_4$

पंचम परीक्षण के लिए $1.00 = a^2_{51} + a^2_{52} + a^2_{53} + s^2_5 + e^2_5$

षष्टम परीक्षण के लिए $1.00 = a^2_{61} + a^2_{62} + a^2_{63} + s^2_6 + s^2_6$

उपरोक्त समीकरण में विभिन्न a गुणांक विभिन्न परीक्षणों के लिए विभिन्न कारकों के कारण भारों (Factor coading) को बताते हैं। यदि इन कारक भारों को मैट्रिक्स के रूप में प्रस्तुत किया जाय तब निम्नवत् मैट्रिक्स प्राप्त होगी जिसे कारक मैट्रिक्स (Factor Matrix) कहते हैं तथा F संकेताक्षर से लिखते हैं, अतः

$$F= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{bmatrix}$$

यदि इस F मैट्रिक्स के स्तम्भों को प्रक्तियों से तथा पंक्तियों को स्तम्भों से बदल दिया जाय तब ट्रांसपोज (Transpose Matrix) प्राप्त हो जायेगी जिसे F^1 संकेताक्षर से लिख सकते हैं। अतः

$$F' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} \end{pmatrix}$$

मैट्रिक्स F को स्तम्भों F^1 से गुणा करने पर–

$$F \times F^1$$

$$= \begin{pmatrix} a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13} & a_{11}\,a_{21} + a_{12}\,a_{22} + a_{13}\,a_{23} \text{----} & a_{11}\,a_{61} + a_{12}\,a_{62} + a_{13}\,a_{63} \\ a_{21}\,a_{11} + a_{22}\,a_{12} + a_{23}\,a_{13} & a^2_{21} + a^2_{22} + a^2_{23} \quad \text{----} & a_{21}\,a_{61} + a_{22}\,a_{23} + a_{23}\,a_{63} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{61}\,a_{11} + a_{62}\,a_{12} + a_{63}\,a_{13} & a_{61}\,a_{21} + a_{62}\,a_{22} + a_{63}\,a_{23} \text{----} & a^2_{61} + a^2_{62} + a^2_{63} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_1^2 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & n_2^2 & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & n_3^2 & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & n_4^2 & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & n_5^2 & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & n_6^2 \end{pmatrix}$$

स्पष्ट है कि उपरोक्त मैट्रिक्स विभिन्न परीक्षणों के मध्य सह–सम्बन्ध गुणांकों को व्यक्त करती है। अतः इसे सह–सम्बन्ध मैट्रिक्स कहा जाता है तथा 'R' संकेताक्षर से लिखा जाता है। यहाँ पर स्पष्ट करना उचित होगा कि इस मैट्रिक्स के विकर्ण (Diagonal) पर स्थित मान परीक्षणों का स्वयं से सह–सम्बन्ध न होकर उभयनिष्ठा (Reduced Corrlation Matrix) भी कहा जाता है तथा जब विकर्ण में n^2 के स्थान पर 1.00 लिखते हैं तो इस मैट्रिक्स को पूर्ण सह–सम्बन्ध (Complete Collection Matrix) कहते हैं। कारक मैट्रिक्स तथा सह–संबंध मैट्रिक्स के सम्बन्ध को सांकेतिक रूप में निम्नवत् लिखा जा सकता है–

$$R = F\,F'$$

यह कारक विश्लेषण का मूल समीकरण है। इस समीकरण के बाँयें पक्ष अर्थात् सह–सम्बन्ध मैट्रिक्स R को किसी समूह पर विभिन्न परीक्षण प्रशासित करके प्राप्त अंकों के मध्य सह–सम्बन्ध गुणांकों की गणना करके ज्ञात किया जा सकता है। परन्तु दाँयें पक्ष अर्थात् कारक मैट्रिक्स F अथवा ट्रांसपोज मैट्रिक्स F' को सीधे–सीधे ज्ञात करना सम्भव नहीं है। वस्तुतः सह–सम्बन्ध मैट्रिक्स R की सहायता से कारक मैट्रिक्स F को ज्ञात करना ही

कारक विश्लेषण की मुख्य समस्या है। कारक मैट्रिक्स की सहायता से सह–सम्बन्ध मैट्रिक्स ज्ञात करना सरल है। परन्तु सह–सम्बन्ध मैट्रिक्स की सहायता से कारक मैट्रिक्स तैयार करना एक जटिल कार्य है। अतः कारक विश्लेषण की समस्या किसी सह–सम्बन्ध मैट्रिक्स से प्रारम्भ होती है तथा इसकी परिणिति कारक मैट्रिक्स की प्राप्ति में निहित रहती है।

12.6 विभेदक विश्लेषण (Discrimenat Analysis) :

विभेदक फलन विश्लेषण एक ऐसी सांख्यिकीय विधि है, जो दो या दो से अधिक समूहों के बीच अनेक चरों पर अन्तरों का एक साथ अध्ययन करती है। आपने समझा है कि कारक विश्लेषण विधि में किसी एक प्रतिदर्श से प्राप्त अनेक चरों के प्राप्तांकों के बीच के सह–सम्बन्ध गुणांकों का विश्लेषण करके उन चरों के संरचनात्क घटकों को ज्ञात किया जाता है। इसके विपरीत विभेदक विश्लेषण एक ऐसी विधि है जिसमें कई विभिन्न समूहों के लिए अनेक चरों पर प्राप्तांको का विश्लेषण करके समूहों के मध्य विभिन्न चरों के आधार पर विभेद की संभावना विवाहित तथा अविवाहित व्यक्तियों के दो समूहों में से प्रत्येक व्यक्ति को तीन चरों– आयु (X_1), शिक्षा स्तर (X_2) तथ रोजगार आयु (X_3) पर मापा गया है। शोधकर्त्ता जानना चाहता है कि क्या इन तीन चरों के प्राप्तांकों के आधार पर विवाहित तथा अविवाहित व्यक्तियों में विभेद किया जा सकता है तथा यदि ऐसा करना सम्भव है, तब इस प्रकार के विभेदीकरण का सर्वोत्तम तरीका क्या हो सकता है? इस प्रकार भी कह सकते है कि शोधकर्त्ता की समस्या हैं कि इन तीन चरों पर प्राप्त अंकों के आधार पर किसी व्यक्ति के विवाहित अथवा अविवाहित होने का पूर्वकथन करना सम्भव है अथवा नहीं, तथा यदि ऐसा करना संभव है तब किस प्रकार से ऐसा किया जा सकता है। विभेदक फलन विश्लेषण विधि इस प्रकार की समस्या का समाधान प्रस्तुत करती हैं।

समूहों के मध्य विभेद करने के लिए जिन चरों का उपयोग किया जाता है उन्हें विभेदक चर आयु (Discrimenant Variables) कहते हैं। विभेदक विश्लेषण के द्वारा विभेदक फलन (Discriminant function) ज्ञात किया जाता है। अतः विभेदक फलन विभेदक चरों को एक चर के रूप में संयुक्त करने की एक समीकरण होती है–

$$Y= w_1x_1 + W_2 x_2 + w_3 x_3$$

जहाँ $Y =$ विभेदक फलन प्राप्तांक

$X_1 =$ प्रथम चर पर प्राप्तांक

$X_2 =$ द्वितीय चर पर प्राप्तांक

$X_3 =$ तृतीय चर पर प्राप्तांक

$W_1 =$ प्रथम चर के लिए विभेदक फलन में भार

$W_2 =$ द्वितीय चर के लिए विभेदक फलन में भार

$X_3 =$ तृतीय चर के लिए विभेदक फलन में भार

अतः स्पष्ट है कि विभिन्न चरों के प्राप्तांकों तथा उनसे सम्बन्धित भारों के गुणनफलों के योग से विभेदक फलन प्राप्तांक प्राप्त होता है।

12.6.1 विभेदक फलन विश्लेषण के उद्देश्य :

विभेदक फलन विश्लेषण के उद्देश्य को प्रश्न रूप में निम्नवत् लिखा जा सकता है :–

(क). मापे गये चरों में से कौन–कौन से चर विभिन्न समूहों के मध्य अन्तर करने में उपयोगी सिद्ध हो सकते हैं?

(ख). इन चरों को गणितीय समीकरण के रूप में किस प्रकार से संयुक्त करके प्रस्तुत किया जा सकता है?

(ग). उपरोक्त ढ़ंग से प्राप्त समीकरण के द्वारा किये गये पूर्व कथन की परिमार्जितता (Accurancy) क्या है?

विभेदक फलन विश्लेषण इन तीनों प्रश्नों का उत्तर प्रस्तुत करता है।

12.6.2 विभेदक फलन विश्लेषण की मान्यताएँ :

अन्य प्राचलिक सांख्यिकीय विधियों के समान विभेदक विश्लेषण विधि भी समंकों के संबंध में कुछ मान्यताओं पर आधारित है। जो निम्नलिखित है–

क. विभिन्न समूह परस्पर अपवर्जी है अर्थात् कोई भी प्रयोज्य केवल एक ही समूह का सदस्य हो सकता है।

ख. सभी विभेदक चरों का मापन अन्तरित अथवा आनुपातिक स्तर पर किया गया है अर्थात् उनके लिए मध्यमान तथा मानक विचलन की गणना करना सम्भव है।

ग. अलग–अलग विभेदक चरों के बीच उच्च स्तरीय सह–संबंध नहीं है। किसी चर से घनिष्ठ रूप से संबंधित अन्य चर कोई विशेष अतिरिक्त सूचना प्रदान नहीं कर पाते है।

घ. विभिन्न विभेदक चर सभी समूहों में बहु–सामान्य वितरण (Multiple normal Distribution) रखते हैं अर्थात् अन्य चरों के सभी मानों के लिए प्रत्येक चर का वितरण सामान्य प्रायिकता वक्र के अनुरूप है।

ड़. प्रत्येक विभेदक चर के लिए विभिन्न समूहों का प्रसरण (variance) लगभग समान है।

च. विभेदक चरों के प्रत्येक युग्म के लिए विभिन्न समूहों का सह–प्रसरण (Co-Vainance) लगभग समान है।

शोधकर्त्ता जब इस विधि का प्रयोग करता है तो उसे निश्चिय ही इन मान्यताओं की पूर्ति सुनिश्चित कर लेनी चाहिए।

12.7 बोध प्रश्न :

खाली स्थान की पूर्ति करें–

1. प्रसरण–विश्लेषण अनेक माध्यों की.............................. की जाँच करता है।
2. प्रसरण विश्लेषण...............................पर आधारित है।
3. प्रत्येक एक–वितरण एक.............................. बंटन है।
4. बहुचरीय समंकों के विश्लेषण के लिए............................ प्रविधियों का प्रयोग किया जाता है।
5. कारक विश्लेषण.............................. मूल मान्यताओं पर आधारित है।
6. मैट्रिक्सों की गुणा में.......................... के नियम का पालन किया जाता है।

सत्य एवं असत्य छाँटिए :–

1. कारक विश्लेषण जिन तीन मान्यताओं पर आधारित है उसी पर कारक विश्लेषण की विधि का प्रतिपक्ष किया गया है।
2. विभेदक फलन विश्लेषण दो या दो से अधिक समूहों के बीच अनेक चरों पर अंतरों का एक साथ अध्ययन करती है।
3. एफ–वितरण का विस्तार 0 से $-\infty$ तक होता है।
4. ANOVA को Analysis of Variance संक्षिप्त रूप में जाना जाता है।

12.8 बोध प्रश्नों का उत्तर :

खाली स्थान की पूर्ति करें–

1. सजातीयता, 2. एफ–वितरण, 3. प्रायिकता, 4. बहुचरीय, 5. तीन, 6. पक्ति से स्तम्भ।

सत्य एवं असत्य –

1. सत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. असत्य, 5. सत्य।

12.9 स्वपरख प्रश्न :

1. प्रसरण विश्लेषण से आप क्या समझते हैं?
2. एक–वितरण (F-Distribution) से आप क्या समझते है। इसके विशेषताओं का उल्लेख कीजिए।
3. प्रसरण विश्लेषण का उपयोग किन–किन क्षेत्रों में किया जाता है?
4. कारक विश्लेषण से आप क्या समझते हैं?
5. कारक विश्लेषण की मान्यताओं को लिखिए।
6. मैट्रिक्स विजगणित से आप क्या समझते है?
7. कारक विश्लेषण की गणना की विधि का उल्लेख कीजिए।
8. विभेदक विश्लेषण पर टिप्पणी कीजिए।

इस खण्ड के लिये कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Jain J.R. and S.C. (2013-14), Business statistics New Delhi, V K Global Pubication Pvt. Ltd.
2. राय पारसनाथ (1982), अनुसंधान परिचय : इलाहाबाद।
3. श्रीवास्तव डी0एन0 एवं श्रीवास्तव वी0एन0 (2010), अनुसंधान विधियाँ : साहित्य प्रकाशन आगरा।
4. शुक्ल एस0एम0 एवं सहाय एस0पी0 (2013), परिमाणात्मक तकनीकें एवं शोध पद्धतियाँ : साहित्य भवन पब्लिकेशन्स।
5. शर्मा आर0ए (2013), शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया, मेरठ : आर0 लाल बुक, डिपो।

/ / / /

उ० प्र० राजर्षि टण्डन
मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

M.Com.-201
(शोध प्रविधि)
Reserarch Methodology

खण्ड – 4
सांख्यिकीय परीक्षण
(Statistical Test)

खण्ड 4 '**सांख्यिकीय परीक्षण**' इस खण्ड में शोधार्थी द्वारा किये गये आँकड़ों की सत्यता का परीक्षण करने के लिए विभिन्न विधियों का उल्लेख किया गया है।

इकाई – 13 में अवधारणा से सम्बन्धित विभिन्न पहलुओं का विषद वर्णन है।

इकाई – 14 में आधुनिक परीक्षण की तनीकों का विस्तृत वर्णन है।

इकाई – 15 में प्रतिदर्शजो के लिए सुप्रसिद्ध परीक्षणों का उल्लेख विस्तृत रूप में किया गया है।

इकाई – 16 में कम्प्यूटर के शोध मे अनुप्रयोग के लिए मार्गदर्शन दिया गया है।

इकाई – 13 शोध प्रविधि में सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी का उपयोग

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य :

एक शोध का विद्यार्थी इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् निम्न को जान पायेगा–

- सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी क्या हैं?
- एक्स्पलोटिंग विडोंज को कैसे संचालित किया जाता है?
- वर्कशीट क्या निर्माण कैसे किया जाता है?
- वायसियन विश्लेषण क्या है? तथा
- सूचना प्रौद्योगिकी का अन्य क्षेत्रों में क्या उपयोगिता हैं?

13.1 प्रस्तावना :

आज का युग सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी का हैं, शोध करने के पश्चात् उसे संबंधित तक पहुँचाने एवं शोध की जटिलताओं को सामान्थिकरण करने में संचार प्रौद्योगिकी की अहम भूमिका है। यह इकाई इस बात का अध्ययन करायेगा जिसमें कम्प्यूटर के विंडोज पर कार्य कैसे किये जाते है? वर्कशीट का निर्माण कैसे किया जाता है तथा वायसियन विश्लेषण कैसे कार्य करता है। यह इस बात का भी अध्ययन करायेगा जिससे सूचना प्रौद्योगिकी का विभिन्न क्षेत्रों में क्या उपयोगिता हैं?

13.2 एक्सप्लोरिंग विंडोज (Exploring Winodws) :

जिस प्रकार एक कार को चलाने के लिए एक ड्राइवर की आवश्यकता होती है उसी प्रकार एक कम्प्यूटर को चलाने के लिए ऑपरेटिंग सिस्टम की आवश्यकता होती है।

विंडोज एक ऑरेटिंग सिस्टम है, जो विभिन्न प्रोग्राम्स का समूह है। यह कम्प्यूटर को क्या करें? और कैसे करें का निर्देश देता है। विंडोज उपयोगकर्त्ता तथा कम्प्यूटर के बीच चित्रों, आकृतियों एवं टेक्स्ट के द्वारा संपर्क स्थापित करता है। विंडोज में एक साथ कई एप्लीकेशन पर हम कार्य कर सकते हैं।

वर्तमान में विडोंज के कई संस्करण है। वर्ष 1995 में विंडोज का अधिक विकसित संस्करण (Version) विंडोज–95 आया था। जो काफी प्रचलित हुआ वर्तमान में सबसे अधिक प्रचलित ऑरेटिंग सिस्टम माइक्रोसॉफ्ट विन्डोज, मैक–ओ.एस. (Mac 05), ऐन्ड्रायड ओ0एस0 (Android OS), लाईनक्स (Linux), अबुन्तू (Ubuntu), क्रोम ओ0एस0 (Chrome 0.5) तथा फेडोरा (Fedora) है। विंडोज के प्रत्येक संसंकरण की अपनी–अपनी विशेषताएं हैं।

आपरेटिंग सिस्टम सुंगणक की सभी क्रियाओं को संचालित एवं नियंत्रित करता है। यह विभिन्न प्रोग्राम का समूह होता है। इसे 'मास्टर कन्ट्रोल प्रोग्राम' भी कहते है।

(नोटा यहाँ पर उपरोक्त पाँचों 0.5 का इयेज लगाना है।)

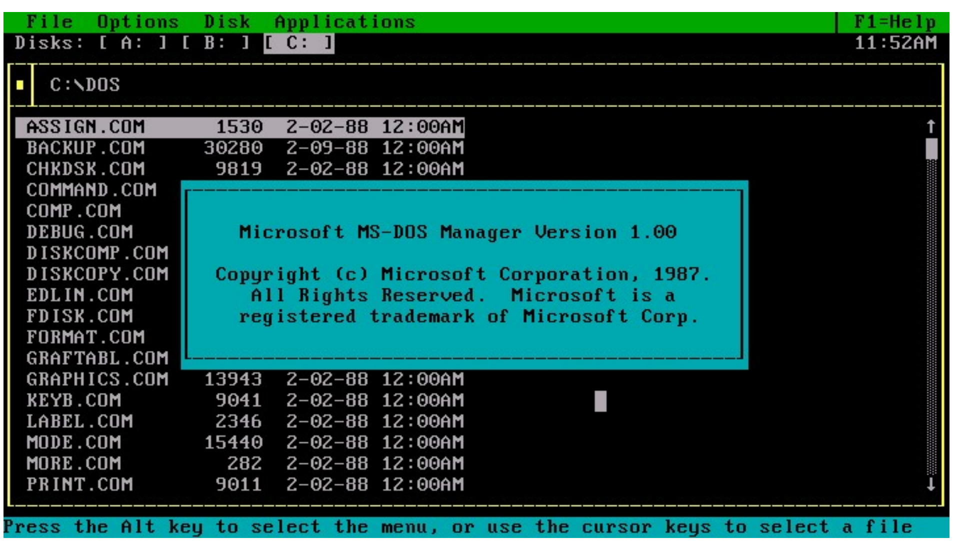
आपरेटिंग सिस्टम मुख्यतः दो प्रकार के होते हैं–

क. टेक्स्ट आधारित आपरेटिंग सिस्टम

ख. ग्रफिक यूजर इंटरफेस आधारित (GUI) ऑरेटिंग सिस्टम

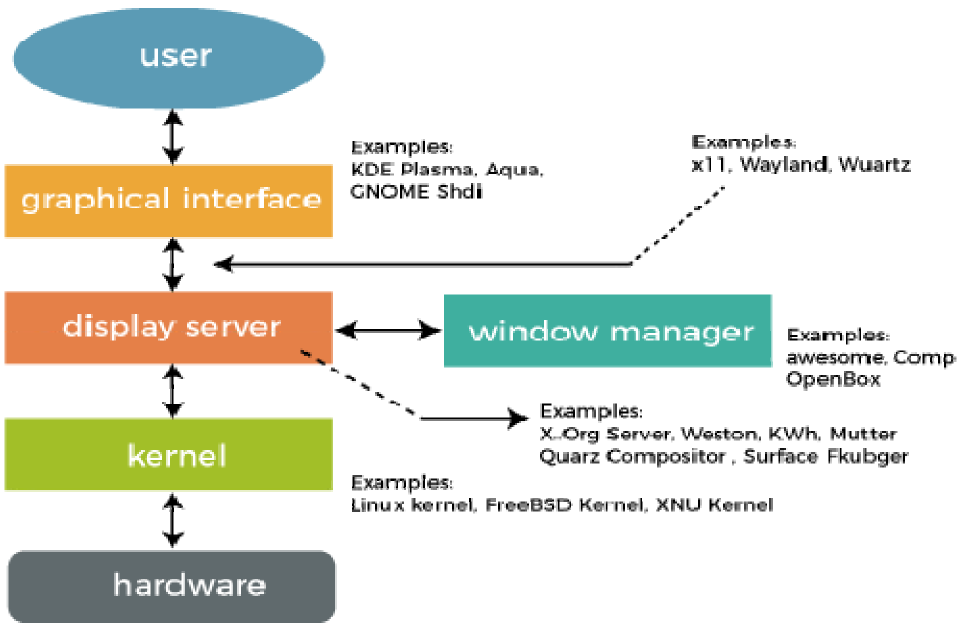
क. ग्रफिक आधारित आपरेटिंग सिस्टम :

एसम0एस0 डोस एक टेक्स–आधारित ऑरेटिंग सिस्टम है, जिसका अर्थ है कि आधारित उपयोगकर्त्ता डेटा इनपुट करने के लिए की बोर्ड के साथ काम करता है, और प्लेन टेकस्ट में आउटपुट प्राप्त करता है। बाद में एम0एस0 डॉस (MS-DOS) में अक्सर काम को अधिक सरल और तवरित बनाने के लिए माउस और ग्राफिक्स का उपयोग करने वाले प्रोग्राम होने लगे।



ख. ग्रफिक यूजर इंटरफेस आधारित (GUI) ऑरेटिंग सिस्टम :

यह एक प्रकार का कम्प्यूटर सॉफ्टवेयर है जो उपयोगकर्त्ताओं क्या बटन, मेनू, स्क्रॉल बार आदि जैसे दृश्य तत्वों का उपयोग करके कम्प्यूटर को नियंत्रित करने की सुविधा देता है। यह आमतौर पर एक विंडो, एक टूलबार और एक वैकल्पिक स्टैटस बार से बना होता है। उदाहरण के लिए एक डेस्कटॉप ऑफरेटिंग सिस्टम, जैसे कि 05x यें एक मेनूबार और छोटे माउस के साथ Windows शामिल है। जिन्हे आसानी से माउस का उपयोग करके नेविगेट किया जा सकता है।

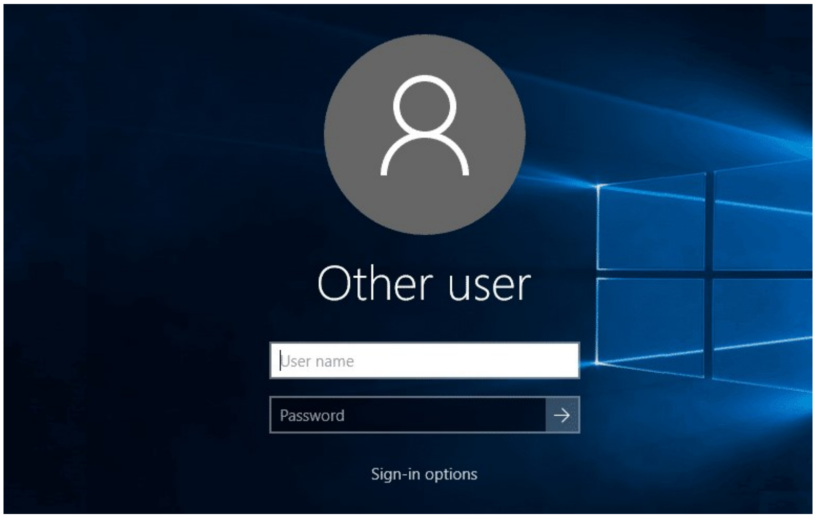


विंडोज–10 के साथ शुरूआत कैसे करें?

विंडोज–10 के साथ शुरूआत करने के लिए निम्न प्रक्रिया का अनुपालन करना पड़ता है–

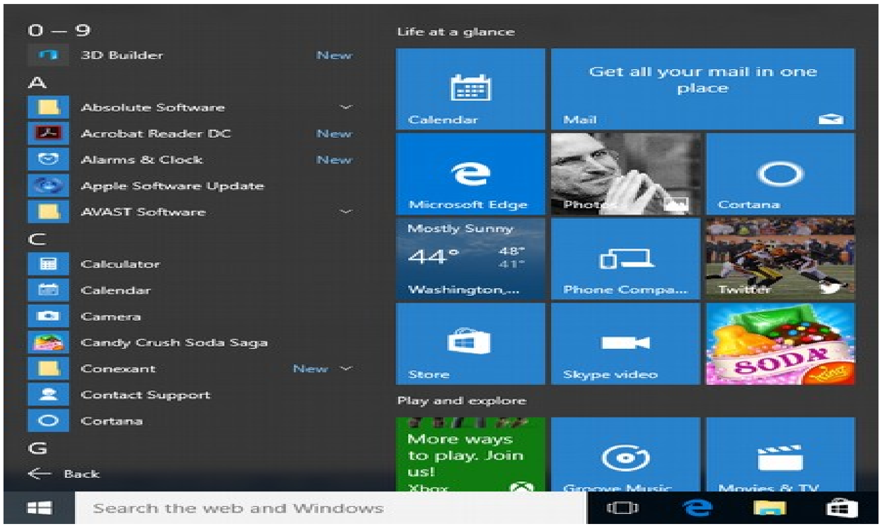
13.2.1 विंडोज 10 में साइन इन करना :

जब आप विंडोज 10 को सबसे पहले उपयोग करेगें तो आपको एक Microsoft account बनाने के लिए कहा जायेगा और यदि आपका account पहले से बना हुआ है तो आपकों उस खाते में signin करना होगा। ऐसा करने के लिए बॉक्स में अपना पासवर्ड टाइप करें और Enter दबाएँ।



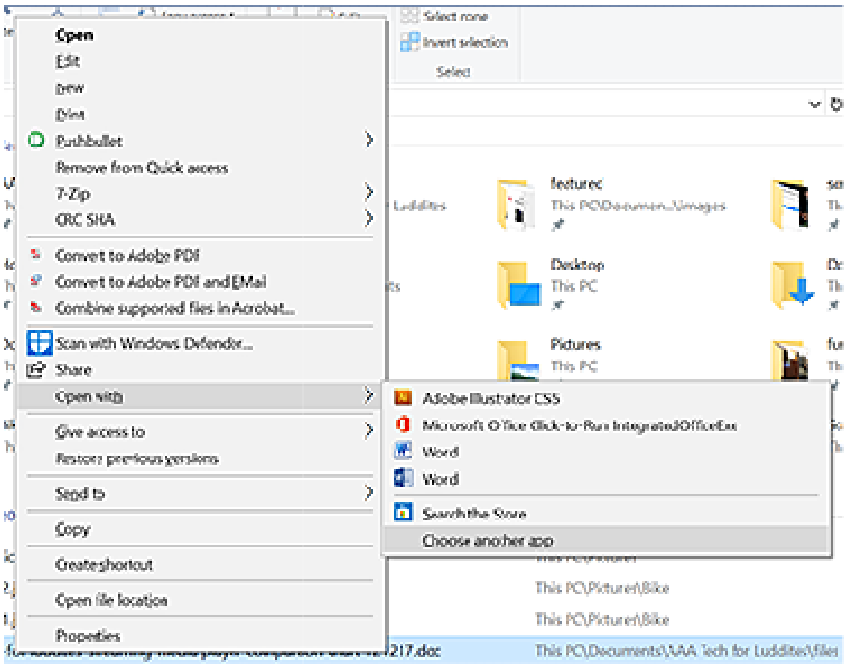
13.2.2 डेस्कटॉप को नेविगेट करना (**Navigating the desktop**) :

जब आप विंडोज 10 को सबसे पहले उपयोग करेगें तो आपको एक Microsoft account बनाने के लिए कहा जायेगा और यदि आपका account पहले से बना हुआ है तो आपकों उस खाते में signin करना होगा। ऐसा करने के लिए बॉक्स में अपना पासवर्ड टाइप करें और Enter दबाएँ।



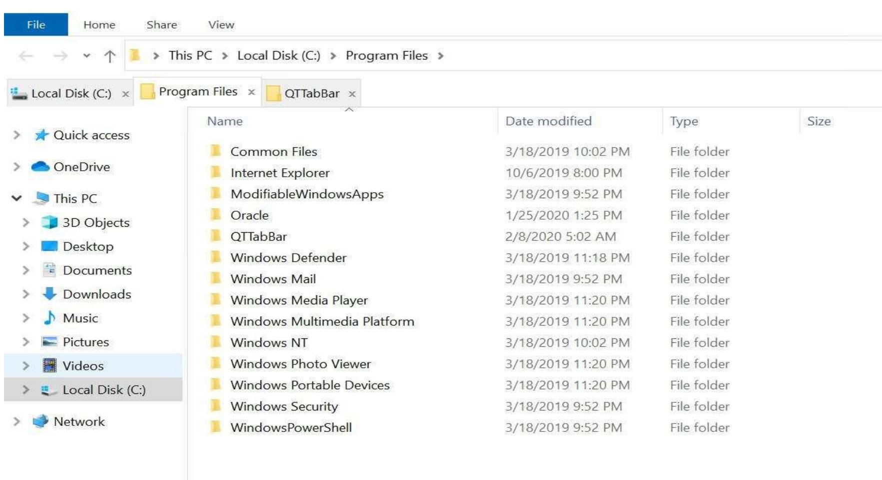
13.2.3 एप्लीकेशन खोलना (**Opening application**) :

यदि आप अपने कम्प्यूटर पर किसी प्रोग्राम को खोलना चाहते हैं तो स्टार्टा मेनू का उपयोग करें, जैसे विंडोज के पुराने वर्णन में करते थे। ऐसा करने के लिए नीचे बांस कोने में स्टार्ट बटन पर क्लिक करें फिर वांछित एप्लिकेशन चूने। यदि आप एप्लिकेशन की दूरी लिस्ट देखना चाहते हैं तो All Apps पर क्लिक करें।



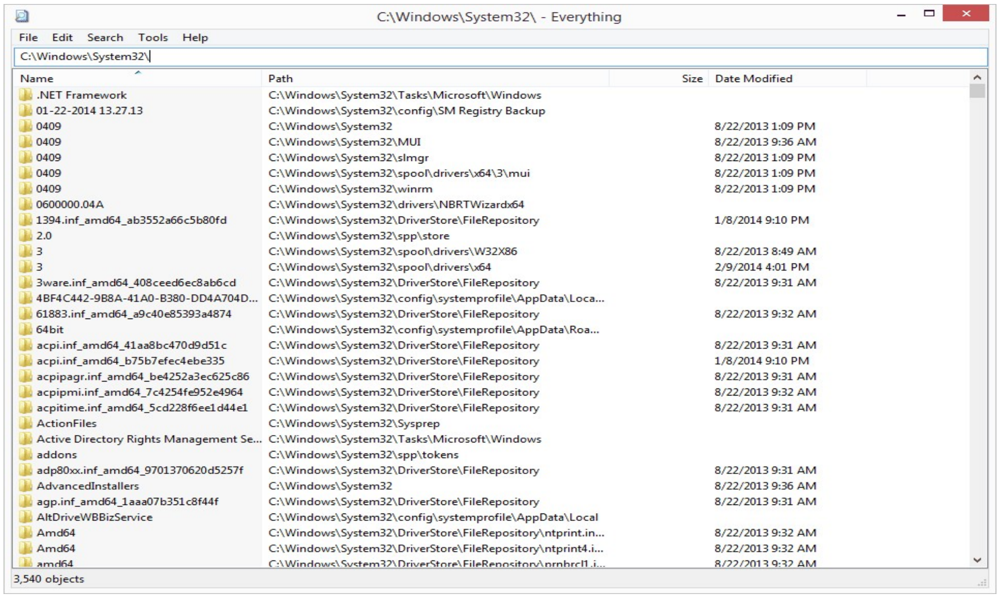
13.2.4 फाइलों के साथ काम करना (**Working with files**) :

यदि आप अपने कम्प्यूटर पर किसी प्रोग्राम को खोलना चाहते हैं तो स्टार्टा मेनू का उपयोग करें, जैसे विंडोज के पुराने आप अपनी फाईल और फोल्डरों का प्रबंधन करने के लिए फाइल एक्पलोर खोलने के लिए टास्कबार पर फाइल एक्सप्लेयर आइकन पर क्लिक करें या अपने डेस्कटॉप पर किसी भी फोल्डर पर डबल क्लिक करें।



13.2.5 फाइल्स और एप्प को सर्च करना (**Searching for filles and apps**) :

अपने कम्प्यूटर पर कुछ खोजने के लिए–एक विशिष्ट फाइल या एप्लिकेशन की तरह स्टार्ट बटन पर क्लिक करें, फिर आप जो भी फाईल या एप्प सर्च करना चाहते हैं उसे टाइप करें। वैकल्पिक रूप से आप सर्च करने के लिए की बोर्ड पर विंडोज को दबा सकते हैं।

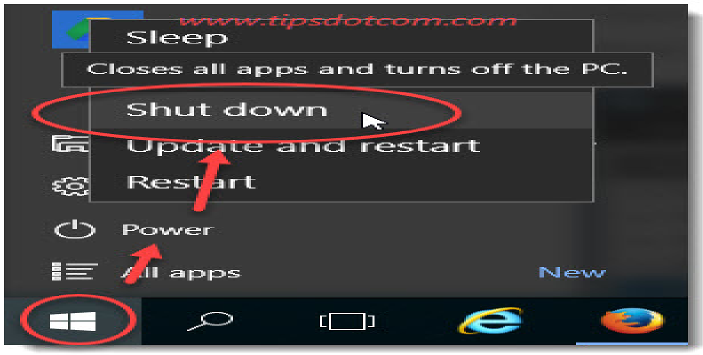


13.2.6 सेटिंग को एडजस्ट करना (**Adjusting your setting**) :

आप अपने कम्प्यूटर पर अपने नेटवर्क और डिस्पेल विकल्पों की तरह सबसे महत्वपूर्ण सेटिंग्स को बदलने के लिए सेटिंग एप्प का उपयोग कर सकते हैं। एप्प खोलने का चयन करें। आप अपनी सेटिंग्स को एडजस्ट करने के लिए Control Panel का भी उपयोग कर सकते है, जैसे विंडोज के पुराने वर्णन में करते हैं। हालॉकि कुछ विकल्प है, जो केवल सेटिंग्स एप्प से ही एक्सेस किये जा सकते है जैसे कि एक नया यूजर जोड़ना।

13.2.7 कम्प्यूटर सेटिंग को एडजस्ट करना (**Shutting down your computer**) :

जब आप अपने कम्प्यूटर का उपयोग कर रहें हैं, तो इसे ठीक से बंद करना महत्वपूर्ण है। ऐसा करने के लिए, स्टार्टा बटन पर क्लिक करें, फिर **Power Shout down** चुनें।



13.3 वर्कशीट का निर्माण (**Creation of worksheet**) :

आज तकनीकी के इस युग में जहाँ ज्यादातार काम कम्प्यूटर पर ही होता है ऐसे में कम्प्यूटर के कई एप्प और उनसे जुड़ी जानकारी होना आवश्यक हो गया है। कम्प्यूटर पर सबसे ज्यादा इस्तेमाल होने वाली Application में एम0एस0 एक्सेल का नाम प्रमुखता से आता है। एक्सेल, एम0एस0 आफिस का एक महत्वपूर्ण Application Programm है जो ज्यादातर कार्यालय में प्रयोग होता है। एक्सल में खुलने वाली वर्कशीट का उपयोग कर ही आज ज्यादातर लोग एकाउटिंग और डाटा से जुड़ कई महत्वपूर्ण कामों को पूरा करते है।

13.3 वर्कशीट क्या होती है? :

वर्कशीट मुख्य रूप से Coll का एक संग्रह है जहॉ आप डेटा रखते है और उसमें हेर–फेर करते है। अगर क्षेत्र के हिसाब से आप जाए तो MS Excel में Row बार के दायें ओर व Column बार के नीचे का क्षेत्र वर्कशीट कहलाता है। वर्कशीट जिसे spreadsheet के नाम से भी जाना जाता है। यह rows और कॉलम का जाल (Crrid) होता है, इसके द्वारा एक जैसी, सूचनाओं की फाइल्स को एक जगह एकत्रित करने में आसानी होती है। Worksheet को हमेशा Workbook में स्टोर किया जाता है। इसका विस्तारक Extension-XLS होता है। एक्सेल में आप एक साथ वार्कशीट में डाटा टाइप कर सकते हैं उनमें संशोधन कर सकते है, और अलग–अलग वार्कशीट के आधार पर गणना भी कर सकते है।

13.3.1 वर्क बुक का निर्माण कैसे करें (**How to creat worksheet**) :

एक्सल में वर्कबुक बनाने के कई तरिकें हैं। इसके लिए आप या तो नई वर्कबुक बना सकते है या फिर कोई भी existing workbook को चुन कर उसमें। कम कर सकते हैं, एक्स में नई workbook बनाने के लिए File Menu- New पर क्रमशः क्लिक करेगें इसके बाद जिस भी फोल्डर में जाकर उस फाइल को चुनें। ऐसा करते ही आपकी existing workbook आपके स्क्रीन पर खुल जायगी। shortcut-key से खोलने के लिए workbook पर जाकर Ctrl-N एक साथ दबाने पर फाईल खुल जायेगी।

13.3.2 वर्कशीट में प्रवेश कैसे करें (**How to do entry in worksheet**) :

Ms-Excel में डाटा हमेशा active cell में enter किया जाता है। इसीलिए एंट्री करते समय सबसे पहले हमें किसी भी सेल का माउस पाइंटर से क्लिक करके सक्रिय करना होता है। हम एक साथ एक से अधिक सेल का चयन भी कर सकते हैं और सेल्स लगभग 255 अक्षर तक का डाटा स्कोर कर सकता है। ये डाटा किसी की फार्म में हो सकता है। आप चाहें तो नंबर, लेटर या फिर कोई भी चिन्ह इसमें अंकित कर सकते हैं। अगर किसी सेल में डाटा एंटर करते वक्त कोई गलती हो जाती है तो हम उसी समय बैक स्पेश कि दबाकर उसी ठीक कर सकते है।

13.3.3 वर्कशीट को सुरक्षित कैसे करें? (**How to save worksheet**) :

एक्सल की वर्कशीट में आपके द्वारा किये गये कार्य को एक फाइल बनाकर सेव कर सकते हैं। ऐसा करने पर आपके कम्प्यूटर की डिस्क ये आपके फाईल को स्थायी रूा से सेव कर लिया जाता है। फिर आप इस फाईल को चाहें जितनी बार खोल सकते हैं और अपना इनपुट किया हुआ डाटा देख सकते हैं। अपनी वर्कशीट की फाईल को सेव करने के लिए सबसे पहले आपको फाईल मिन्यू के सेव एस कमांड पर क्लिक करना होगा। इसके बाद एक सेव एस डायलॉग बाक्स प्रदर्शित होगा। इस डॉयलाग बाक्स में रक्षित फोल्डर का चयन करके अपनी फाईल को एक नाम देकर आप सेव कर सकते हैं।

13.4 वॉययिन विश्लेषण (**Bayesian Analysis**) :

विगत कुछ वर्षों में बायोसियन दृष्टिकोण व्यापक रूप से नैदानिक परीक्षणों शिक्षा मनोविज्ञान ने अनुसंधान और निर्णय विश्लेषण के लिए लागू किया गया है। हांलाकि कुछ सांख्यिकविद् अभी भी इसे सापेक्ष आवृत्ति पर आधारित शास्त्रीय सिद्धान्त के लिए एक दिलचस्प बदलाव मानते हैं।

13.4.1 मूलभूत अवधारणा :

वायॉसियन संभावना सांख्यिकी का आधार है। यह संभाव्यता को एक अमूर्त अवधारणा के रूप में व्याख्या करता है। वॉयसियन सांख्यिकी यें, एक संभावना को परिकल्पना के रूप में प्रस्तुत किया जाता है जो और 1 के बीच कोई भी मात्रा हो सकती है यदि सत्य मान अनिश्चित है। मौटे तौर पर बायसियन संभाव्यता पर दो विचार हैं जो संभाव्यता की अवधारणा को विभिन्न तरीकों से व्याख्या करते हैं। वस्तुनिष्ठ वादियों के लिए संभाव्यक्ता वस्तुनिष्ठ रूप से प्रस्तावों की संभात्यता को मापती है। एक प्रस्ताव की संभावना एक उचित विइबास से मेल खाती है। व्यक्ति परक वादियों के लिए संभाव्यता एक व्यक्तिगत विश्वास से मेल खाती है। तर्कसंगतता और सुसंगतता उन संभावनाओं को बाधित करती है जो किसी के पास हो सकती है लेकिन उन बाधाओं के भीतर पर्याप्त भिन्नता की अनुमति देती है।

13.5 **शोध प्रविधि में सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी के अन्य उपयोग :**

शोध के क्षेत्र में सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी का अनुप्रयोग काफी हद तक ज्ञान के संचय प्रक्रिया को सुविधाजनक बनाने की क्षमता के कारण होता है, जो कि जांच की एक मजबूत प्रणाली के निर्माण के लिए आवश्यक शर्त है। शोध में आई.सी.टी. के जो प्रासंगिक क्षेत्र है वे निम्नलिखित तीन प्रकार के हैं :—

क. आँकड़े संग्रह के पूर्व और विश्लेषण में आई.सी.टी. की उपयोगिता :

शोध में आई.सी.टी. के प्रयोग से अनुसंधान कार्यों की डिजाइन और तैयारी के अपने प्रत्येक चरण का पता लगाया जा सकता है। जैसा कि हम अनुसंधान डिजाइन के इन चरणों में से प्रत्येक का पता लगाएंगी। हम यह समझने में सक्षम होगें कि आई.सी.टी. में कैसे उतार–चढ़ाव होता है। आइए पहले इसे स्तर पर आई.सी.टी. के उपयोग को समझने के लिए आंकड़े विश्लेषण के पूर्व के चरण के साथ शुरू करें।

13.5.1 साहित्य समीक्षा :

जैसे ही हम शोध की समस्या का चुनाव करते है, हम साहित्य समीक्षा में आगे बढ़ते है, क्योंकि हम पाठक से उस विषय से परिचित कराना चाहते हैं जिसे हम संबोधित करना चाहते हैं। हम वास्तव में पाठकों को यह स्पष्ट करना चाहते हैं कि हमने प्रश्न में समस्या के बारे में पहले से ही क्या सीखा है। जैसे– यदि आप शराबी की तल पर काम कर रहें हैं, जो यह स्पष्ट किया जाना चाहिए कि हमने इस विषय पर किय गये पहले सभी शोधकार्यों से विषय के बारे में पर्याप्त रूप से सीख लिया है। इस विषय पर अपनी परियोजना शुरू करने के लिए चुनने से पहले महत्वपूर्ण कार्यों को अच्छी तरह से पढ़ा जाना चाहिए। साहित्य, की आपकी समीक्षा वर्तमान शोध निष्कर्षों के बीच पर जाने वाले विसंगतियों और असहमति की ओर इशार करती है। इसलिए आपका कार्य शोध अंतराल का पता लगाना और फिर अंतराल को संबोधित करने या ऐसी असंगतियों को हल करने की तरीकों की तलाश करना होगा। साहित्य समीक्षा बेहद श्रमसाध्य और कठोर काय है। अतः सहायता के लिए आज बहुत सी शोध सामग्री साहित्यों को इंटरनेट सर्च इंजन और डेटाबेस के माध्यम से एक्सेस किया जा सकता है।

13.5.2 शोध गंगा :

यह इम्फालनेट सेंटर द्वारा स्थापित भारतीय इलेक्ट्रानिक शोध और शोध निबंधों (इंडियन इलैक्ट्रानिक) थीसिस एण्ड डिसेर्ट्सन) के अंकीय डिजिटल भंडार को निरूपित करने वाला नाम है। 'शोध गंगा' शब्द की रचना इंगलिनेट सेंटर द्वारा स्थापित भारतीय इलेक्ट्रानिक शोध और निबंध के डिजिटल भंडार की पहचान करने के लिए की गयी है। यह एक ऐसा उदाहरण है कि कैसे हम डेटाबेस सेट करने के लिए प्रौद्योगिकी का उपयोग कर सकते हैं और अपने विशेष क्षेत्र पर शोध करते हुए साहित्य समीक्षा के लिए इसका बड़े पैमाने पर उपयोग कर सकते हैं।

शोध गंगा हमें शोध विद्वानों को अपने डाक्टरेट शोधपत्रों को जमा करने के लिए एक मंच प्रदान करती है, ताकि इसे पुरे विद्वान समुदाय को उपलब्ध कराया जा सका।

13.5.3 मेंडेली :

मेंडेली लंदन ये स्थित एक कम्पनी है जो शैक्षणिक और अकादमिक अनुसंधान के लिए आवश्यक उत्पादों और सेवाओं, की प्रदत्ता है। यह प्रबंधन हेतु अपने सेवा के लिए एक अच्छे संदर्भ में जानी जाती है, जिसका उपयोग बड़े पैमाने पर शोधपत्रों के प्रबंधन और उन्हें साझा करने के लिए किया जाता है। यह विद्वानों के लेखों के लिए ग्रन्थ सूची उत्पन्न करती है। जो हमारे साहित्य समीक्षा के लिए बहुत मद्द करते हैं। 2013 की शुरूआत में मेंडली को एक शैक्षणिक प्रकाशक 'एल्सेवियर' द्वारा खरीदा लिया गया।

13.5.4 माइक्रोसॉफ्ट एकादमिक :

माइक्रोसॉफ्ट अकादमिक शैक्षणिक प्रकाशनों और साहित्य के लिए एक मुफ्त सार्वजनिक वेब सर्च (खोज) इंजन है। इसे माइक्रोसॉफ्ट रिसर्च द्वारा विकसित किया गया था।

ख. डेटा संग्रह और विश्लेषण में आइसीटी का उपयोग :

समंकों का संग्रह अनुसंधान का एक महत्वपूर्ण कार्य है। समंक ही हमें उन सूचनाओं की जानकारी देते हैं। जिन्हें हम अध्ययन करना चाहते हैं। वर्तमान युग में समस्या का समाधान तत्काल होने लगा है और इस कार्य को सुगम बनाने में निश्चित तौर पर सूचना प्रौद्योगिकी है। इसके माध्यम से प्रश्नावली तैयार करना अधिक उत्तरदाताओं के पास भेजना और उत्तर प्राप्त कर लेना संभव हुआ है। यही नहीं विश्लेषण के लिए भी नई–नई तकनीकों का उपयोग भी किया जाने लगा है।

13.6 सैद्धान्तिक प्रश्न :

1. एक्स्प्लोरिंग विंडोज से आप क्या समझते हैं?
2. आपरेटिंग सिस्टम में ग्राफिक यूजर इंटर फस (GUI) की व्याख्या कीजिए।
3. वर्कशीट क्या होता है?
4. वर्कशीट पर कार्य करने की प्रक्रिया का उल्लेख कीजिए।
6. वॉयसन विश्लेषण को समझाइए।

इकाई 14 जेड और टी–परीक्षण (Z and T-Test) :

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्न तथ्य से अवगत हो जायेगें–

- छोटे–प्रतिदर्शज के लिए प्रयुक्त होने वाले परीक्षण।
- t-बंटन के स्वरूप एवं विशेषताएँ।
- सह सम्बन्ध गुणांक की सार्थकता की जाँच के लिए Z परीक्षण

14.1 प्रस्तावना :

सांख्यिकी में विभिन्न प्रकार के परीक्षण किये जाते है, परन्तु इनमें सार्थकता परीक्षणों का विशेष स्थान है। आकार की दृष्टिकोण से प्रतिदर्श दो प्रकार के होते हैः प्रथम वृहत् या बड़े प्रतिदर्श तथा दूसरा, लघु या छोटे प्रतिदर्श। प्रस्तुत इकाई छोटे प्रतिदर्श अर्थात् वह प्रतिदर्श जिसकी संख्या 30 से अधिक न हो ($N>30$) के लिए प्रयुक्त किये जाने वाले परीक्षणों के बार में विशद् वर्णन है।

14.2 जेड तथा टी परीक्षण का परिचय :

14.2.1 स्टुडेण्ट का टी–बंटन अर्थात् टी–परीक्षण :

t- बंटन का प्रयोग वहाँ किया जाता है, जिसके प्रतिदर्शों का आकार 30 से कम हो। t-बंटन के प्रतिपादन और विकास का क्षेत्र डबलिन की एक प्रसिद्ध मद्य निर्माणशाला गिनती के सांख्यिकी सलाहाकार–विलियम, सीली गोस्से (W.S. Gosset) को प्राप्त है, जिन्होंने स्टुडेण्ट (Student) उपनाम पर छोटे प्रतिदर्शों के बंटन का प्रतिरूप

स्टुडेण्ट का टी–बंटन (students t- distribution) कहलाता है और इस बंटन के प्रयोग द्वारा किये जाने वाले लघु प्रतिदर्शों के सार्थकता परीक्षण स्टुडेण्ट के टी–परीक्षण (Students t-test) कहे जाते हैं।

t. बंटन की विशेषताएँ :

- t- बंटन भी घंटाकार और सममितीय (bell-shaped and symmetrical) होता है और उसका माध्य शून्य (0) होता है। यही विशेषता प्रमापित प्रसामान्य बंटन की भी होती है।
- t- बंटन का विस्तार -∞-+∞ तक होता है।
- t- बंटन केन्द्र में अधिक सपाट ककुदी या चपटे शीर्ष वाला (platy kurti) होता है और उसके दोनों सिरे (पुछ–tails) अधिक ऊँचे होते हैं।
- स्वातन्त्र्य–कोटियों की संख्या 'V' –t बंटन का प्राचल होती है। अर्थात् t- बंटन का स्वरूप पर V निर्भर करता है।
- t-बंटन के प्रसरण का मान 1 से अधिक होता है। स्वातन्त्र्यांशों की संख्या जितना अधिक होता जायेगा V–∞ t- बंटन और प्रमापित प्रसाामन्य बंटन सर्वथा समान होते जायेगें। इसी दृष्टिकोण से जब n>30 तो वह पड़ा प्रतिदर्श माना जाता है और तब t- बंटन प्रसामान्य बंटन के अत्यधिक सन्निकट, लगभग उसके समकक्ष ही होता है।
- वैसे तो t- बंटन का अनुप्रयोग बड़े प्रतिदर्शों के लिए भी किया जा सकता है परन्तु वह प्रतिदर्श सिद्धान्त छोटे प्रतिदर्शों पर लागू नहीं होता।

t- परीक्षण की मान्यताएँ :

टी–परीक्षण की निम्नलिखित मान्यताएँ हैं–

क. मूल–समष्टि जिससे लघु प्रतिदर्श चयनित किया गया हो प्रसामान्य है,

ख. प्रतिदर्श यादृच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा चयनित किया गया हो; तथा

ग. समष्टि का प्रमाप विचलन अविदित हो।

14.2.2 जेड–परीक्षण :

छोटे–प्रतिदर्शों में सह–सम्बन्ध गुणांक की सार्थकता की जाँच करने के लिए जिस प्रविधि का प्रयोग किया जाता है उसे जेड–परीक्षण (Z-Test) कहते हैं। इस परीक्षण का विकास प्रोफेसर **रोनेल्ड फिशर** ने किया था। इस परीक्षण में सह–सम्बन्ध गुणांक (r) का Z प्रतिदर्शज में रूपान्तरण कर लिया जाता है। r का Z में प्रतिदर्श में रूपान्तरण के कारण ही इसे Z रूपान्तरण भी कहा जाता है।

r को Z में बदलने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$Z = \frac{1}{2} + \log \quad \left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

या $\quad Z= 1.1513 \log_{10} \left(\frac{1+2}{1-r}\right) \qquad \because \log_e = \log_{10} \ 2.3026)$

Z-प्रतिदर्शज का बंटन भी प्रसामान्य बंटन की भाँति ही होता है और उसका निर्वचन भी प्रसामान्य बंटन यें प्रयुक्त क्रांतिक मानों के समान ही किया जाता है।

Z- परीक्षण की उपयोगिता :

निम्नलिखित दो प्रकार की समस्याओं के हल के लिए **Z-**परीक्षण का उपयोग किया जाता है।

क. r (सह–संबंध) के अवलोकित मूल्य का किसी परिकलित मूल्य से अन्तर सार्थक है अथवा नहीं।

ख. दो प्रतिदर्शों के सह–सम्बन्ध गुणांकों (r_1 और r_2) में अन्तर सार्थक है या अर्थहीन है।

क. r (सह–संबंध) के अवलोकित मूल्य और परिकलित–मूल्य के अन्तर की सार्थकता के परीक्षण की प्रक्रिया।

1. सर्वप्रथम सह–संबंध (r) के अवलोकित मूल्य और r के परिभाषित मूल्या अथवा समाष्टि–मूल्य (P) को निम्नसूत्र द्वारा Z में परिणत कर लिया जाता है–

r की Z परिणति	P की Z परिणति
$Zs = 1.1513 \log \left(\frac{1+r}{1-r}\right)$	$Z_P = 1.1513 \ \log e_{10} \left(\frac{1+P}{1+P}\right)$

जहाँ पर–

Zs प्रतिदर्श– सह सम्बन्ध गुणांक (r) का Z रूप है।

Zp परिकलित या समष्टि सह–संबंध–गुणांक (P) का Z स्वरूप है।

2. निम्नलिखित सूत्र द्वारा Z की प्रमाप त्रुटि ज्ञात कर ली जाती है–

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

3. सार्थकता अनुपात का निर्धारण–

$$\sigma_z = \frac{|Zs\_Zp|}{\sigma_z}$$

4. अंत में सार्थकता अनुपात की तुलना सार्थकता (5% या 1 %) प्राप्त क्रान्तिक मान से की जाती है और निम्नलिखित तरिके से निष्कर्ष निकाले जाते है–

यदि $\frac{Zs - Zp}{\sigma_z} > 2.58$ तो अन्तर 1% स्तर पर सार्थक है अन्यथा नहीं।

यदि $\frac{Zs - Zp}{\sigma_z} > 1.96$ तो अन्तर 5% स्तर पर सार्थक है।

यदि $\frac{Zs - Zp}{\sigma_z} > 3$, तो अन्तर 0.27% स्तर पर सार्थक है। अर्थात् निश्चित रूप से सार्थक है।

उदाहरण (Illustration) :

19 पद युग्मों का सह–संबंध गुणांक 0.64 है। Z परीक्षण द्वारा यह ज्ञात कीजिए कि क्या यह (01) 0 से ; (2) 0.50 से सार्थक रूप से भिन्न हैं?

हल (Solution) :

दिया है n = 19

r= 0.64

(1) P = 0 ; (2) P = 0.50

$$Zs = 1.1513 \log_{10}\frac{1+0.64}{1-0.64} = 1.1513 \log_{10}\frac{1.64}{0.36}$$

$$= 1.1513 \text{ X} \log 4.5555$$
$$= 1.1513 \text{ X } 0.6585$$

$$= 0.7581$$

(1)

$$Zp = 1.1513 \log_{10}\frac{1+0}{1-0} = 0$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$$

$$\frac{Zs+Zp}{\sigma_z} = \frac{0.7581-0}{0.25}$$
$$= 3.03 > 3$$

अतः प्रदत्त r (0.64) शून्य से सार्थक रूप से भिन्न है।

(2)

$$Z_P = 1.1513 \log_{10}\frac{1+0.5}{1-0.5}$$
$$= 1.1513 \text{X} 0.477 = 0.549$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{Zs+Zp}{\sigma_z} = \frac{0.7581-0.549}{0.25}$$
$$= 0.84 < 3$$

अतः प्रतिदर्शन r, p=0.50 से सार्थक रूप से भिन्न नहीं है।

(ख). दो प्रतिदर्शों के सह–संबंध गुणांकों (r_1 और r_2) में अन्तर सार्थक है या अर्थहीन है के संबंध में कार्यवाही–

दो प्रतिदर्शों के सह–संबंध गुणांकों (r_1 व r_2) की सार्थकता– जाँच के लिए भी Z- परीक्षण का प्रयोग किया जाता है। निम्नलिखित प्रक्रियाओं का पालन किया जाता है–

1– दोनों प्रतिदर्शजों को Z में बदल लिया जाता है (Z_1 और Z_2)।

2– तत्पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\sigma_{z1-z2} = \sqrt{\sigma^2_{z1}+\sigma^2_{z2}} = \sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}$$

3– अन्त में सार्थकता अनुपात $\frac{z_1-z_2}{\sigma_{z1}-Z_2}$ की तुलना निर्दिष्ट सार्थकता स्तर पर (सामान्यतया 5% या 1%) प्रसामान्य बंटन के क्रांतिक मूल्य से की जाती है। यदि अनुपात क्रांतिक मान से अधिक है तो अन्तर सार्थक है अन्यथा अर्थहीन है।

उदाहरण (Illustration) :

दिये गये समंकों की सहायता में फिशर का Z परीक्षण करें। 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर दो r मानों के अन्तर की सार्थकता का परीक्षण भी कीजिए–

प्रतिदर्श Sample	आकार Size	सह–संबंध–गुणांक Value of 2
I	23	0.40
II	19	0.65

हल (**Solution**) :

परिकल्पना– Ho : $r_1, = r_2$, Ha ; $r, \neq r_2$

Z_1 का परिकलन

$n_1 = 23, r_1 = 0.40$

$Z_1 = 1.1513 \log \frac{1+0.4}{1-0.4}$

$= 1.1513 \text{ X } \log 2.333$

$= 1.1513 \text{ X } 0.368 = 0.424$

Z_2 का परिकलन

$n_2 = 19, r_2 = 0.65$

$Z_2 = 1.1513 \log \frac{1+0.65}{1-0.65}$

$= 1.1513 \text{ X } \log 4.714$

$= 1.1513 \text{ X } 0.6734$

$= 0.775$

अन्तर की प्रमाण त्रुटि –

$$\sigma_{z1-z2} = \sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}} = \sqrt{\frac{1}{23-3} + \frac{1}{19-3}}$$

$$= \sqrt{0.05+0.0625} = \sqrt{0.1125}$$

$$= 0.335$$

सार्थकता–अनुपात = $\frac{\text{अन्तर}}{\text{प्रमाण त्रुटि}} = \frac{|Z_1 \_ Z_2|}{\sigma_{z1} - \sigma_{z2}}$

$$= \frac{0.424 - 0775}{0.335}$$

$$= \frac{0.351}{0.335} = 1.048\%$$

निष्कर्ष : सार्थकता–अनुपात 1.048 < 1.96 अतः 5% स्तर पर Ho स्वीकार किया जाता है, दोनों सह–संबंधित गुणांकों में अन्तर सार्थक नहीं और यह सिद्ध हो जाता है कि दोनों प्रतिदर्श एक ही मूल समाष्टि से चुने गये हैं।

Z बंटन लगभग प्रसामान्य होता है और इसी रूप में < प्रतिदर्शज का निर्वचन किया जाता है, परन्तु Z – प्रतिदर्शज के आधार पर t- परीक्षण भी की जा सकती है।

14.3. परिकल्पना परीक्षण के रूप में टी–परीक्षण :

परिकल्पना परीक्षण के रूप में टी–परीक्षण के विभिन्न प्रयोग है, जो निम्नलिखित हैं :–

(क). **छोटे प्रतिदर्श के माध्य की सार्थकता– जाँच (Testing the significance of the mean in a small sample –t-test)** : सामान्तर माध्य की सार्थकता की जाँच बड़े प्रतिदर्शत में Z–परिक्षण से किया जाता है वही छोटे प्रतिदर्श में t–मूल्य का प्रयोग किया जाता है। Z के परिकलित मूल्य की तुलना t–सारिणी में सुनिश्चित सार्थकता स्तर पर स्वातन्त्र्य–कोटियों की संख्या के सम्मुख प्रदत्त t के मान से की जाती है। यह परिकालित t–मूल्य सारणीगत t–मूल्य से अधिक है तो Ho अस्वीकृत किया जाता है अन्यथा स्वीकार कर लिया जाता है। परीक्षण की प्रक्रिया निम्न प्रकार है–

(अ). Ho शून्य परिकल्पना सामान्यतया शून्य परिकल्पना– $\bar{X} = \mu$ or $\bar{X} - \mu = 0$ सामान्यतया शून्य परिकल्पना में μ कोई सार्थक अन्तर नहीं है।

(ब). सार्थकता स्तर– सामान्यतया 5% या 1% स्तर पर परीक्षण किया जाता है। (a=0.05 or a=0.01)

(स). समष्टि का प्रमाप विचलन अविदित होता है अतः प्रतिदर्श प्रमाप विचलन के आधार पर 5 का आंकलन किया जाता है।

$$S = \sqrt{\left(\frac{\sum(x-\bar{x})2}{n-1}\right)} \text{ या } S = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}} \ (d = \bar{x} \text{ से विचलन})$$

(द). परीक्षण–प्रतिदर्श – t

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \left[\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right]$$

नोट : यदि प्रतिदर्शज के प्रमाप विचलन के मान में हर $(n-1)$ का प्रयोग न किया गया हो n का ही प्रयोग किया गया हो तो t के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जायेगा–

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}-1} \text{ or } = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n-_1}}} \text{ or } \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n-1}$$

(य). **t का क्रान्तिक मान** : 5 प्रतिशत या 1 प्रतिशत (0.05 या 0.01) में से किसी भी सार्थकता स्तर पर स्वातंत्र्य–कोटियों की संख्या (v=n-1) के सम्मुख t-सारणी से t का क्रान्तिक मान ज्ञात किया जाता है। एक–पुच्छ परीक्षण के लिए a=0.05 के स्थान पर 0.10 (2a) और इसी प्रकार a=0.01 के स्थान पर 2a=0.02 वाले स्तम्भ में मान देखा जाएगा। इकाई के अन्त में t- सारणी का मान उपलब्ध है।

(र). **निर्णय** : यदि t- परिगणित मूल्य t- के सारणी मूल्य से अधिक है तो शून्य परिकल्पना, असत्य और प्रतिदर्श–माध्य का समष्टि माध्य में अन्तर सार्थक है। इसके विपरीत यदि t- का परिगणित मूल्य, सारणी मूल्य से कम है तो अन्तर अर्थहीन है और शून्य परिकल्पना सत्य सिद्ध हो जाती है।

उदाहरण (Illustration) :

किसी कारखाने के मजदूरों में से 10 मजदूर यादृच्छया चुने गये। किसी एक कार्य–दिवस पर उन्होंने जितनी वस्तुओं का उत्पादन किया उनकी संख्या निम्नलिखित थीं–

71, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 79, 80 इन आँकड़ों के आधार पर यह कहना उचित है कि समष्टि में उत्पादित वस्तुओं की संख्या 78 हैं? (स्वातन्त्र्य–संख्या 9 के लिए t का 5% वाला मान 2.262 है)।

हल (Solution) :

परिकल्पना : इस प्रश्न के अनुसार यह सिद्ध करना है कि समष्टि में निर्मित इकाइयों की माध्य संख्या 78 है अथवा नहीं। हमारी परिकल्पना यह है कि प्रतिदर्शज–माध्य संख्या और समष्टि माध्य संख्या में अन्तर शून्य (अर्थहीन) है।

Ho : $\bar{x}-\mu = 0,$
Ha : $\bar{x}-\mu \neq 0$

परिकलन :

सामान्तर माध्य और प्रमाण विचलन की गणना

निर्मित इकाइयाँ X	विचलन $d=(X-\bar{x})$ (a=76)	विचलनों के वर्ग d^2
71	−5	25
72	−4	16
73	−3	9
75	−1	1
76	0	0
77	+1	1
78	+2	4
79	+3	9
79	+3	9
80	+4	16
$\sum x=760$		$\sum(x-\bar{x})^2$ or $\sum d^2=90$

प्रतिदर्श सामान्तर माध्य–

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{N}=\frac{760}{10}=76;$$

$\mu=78$ (दिया हुआ है)

समाप्ति–प्रमाण विचलन का गणन–

$$S=\sqrt{\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{n-1}\right)^2}=\sqrt{\frac{90}{10-1}}\ =\sqrt{10}=3.162$$

t का क्रांतिक मान (सारणी)– जबकि u=9, t.05= 2.62

परीक्षण प्रतिदर्शज–t

$$t=\frac{|Z_1\_Z_2|}{s}\sqrt{n}\ \frac{|76-78|}{3.162}\ x\sqrt{10}\ =2$$

t-का परिगणित मूल्य 2, 5% स्तर पर 10–1= 9 स्वान्त्र्यांश के लिए सारणी मूल्य 2.262 से कम है अतः अन्तर अर्थहीन है और हमारी शून्य परिकल्पना सत्य है। दिये गये समंको के आधार पर यह निष्कर्ष निकलता है कि समष्टि में प्रति मजदूर निर्मित इकाइयों की माध्य संख्या 78 है।

(ख). दो छोटे–प्रतिदर्शों के माध्यों के अन्तर का सार्थकता परीक्षण (Testing the significance of difference between to sample means-small samples) :

दो छोटे प्रतिदर्शों के माध्यों के अन्तर की सार्थकता जाँचने का उद्देश्य वह जानना होता है कि दोनों प्रतिदर्श माध्यों में अन्तर सार्थक है या अर्थहीन अथवा दोनों प्रतिदर्श एक ही मूल–समाप्ति से चुने गये हैं या नहीं। परीक्षण प्रतिदर्शज t का गणन निम्न प्रकार से होगा–

$$t=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \quad \text{या} \quad t=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{s}\sqrt{\frac{n_1\,n_2}{n_1+n_2}}$$

जिनमें,

$\overline{x}_1$ और $\overline{x}_2$ दोनों प्रतिदर्शों के समान्तर माध्य हैं।

n_1 और n_2 दोनों प्रतिदर्शों में इकाईयों की संख्याएं है।

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_1-\overline{x}_1)^2}{(n_1-1)+}\frac{+\sum(x_2-x_2)^2}{(n_2-1)}}$$

या $$S=\sqrt{\frac{\sum d^2+\sum d}{n_1+n_2-2}}$$

यदि दोनों प्रतिदर्शों के प्रमाप विचलन दिये हों तो उनकी सहायता से S निम्न सूत्र द्वारा निकाला जायेगा—

यदि हर में n का प्रयोग हो

$$S=\sqrt{\frac{n_1\sigma_1^2+n_2\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

यदि हर में n-1 का प्रयोग हो

$$S=\sqrt{\frac{(n_1-1)\,s_1^2}{n_1+n_2-2}\frac{+(n_2-1)\,s_2^2}{(h_2-2)}}$$

जब विचलन कल्पित माध्यों (A_1व A_2) से लिए जाएँ तो समूहित S का मान निम्न सूत्रानुसार निकाला जायेगा—

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_1-A_1)^2+\sum\ (x_2-A_2)^2\, n_1(\overline{x}_1-A_1)^2-n_2(\overline{x}_2-A_2)^2}{n_1+n_2-2}}$$

स्वातन्त्र्योश— $d.f=(n_i-1)+(n_2-1)=n_1+n_2-2$

अब यदि परिकलित t, सारणी t, के मान से अधिक है तो अन्तर सार्थक है। अन्यथा अर्थहीन है।

उदाहरण (Illustration) :

खाद्य A पर रखे गये 10 बच्चों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श के लिए एक निश्चित अवधि में उनके भार में निम्नांकित वृद्धि (किग्रा0) में हुई—

10, 6, 16, 17, 13, 12, 8, 14, 15, 19

खाद्य B पर रखे गये 12 बच्चों के एक अन्य यादृच्छिक प्रतिदर्श के लिए उसी अवधि में निम्नलिखित भार—वृद्धि (किग्रा0) में हुई—

7, 13, 22, 15, 12, 14, 18, 8, 21, 23, 10, 17

खाद्य A तथा खाद्य B पर रखे गये बच्चों के एक भारों में वृद्धि में अन्तर की सार्थकता की जाँच कीजिए। खाद्य ('t') का मान 20 स्वातन्त्र्य संख्या के लिए 5% सार्थकता स्तर पर 2.09 है।

हल (**Soluation**) :

परिकल्पना (Ho) माना कि खाद्य A और खाद्य B में भार–संवर्द्धन के संबंध में कोई सार्थक अन्तर नहीं है।

अर्थात्– Ho : $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 0$

Ho : $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \neq 0$

सार्थकता स्तर– 5% ; V= 20 के लिए $t_{0.05}$ का मूल्य 2.09 है।

परिकलन :

सामान्तर माध्य और प्रमाण विचलन की गणना

खाद्य A का प्रभाव			खाद्य B का प्रभाव		
भार वृद्धि X_1	$d_1 = (X_1 - \overline{x}_1)$	$d_{1=(x_1-\overline{x}_2)}^2$	भार वृद्धि x_2	$d_{2=(x_2-\overline{x}_2)}$	$d_{2=(x_2-\overline{x}_2)}^2 2$
10	–2	4	7	-8	64
6	-6	36	13	-2	4
16	+4	16	22	+7	49
17	-5	25	15	0	0
13	+1	1	12	-3	9
12	0	0	14	-1	1
8	-4	16	18	+3	9
14	+2	4	8	-7	49
15	+3	9	21	+6	36
9	-3	9	23	+8	64
			10	-5	25
			17	+2	4
$\sum x_1 = 120$		$\sum = (x_1 - \overline{x}_1)2 = 120$	$\sum x_2 = 180$		$\sum = (x_2 - \overline{x}_2)2 = 314$

खाद्य A

$$\overline{x}_{1=\frac{\sum x}{n_1}} = \frac{120}{10} = 12$$

खाद्य B

$$x_{2=} \frac{\sum x_2}{n_2} = \frac{180}{12} = 15$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_1 - x_2)^2 + \sum(x_2 - \overline{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}} \qquad = \sqrt{\frac{120 + 314}{10 + 12 - 2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{434}{20}}$$

$$= \sqrt{21.7} = 4.658$$

परीक्षण प्रतिदर्ष $t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \times \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$

$$= \frac{|12 - 15|}{4.658} X \sqrt{\frac{10 X 12}{10 X 12}} = \frac{3}{4.658} x \sqrt{\frac{120}{22}}$$

$$= \frac{3 X 2.335}{4.658} = 1.504$$

$$d.f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$$

निर्णय :

20df के लिए 5% सार्थकता स्तर पर t का सारणी मूल्य 2.09 है। t का परिकलित मूल्य 1.504 है, जो सारणी मूल्य से कम है, अतः अन्तर अर्थहीन है। शून्य परिकल्पना सत्य है। खाद्य A व खाद्य B की भार बढ़ाने की क्षमता में कोई अन्तर नहीं है।

(ग). 'अन्तर' परीक्षण–युग्मित प्रतिदर्श (**The Difference test paired samples**) :

जहाँ यूग्मित समंक (आंकड़े) दिये हो वहाँ पर अंतर परीक्षण किया जाता है। यह वहाँ पर भी अंतर जाँच का प्रयोग होता है जहाँ समान इकाइयों पर किसी घटना का प्रभाव देखना हो। उदाहरण के लिए 20 विद्यार्थियों की संख्या वाले सांख्यिकी में परीक्षा ली जाए और उसके प्राप्तांक लिख लिए जाएँ, फिर एक महिने का विशिष्ट अध्यापन करके उनकी दोबारा परीक्षा ली जाये और उनके प्राप्तांक ज्ञात कर लिए जाएं। व्यक्तिगत प्राप्तांकों के अन्तर की जांच करके यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि अध्यापन से विद्यार्थियों का स्तर बढ़ा है या नहीं।

अन्तर जाँच ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया को अपनाना पड़ता है–

1– सर्वप्रथम, घटना के बाद उपलब्ध समंकों में से घटना से पूर्ण वाले तत्संवादी समंकों को घटाकर अन्तर की मात्रा (वृद्धि या कमी) निकाल की जाती है।

2– अन्तरों के माध्य $\overline{D} = \frac{\sum D}{n}$ से ज्ञात कर लिया जाता है। विचलन निकालकर विचलन वर्गों का जोड़ प्राप्त कर लिया जाता है।

3– अन्तरों के माध्य से उनके विचलन निकालकर विचलन वर्गों का जोड़ $\sum d^2 = \sum(D - D)^2$ प्राप्त कर लिया जाता है।

4– स्वातन्त्र्य–संख्या से विचलन वर्ग को भाग देकर वर्ग मूल निकाल जाता है। इसे S से संकेतन किया जाता है–

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma\left(D - \overline{D}\right)^2}{n - 1}}$$

या $\sqrt{\frac{\sum D^2-(\overline{D})^2 n}{n-1}}$

5– वास्तविक अन्तर शून्य मानकर निम्न सूत्र द्वारा t– प्रतिदर्शज का परिगणन किया जाता है–

$$t=\frac{\overline{D}-0}{S}\ \sqrt{n} \quad or \quad t=\frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S}$$

6– अंत में, n–1 स्वातन्त्र्यांश के लिए 5% सार्थकता स्तर पर t का सारणी मूल्य देख लिया जाता है और यदि परिगणित t > सारणी मूल्य t तो 5% स्तर पर अन्तर सार्थक माना जाता है अर्थात् घटना का प्रभाव पड़ा है। यदि t < सारणी मूल्य –t तो अन्तर अर्थहीन है और घटना का कोई प्रभाव नहीं पड़ा है।

उदाहरण (Illustration) : 12 मरीजों में से प्रत्येक को दिये गये एक उद्दीपक से उनके रक्तचाप में निम्नलिखित परिवर्तन हुआ–

+5, +2, +8, –1, +3,0, +6, –2, +1, +5, 0, +4 क्या यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि उद्दीपक से सामान्यतः रक्तचाप में वृद्धि होती है?

हल (Solution) :

परिकल्पना : H0 : $\overline{D}$ = 0 अन्तर का माध्य शून्य है; रक्तचाप में कोई अन्तर नहीं हुआ है। Ha : $\overline{D}$> 0 अन्तर धनात्मक है अर्थात रक्तचाप बढ़ा है। सार्थकता स्तर व 12–1 =11 स्वतन्त्र्यांश के लिए t का सारणी मान– a=0.05 पर एक पुच्छ t परीक्षण के लिए t0-10 (11) = 1.796

परीक्षण–प्रतिदर्श t का परिकलन :

अन्तर (D)	अन्तर वर्ग D^2
+5	25
+2	4
+8	64
–1	1
+3	9
0	0
+6	36
–2	4
+1	1
+5	25
0	0
+4	16
$\sum D=31$	$\sum D^2=185$

अन्तर का माध्य $\overline{D} = \frac{\sum D}{n} = \frac{31}{12} = 2.5833$

$$S=\sqrt{\frac{\sum D^2-(\overline{D})^2 n}{n-1}} = \sqrt{\frac{185-(\frac{31}{12})^2 x\,12}{12-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{185 \quad .0833}{11}}$$

$$S=\sqrt{\frac{104.9167}{11}} \quad =\sqrt{9.5379} \quad = 3.088$$

$$t=\frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S}=\frac{2.5833\sqrt{12}}{3.088}=\frac{2.5833 \text{ X } 3.4641}{3.088}$$

$$=\frac{8.9488}{3.088}$$

$$\therefore t = 2.898$$

निर्णय–t का परिकलित मान 2.898, t (2X 0.05) के एक दिशा वाले मान– 1.796 से अधिक है अतः H0 अस्वीकृत किया जाता है। Ha सही हैं। अन्तर सार्थक हैं।

उक्त उद्दीपक से रोगियों के रक्तचाप में सार्थक वृद्धि होती है।

(घ). छोटे प्रतिदर्शों में अवलोकित सह–संबंध गुणांक की सार्थकता का t-परीक्षण (Testing the significance of observed Correlation Coefficient in small samply t-test) :

एक प्रसामान्य समष्टि में से चुने गये n युग्मित समंकों के यादृच्छिक प्रतिदर्श के सह–संबंध गुणांक (r) की सार्थकता का परीक्षण करने के लिए t–बंटन का प्रयोग होता है। t–परीक्षण द्वारा इस परिकल्पना की जाँच की जाती है कि समष्टि में सह–संबंध गुणांक शून्य (0) है, अर्थात् समष्टि के चर असबंधित हैं, अथवा नहीं है। सह–संबंध गुणांक के t–परीक्षण की विधि पूर्ववत् है परन्तु स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या df= n-2 होती है, और t का मान निम्नलिखित सूत्र द्वारा निकाला जाता है–

$$t=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \text{ X } \sqrt{n-2}$$

उदाहरण (Illustration) : किसी वस्तु के दो समूहों से 8 और 12 आकार के प्रतिदर्श लिए गए। वस्तुओं की दो विशेषताओं के मध्य सह–संबंध गुणांक क्रमशः 0.32 और 0.19 है। क्या ये मान सार्थक है?

हल (Solution) :

प्रश्नानुसार $n_1 = 8, r_1 = 0.32$	$n_2 = 12, r_2 = 0.19$
$t=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$	$t=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$
$=\frac{0.32}{\sqrt{1-(0.32)^2}}\sqrt{8-2}$	$=\frac{0.19}{\sqrt{1-(0.19)^2}}\sqrt{12-2}$
$=\frac{0.32X2.45}{0.9474}=\frac{0.784}{0.9474}$	$=\frac{0.19 \text{ X } 3.162}{0.982}=\frac{0.601}{0.982}$
$= 0.8275$	$= 0.612$
$d.f = 8-2 = 6$	$d.f = 12-2 = 10$
6 d.f के लिए t 0.05 का मूल्य = 2. 447 परिगणित मूल्य से कम है अतः सह–सम्बन्ध गुणांक सार्थक नहीं है।	10 d.f के लिए t0 .05 का मूल्य = 2.228 परिगणित मूल्य t0 .05 से कम है अतः सह–सम्बन्ध गुणांक सार्थक नहीं है।

प्रमुख t-सारणी का अंश

t-सारणी से एक पुच्छ परीक्षण के लिए t- का क्रांतिक मान निम्नलिखित तरीके से देखा जा सकता है–

0.05 स्तर पर एक पुच्छ परीक्षण का क्रांतिक मान =0.10 स्तर पर प्रदत्त द्वि–पुच्छ क्रांतिक मान 0.01 स्तर पर एक पुच्छ परीक्षण का क्रांतिक मान = 0.02 स्तर पर प्रदत्त द्वि–पुच्छ क्रांतिक मान।

द्वि–पुच्छ t-सारणी के निम्न अंश से यह तथ्य स्पष्ट हो जाता है।

5% सार्थकता स्तर पर			1% सार्थकता स्तर पर	
स्वातन्त्र्यांश df.(v)	एक–पुच्छ परीक्षण (at a = 0.05) 0.10 (2a) (0.05+0.05)	द्वि–पुच्छ परीक्षण 0.05 (a) (0.025 + 0.025)	एक–पुच्छ परीक्षण (at a = 0.01) 0.02 (2a) (0.01+0.01)	द्वि–पुच्छ परीक्षण 0.01 (a) (0.005+0.005)
5	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.812	2.228	2.764	3.169
15	1.753	2.131	2.602	2.947
90	1.725	2.086	2.528	2.845
25	1.708	2.060	2.485	2.787
30	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.645*	10.960*	2.326*	2.576*

* Same as Z-Scare in Normal Curve Area Table

14.4 बोध प्रश्न :

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें–

1. t –बंट का प्रयोग कहाँ होता है जहाँ प्रतिदर्शों का आकार.......................... से कम होता है।
2. छोटे प्रतिदर्शों में सह–सम्बन्ध गुणांक की सार्थकता की जाँच करने के लिए..................... प्रयोग किया जाता है।
3. t–बंटन का विस्तार....................... होता है।
4. Z बंटन लगभग...................... होता है।
5. स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या को.........................निरूपित किया जाता है।

सत्य एवं असत्य छाँटिए :–

1. t–बंटन घंटाकार और समितीय होता है और उसका माध्य 1 से अधिक होता है।

2. दो प्रतिदर्शों के सह–संबंध गुणांकों की सार्थकता को जाँचने के लिए t–परीक्षण का उपयोग किया जाता है।

3. स्वातन्त्र्य कोटियों की संख्या–t बंटन का प्राचल होता है।

4. परिकल्पना के परीक्षण के लिए भी t–परीक्षण का उपयोग किया जाता है।

5. जहाँ भूग्मित समंक दिये हो वहाँ पर अंतर परीक्षण किया जाता है।

14.5 बोध प्रश्नों के उत्तर :

रिक्त स्थान वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. 30; 2– Z-Test–; 3. –∞ से + ∞ तक 4. प्रसामान्य 5. V

सत्य एवं असत्य वाले प्रश्नों के उत्तर–

2. 1. असत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. सत्य, 5. सत्य।

14.6 स्वपरख प्रश्न :

1. t- परीक्षण एवं परीक्षण Z- परीक्षण से आप क्या समझते हैं?
2. t- परीक्षण के विशेषताओं और मान्यताओं को लिखिए।
3. z- परीक्षण की कौन–कौन से विशेषताएं एवं मान्यताएं है उल्लेख कीजिए।
4. t परीक्षण के व्यावहारिक अनुप्रयोगों का वर्णन कीजिए।
5. दो प्रतिदर्श माध्यों के बीच अन्तर की सार्थकता की जाँच के लिए t–परीक्षण की व्याख्या कीजिए।
6. t- परीक्षण क्या है? किसी महाविद्यालय में यादृच्छिक प्रतिचयन प्रणाली से चुने गये 10 विद्यार्थियों की लंबाई के आँकड़े (इंचों में) निम्नांकित हैं–
   61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 69, 70

   इस तथ्यों के आधार पर क्या यह निष्कर्ष निकाला उचित होगा कि महाविद्यालय के विद्यार्थियों की औसत लम्बाई 68 इंच है? ($t\ 0.05 = 2.262$ for d.f. =9)

   [t=2, < to.05, Ho True]

7. हिंटन प्रेस की परिकल्पना है कि इसके सबसे बड़े वैब प्रेस का जीवनकाल 14,500 घंटे है तथा 2100 घंटो का प्रमाप विचलन जानकारी में है। 25 प्रेसों के निदर्शन माध्य ज्ञात हुआ है। सार्थकता के 0.01

स्तर पर क्या कम्पनी को यह निष्कर्ष निकालना चाहिए कि प्रेसों का औसत जीवन काल परिकल्पित 14,500 घंटों से भिन्न है?

(Yes, there is significant difference ; calculated t=3.5> t0.01 for d.f. 24 i.i 2.797)

8. एक स्कूल के 10 छात्रों की सांख्यिकी में परीक्षा ली गई। उनको एक माह के अतिरिक्त कोचिंग दी गई जिसके अंत में एक और परीक्षा ली गई। क्या प्राप्तांक इस बात का प्रमाण देते हैं कि छात्रों का अतिरिक्त कोचिंग से लाभ हुआ है?

क्र.सं0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
अंक प्रथम हेस्ट	9	8	7	9	6	8	7	10	5	6
अंक द्वितीय टेस्ट	10	9	6	10	8	7	9	9	7	5

[t= $\frac{0.5}{1.354}\sqrt{10} = 1.168 < t\ 0.05 = 2.262$ Ho स्वीकृत; कोई लाभ नहीं]

9. एक प्रतिदर्श में कितने पद–युग्म सम्मिलित किये जाऐ जिससे r =+0.42 के लिए t का परिकलित मान 2.72 से अधिक हो? [n=37]

10. 28, और 19 अवलोकन–युग्मों के दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों के सह–संबंध गुणांक क्रमशः 0.55 और 0.75 है। क्या r के ये मान इस परिल्पना के अनुरूप है कि प्रतिदर्श एक ही समग्र से लिए गए है?

$$[Z_1 - \frac{Z_2}{\sigma Z_1} - Z_2 = \frac{0.355}{0.32} = 0.32 = 1.109, \text{Yes}\ ]$$

/ / / /

इकाई 15 उच्चत्तर तकनीकें :

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित तथ्यों को समझ जायेगें। तथ्य से अवगत हो जायेगें–

- विश्लेषण की नवीनतम तकनीकों का उपयोग।
- पूंज विश्लेषण का आशय एवं उसका उपयोग
- मेटा विश्लेषण का आशय, तथा उसकी आवश्यकता
- एकत्रित विश्लेषण का आशय और उसका प्रयोग

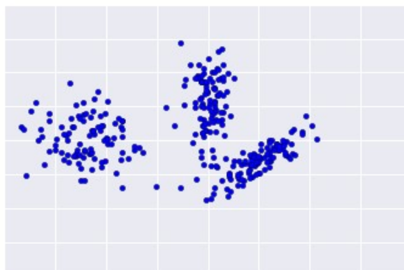
15.1 प्रस्तावना :

आज के वर्तमान युग में अध्ययन और शोध एक सीमित जगह से नहीं हो रहा है। बल्कि वैश्विक हो गया है। वैश्विक स्तर तक पहुँच आज का तकनीकी युग ने बना दिया है, ऐसे शोध की नई तकनीकों से परिचय के लिए इस इकाई में विश्लेषण की नई–नई तकनीकों की परिचय एवं उपयोग पर प्रकाश डाला गया है।

15.2 पूंज विश्लेषण (Conzoint Analysis) :

पूंज विश्लेषण एक समंक विश्लेषण तकनीक है जो पूंज या गुच्छ के रूप में ज्ञात समंक सूची के भीतर स्वाभाविक रूप से होने वाले समूहों की पड़ताल करती है। वस्तुओं के एक समूह को इस तरह से समूहीकृत करने का कार्य है कि एक ही समूह (जिसे पूंज कहा जाता है) में वस्तुएँ अन्य समूहों (गुच्छ या पूँज) की तुलना में एक दूसरे के समान (कुछ या पूंज) समान हैं।

यह खोजपूर्ण समंक, विश्लेषण का एक मुख्य कार्य है और सांख्यिकीय समंक विश्लेषण के लिए एक, सामान्य तकनीक है, जिसका उपयोग कई क्षेत्रों में किया जाता है जैसे पैटर्न पहचान, छवि विश्लेषण सूचना पुनर्प्राप्ति, जैव सूचना विज्ञान, कम्प्यूटर ग्राफिक्स और मशीन लर्निंग आदि।



तीन समूहों में वर्गों के रंग के रूप में दिखाए गए पूंज विश्लेषण का परिणाम।

15.3 पूंज विश्लेषण की विधियाँ :

पूंज विश्लेषण विधि मूल्यवान समंकों को समूहों में समूहित करने में मद्द करती है ओर विभिन्न तकनीकों के आधार पर उपयुक्त परिणाम चुनती है। विभिन्न प्रकार के पूंज विश्लेषण की तकनीकें है जो निम्नलिखित है–

1. श्रेणीवद्ध (Hierarchical Method)
2. विभाजन (Partitioning Method)
3. मॉडल–आधारित विधि (Model Based)
4. ग्रिड–आधारित विधि (Grid Based)
5. घनत्व आधारित विधि (Density based)

1. श्रेणीवद्ध तकनीक (विधि) :

इस विधि के अन्तर्गत ऊपर से नीचे तथा नीचे से उपर दोनों को विभाजित करके एक पूंज बनाया जाता है। इस प्रकार से बना हुआ पूँज एक डेंडोग्राम (एक पैड़ जैसा प्रारूप) उत्पन्न करता है जो इन समूहों के बीच उत्पन्न संपर्क को बताता है। इस प्रकार आँकड़ों के गुच्छ से उत्पन्न सूचनाएं प्राप्त करके उसका विश्लेषण किया जाता है।

2. विभाजन विधि :

विभाजन का मुख्य लक्ष्य पुनर्वास है। वे विभाजन को एक पूँज से दूसरे में स्थानान्तरित करके स्थानांतरित करते हैं, जो एक प्रारंभिक विभाजन होता है। यह 'n' डेटा आब्जेक्ट को 'K' नंबर के पूंज में बांटता है। इस विधि को अधिक पंसद किया जाता है।

3. मॉडल आधारित विधि :

यह मॉडल दो या तीन समूहों को एक साथ जोड़ता है। मॉडल के पीछे, मूल विचार समंकों को दो समूहों में विभाजित करना है, जो टी–प्रामिकता मॉडल (वड भिन्न रूपी Maltivariate) सामान्य वितरण के आधार पर होता है। इस मॉडल में हम प्रत्येक समूह के अवधारणाओं या वर्गों के रूप में चिन्हित करते हैं।

4. ग्रिड आधारित विधि :

यह मॉडल का दृष्टिकोण अंतरिक्ष में अनगिनत तारों के समूह बनाने पर आधारित है। तेजी से प्रसंस्करण के लिए ग्रिड बनाने का सुझाव इस विधि से मिलता है।

5. घनत्व आधारित विधि :

इस मॉडल में पूंज जो परिभाषित होते है वे उचे घनत्व वाले होते हैं। इसमें विभिन्न आकृतियों और शोर के समूहों की पहचान की जाती है। इसमें स्थानिक स्थान और दूरी का अनुमान लगाकर पैटर्न का पता लगाया जाता है।

15.4 पूंज विश्लेषण के चरण :

मुख्यतयाः पूंज विश्लेषण निम्नलिखित चरणों में पूर्ण होते हैं–

चरण– 1 : समंकों को तैयार करना, (Prepare the data)

चरण– 2 : समंकों मापन, (Scale the data)

चरण– 3 : वर्गीकृत चरों का चुनाव (Select segmentation variable)

चरण– 4 : मापन के सामान्यीकरण को परिभाषित करना, (Define similarity measure)

15.5 मेटा विश्लेषण (**meta-analysis**) :

अनुसंधान परिणामों की समीक्षा का उद्देश्य पूर्व में विभिन्न अनुसंधानकर्त्ताओं के द्वारा किये गये अनुसंधान कार्यों से प्राप्त परिणामों का संश्लेषण (synthesis) करके सामान्य निष्कर्ष ज्ञात करना होता है। इस कार्य के लिए परम्परागत रूप से सामान्यतः किसी प्रकरण विशेष पर सम्पादित विभिन्न अनुसंधानों के परिणामों को वर्णानात्मक रूप में प्रस्तुत करने का प्रचलन रहा है। परन्तु विगत कुछ समय से विभिन्न अनुसंधानों से प्राप्त परिणामों के मात्रात्मक स्वरूप पर भी ध्यान देने की आवश्यकता पर जोर दिया जाने लगा है। अब यह माना जाने लगा है कि विभिन्न परिणामों का संश्लेषण उनके मात्रात्मक स्वरूप के आधार पर ही किया जाना चाहिए अनुसंधान परिणामों के इसी मात्रात्मक विश्लेषण को मेटा–विश्लेषण कहते हैं।

इस तकनीक का प्रतिपादन सन् 1977 में ग्लास (Glass) ने किया था। इस प्रकार मेटा विश्लेषण शब्द ऐसी सांख्यिकीय विधियों को इंगित करता है, जिन्हें अनुसंधान कार्यों से प्राप्त परिणामों के मात्रात्मक एकीकरण के

लिए प्रयुक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में में कहा जा सकता है कि मेटा–विश्लेषण अनेक अनुसंधानों से प्राप्त सांख्यिकीय परिणामों का सांख्यिकीय विश्लेषण है।

परिणामों का मात्रात्मक संश्लेषण करके कुल निष्कर्ष दो ढ़ंग से प्राप्त किये जा सकते हैं –

(क). संयुक्त सार्थकता परीक्षण, लगाकर तथा

(ख). औसत प्रभाव आकार ज्ञात करके।

15.6 एकत्रित संयुक्त विश्लेषण (**Conzoint Analysis**) :

एकत्रित विश्लेषण मुख्य रूप से विपणन शोध तकनकी है जो किसी विणनकर्त्ता को समझने में सहायता पहुंचाता है कि ग्राहक किसी वस्तु या सेवा अथवा वस्तु एवं सेवा के युग्मों का चुनाव किस प्रकार करता है। यह नये वस्तुओं एवं सेवाओं के आकार एवं स्वरूप प्रदान करने में सहायता पहुंचाता है जिससे ग्राहक अच्छा या महत्वपूर्ण समझते हों। एकत्रित विश्लेषण वह महत्वपूर्ण रास्ता है जो वास्तविक ग्राहक के चालक का पता लगाता है। यह वह बताता है कि एक ग्राहक किसी वस्तु के ऊपर दूसरे वस्तु को क्यों खरीदता है?

एकत्रित विश्लेषण बाजार शोध का एक सांख्यिकी तकनीकी है जो यह निश्चित करता है कि कैसे कोई ग्राहक (लोग) किसी वस्तु या सेवा के विशेषता को मूल्य प्रदान करते है।

इस तकनीकी का विकास विपणन शास्त्री पॉल ग्रीन (Paul Green) ने 1980 में किया था।

15.6.1 एकत्रित (संयुक्त) विश्लेषण के गुण एवं स्तर :

गुण और स्तर एकत्रित या संयुक्त विश्लेषण के मूलभूत आधार बनाते हैं। संयुक्त विश्लेषण के अन्तर्गत उत्पाद या सेवा को उसके घटक मार्गों में तोड़ा जा सकता है– उदाहरण के लिए एक मोबाईल फोन का आकार, वजन, बैटरी जीवन, पता पुस्तिका का आकार आदि। एक सामान्य मोबाइल फोन बनाने वाले इन तत्वों में से प्रत्येक को एक विशेष के रूप में जाना जाता है।

उत्पादों और सेवाओं को विशेषताओं और स्तरों में तोड़ना यह जांचने का एक अत्यन्त शक्तिशाली उपकरण है कि कोई व्यवसाय क्या पेशकश करता है और उसे क्या पेशकश करनी चाहिए। नए उत्पाद के विकास के लिए इस बात का प्रमुखता से ध्यान रखना चाहिए कि ग्राहक सबसे अधिक महत्व क्या रखता है। इसका मतलब यह है कि व्यवसाय अपने प्रयासों को उन क्षेत्रों पर केन्द्रीत कर सकता है जो ग्राहकों के पक्ष में हैं।

संयुक्त या एकत्रित विश्लेषण में, विशेषताओं और स्तरों को निश्चित तरीके से व्यवहार करना पड़ता है ताकि संयुक्त विश्लेषण के परिणाम मान्य और उपयोगी हो सकें।

15.7 बोध प्रश्न :

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें–

1. पूंज विश्लेषण .... की तकनीक है।
2. .... विधि पूँज विश्लेषण की विधियों में से एक है।
3. अंतरिक्ष में अनगिनत तारों के समूह बनाने पर आधारित विधि.......................है।?
4. पूँज विश्लेषण..............................चरणों में पूर्ण होते हैं।
5. ....बाजार शोध का एक सांख्यिकी तकनीकी है।

सत्य एवं असत्य छाँटिए :–

1. घनत्व आधारित विधि पूँज विश्लेषण की तकनीक नहीं है।
2. विभाजन का मुख्य लक्ष्य पुनर्वास है।
3. मेटा विश्लेषण में अनुसंधान परिणामों की समीक्षा नही की जाती है।
4. विपणकर्त्ताओं के लिए एकत्रित विश्लेषण तकनीक महत्वपूर्ण है।
5. श्रेणीबद्ध तकनीक एक पेड़ जैसा प्रारूप उत्पन्न करता है।

15.8 बोध प्रश्नों के उत्तर :

रिक्त स्थान वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. समंक विश्लेषण; 2, विभाजन ; 3. ग्रिड आधारित विधि ; 4. चार, 5. एकत्रित विश्लेषण

सत्य एवं असत्य वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. असत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. सत्य, 5. सत्य।

15.9 स्वपरख प्रश्न :

1. पूँज विश्लेषण का अर्थ स्पष्ट करें।
2. पूंज विश्लेषण की प्रमुख विधियों का उल्लेख कीजिए।
3. निम्नलिखित पर टिप्पणी लिखिए–

   (क). मेटा विश्लेषण

   (ख). संयुक्त अथवा एकत्रित विश्लेषण

////

इकाई – 16 प्रायिकता सिद्धान्त

इकाई की रूपरेखा

16.0 उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप :

- भावी अनिश्चितताओं के मध्य निर्णय लेने में सक्षम हो पायेगें।
- प्रायिकता के लिए प्रयुक्त गणना क्रिया को समझ पायेगें।
- प्रायिकता की अपनी शब्दावली होती है, उससे भली–भाँति परिचित हो पायेगें।
- परिकल्पना परीक्षण और सार्थकता–परीक्षण का उपयोग कर पायेगें।

16.1 प्रस्तावना :

मानव जीवन अनिश्चितताओं से भरा होता है। इस बीच मानव द्वारा अनेक निर्णय लेने पड़ते है। इसके निर्णय इन अनिश्चित घटनाओं के सम्बन्ध में प्रत्याशा पर आधारित होते है। देखा जाये तो वास्तव में जीवन का

सुख अनिश्चितताओं या प्रत्याशाओं के बीच निहित होता है। प्रायिकता के द्वारा ही तर्कसंगत अनुमान लगाया जाता है। यूरोप के जुआरियों तथा सटोरियों ने भाग्यलक्ष्मी (Goodess of fortune) की चपलता से निराश होकर तत्कालीन गणितज्ञों से अपनी द्युतक्रीड़ा सम्बन्धी समस्याओं के समाधान के लिए परामर्श लेना प्रारम्भ किया। इन गणितज्ञों ने इसका विधिवत् अध्ययन किया जिससे प्रायिकता सिद्धान्त का प्रादुर्भाव हुआ। यह इकाई प्रायिकता सिद्धान्त की व्याख्या करती हैं।

16.2 परिभाषा एवं अवधारणाएं :

अनिश्चित घटनाओं के प्रति अपना अनुमान हम 'संभावना या प्रायिकता (Probability) के रूप में व्यक्त करते है। उदाहरण के लिए सिक्का उछालने पर उसके चित (Head) की संभावना 1/2 हैं, चुनाव में किसी प्रत्याशी के विजयी होने की बहुत कम प्रायिकता है, 2050 में मानव के मंगल–ग्रह पहुँचने की 80 प्रतिशत सम्भावना हैं, आगमी अन्तर्राष्ट्रीय क्रिकेट प्रतियोगिता में भारत को जीतने की 75 प्रतिशत प्रायिकता है, इत्यादि। सामान्य भाषा में 'सम्भावना' या 'प्रायिकता' शब्द द्वारा घटनाओंकी अनिश्चितता की अभिव्यक्ति होती है परन्तु सांख्यिकी में इस शब्द का विशिष्ट अर्थ हैं। सांख्यिकीय अर्थ में प्रायिकता कोरा मात्रकल यात्रा या कोई भावनात्मक कथन नहीं हैं बस इस धारणा का एक वैज्ञानिक आधार है जिससे किसी घटना के घटित होने की सम्भावना का मापन होता है।

''समान ढ़ंगों से घटित होने वाली अनेक घटनाओं में से किसी एक के घटने की प्रायिकता उस घटना की अनुकूल परिस्थितियों की संख्या का समस्त सम्भाव्य परिस्थितियों की संख्या से अनुपात है।''

प्रायिकता एक अनुपात है जो मूल रूप से भिन्न है होता है तथा जिसे दशमलव के रूप में भी व्यक्त किया जाता है। 0 तथा 1 प्रायिकता की चरम सीमायें हैं। एक घटना जिसका घटित होना असम्भव है, की प्रायिकता शून्य (0) होगी वहीं जिसकी घटना घटित होना पूर्णतया निश्चित होता है उसकी प्रायिकता 1 होगी, क्योंकि सभी संभव परिस्थितियाँ इसके घटित होने के अनुकूल है।

प्रायिकता का परिकलन उसकी अवधारणा के विवेचन पर निर्भर करता है। वस्तुतः प्रायिकता की विभिन्न विचाराधाराओं के सम्बन्ध में विशेषज्ञों में गहन मतभेद है। विभिन्न दृष्टिकोणों के आधार पर प्रायिकता की चार विचार धारायें काफी प्रचलित जिनमे से प्रमुख विचारधारा का वर्णन निम्न हैं–

क. **विचारधारा की चिरप्रितिष्ठत अवधारणा** : यह अवधारणा सबसे प्राचीन है। इस विचारधारा के प्रणेता लाप्लेस (Laplace) है। लाप्लेंस के अनुसार, ''अनुकूल घटनाओं की संख्या का समान रूप से सम्भावित समस्त घटनाओं की कुल संख्या से अनुपात ही प्रायिकता है।''

इस अवधारणा की मान्यता है कि किसी प्रयोग द्वारा प्राप्त सभी परिणाम परस्पर अपवर्जी हैं तथा समान रूप से घटित होने वाले अथवा अपवर्जी हैं तथा समान रूप से घटित होने वाले अथवा समसम्भावी (Equalty cekely) है। उदाहरण के लिए यदि एक सिक्का उछाला जाए तो वह चित (Head) गिरेगा या वह (Tail); ये दोनों परिणाम परस्पर अपवर्जी है, अर्थात् दोनों ही एक साथ नहीं आ सकते। साथ ही चित्त एवं पट दोनों गिरने की समान सम्भावना है। चित गिरने की प्रायिकता 1/2 है और इसी प्रकार पट गिरने की प्रायिकता भी $\frac{1}{2}$ है। एक छः पहलुओं वाले पासे के फेके जाने पर 6 सम्भावनाएं हो सकती है– 1,2,3,4,5 या 6 बिन्दु वाले पहलू का ऊपर की ओर आना। 5 बिन्दुओं वाले पक्ष के ऊपर आने की प्रायिकता 1/6 है, विषम अंक वाले पहलू के ऊपर आने की प्रायिकता $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ है। इसी प्रकार ताश के 52 पत्तो की गड्डी में से यदि अनायास हो एक पता निकाला जाये तो उसके पास के इक्कें निकालने की

प्रायिकता $\frac{1}{52}$1 है, 'कोई भी इक्का' होने की सम्भाविता $\frac{4}{57} = \frac{1}{13}$ है क्योंकि इक्को की संख्या 4 होती है। कुकुम का कोई भी पत्ता निकालने की प्रायिकता $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ है।

अतः चिरप्रतिष्ठित अथवा गणितीय अवधारणा के अनुसार प्रायिकता के लिए प्रयुक्त होने वाला सूत्र निम्न हैं– (घटना के घटित होने के के लिए)

$$P = P(A) = \frac{\text{A घटना के अनुकूल परिस्थितियों की संख्या}}{\text{सभी सम–सम्भाष्य परिस्थितियों की संख्या}} \quad \frac{M}{m+n}$$

जहाँ P या $P(A)$ = घटना के घटित होने की स्थिति 'सफलता' या सकल दृश्य–परिणाम के लिए संकेताक्षर।

घटना के न घटित होने के लिए सूत्र

$$Q = P(\bar{A}) = \frac{\text{A घटना के प्रतिकूल परिस्थितियों की संख्या}}{\text{सभी सम–सम्भाष्य परिस्थितियों की संख्या}} \quad \frac{M}{m+n}$$

जहाँ–

$q = P(\bar{A})$ = घटना के न घटने को असफलता या असफल दृश्य परिणाम के लिए संकेताक्षर।

A अतः के घटने की प्रायिकता	के न घटने की प्रायिकता
$P = P(A)\ \frac{M}{m+n}$	$q = P(\bar{A}) \quad \frac{n}{m+n}$

स्पष्ट है कि $P+q = \frac{M}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1$

इस प्रकार P ज्ञात होने पर q और q ज्ञात होने पर P निकाला जा सकता हैं :–

$P+q = 1$ तो $P = 1-q$, $q = 1-P$

या $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \qquad (\bar{A}) = 1 - P(A)$

जैसे ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से यादृच्छिक रूप से एक पत्ता निकालने पर उसके कोई बादशाह होने की प्रायिकता $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ है और बादशाह न निकालने की प्रायिकता $1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$ है।

16.3 गणन–क्रिया (क्रमगुणित, क्रमचय और संचय) :

प्रायिकता अथवा संभाव्यता को ज्ञात करने के लिए उस घटना (जिस घटना की प्रायिकता निकालनी है) के घटित होने की अनुकूल परिस्थितियों की संख्या (अंश) और घटना की सभी सम्भाव्य परिस्थितियों की कुल

संख्या (हर) को निश्चित करना आवश्यक होता है। व्यवहार में अंश और हर को निश्चित करना जटिल होता है, जिसके लिए गणन–क्रिया की कुछ विशिष्ट प्रविधियों का प्रयोग करना पड़ता है। ये प्रविधियाँ निम्न है–

क्रमगुणित (Factorial) : 1 से लेकर दिये हुए घटनात्मक पूर्णांक 'n' (Posistive integer) 'n' तक के सभी पूर्णांकों का गुणनफल 'n' क्रमगणित (n factorial) कहलाता है। जिसका संकेताक्षर n! है।

$$n! = 1, 2, 3, 4, ... n$$

व्यवहार में n! को अवरोही (decendingorder) क्रम में लिखा जाता है अर्थात्–

$n : = n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3) - - - - 3, 2,1$

$6! : = 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 = 720$

$n! : = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)!\ ..\ ..\ 3,2,1$

[(01 =, यदि n=1 तो n!=1 तथा = (n=1)! = 1!= 1(1–1)!=1= 1 x0! $\therefore 0! = \frac{1}{1} = 1$]

गणना का मूल सिद्धान्त : यदि किसी कार्य को करने के m तरीके हैं और यदि इनमें से किसी एक तरीके से कार्य हो जाने पर दूसरे कार्य को n तरीकों से किया जा सकें तो दोनों को एक साथ पूरा करने के mxn तरीके होगें। यही गणना का मूल सिद्धान्त है जिसे दो से अधिक कार्यों पर भी लागू किया जा सकता है।

प्रमाण : यदि एक क्रिया $a_1, a_2, a_3,$ ..... am अर्थात् m तरीकों से सम्पन्न की जा सकती है और दूसरी क्रिया b_1, b_2, b_3 ..... b_n अर्थात n तरीकों से की जा सकती है। तोदोनों क्रियाएँ साथ–साथ निम्न तरीकों से पूरी की जा सकती हैं।

	b_1	b_2	b_3	b_4	~~~	b_n
a_1	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4	~~~	a_1b_n
a_2	a_2b_1	a_2b_2	ab_3	a_2b_4	~~~	a_2b_n
a_3	a_3b_1	a_3b_2	d_3b_3	a_3b_4	~~~	a_3b_n
a_4	a_4b_1	a_4b_2	a_4b_3	a_4b_4	~~~	a_4b_n
:	:	:	:	:		:
a_m	a_mb_1	a_mb_2	a_mb_3	a_mb_4~~~		a_mb_n

: दोनों क्रियाओं के तरीकों की कुलसंख्या = mxn

उदाहरण (Illustration) : यदि छः पहलू वाले दो पासे लेकर उछाले जाएँ तो सभी संभावित परिणामों की कुला संख्या 6 X 6 = 36 होगी। जैसाकि निम्न तालिका से स्पष्ट है–

दो पासे के अभिप्रयोग में सम्भाव्य परिणाम

II I	1	2	3	4	5	6
1	1,4	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

यदि उपर्युक्त अभिप्रयोग में पहले पासे के एक परिणाम के साथ दूसरे पासे के उसी परिणाम का संयोजन (1, 1; 2; 2; 3, 3; 4,4; 5,5; 6,6) न हो तो तो कुल परिणामों की संख्या घटकर 30 रह जायेगी। 36 तरीकों में से 6 तरीके निकल जाएँगे। तालिका से स्पष्ट है कि ऐसे परिणामों की संख्या जिनमें कम से कम 9 का जोड़ (6,3;5,4; 4,5;3,6) 6,4;5,5;4;6 / 6,6) 10 तरीकों से और कम से कम 10 का जोड़ 10 या 11 12 का जोड़ अर्थात् (6,4:5,5;4,6 / 6,5;5,6 / 6,6) 6 तरीकों से प्राप्त हो सकता है। 12 का जोड़ केवल 1 तरीके (6,6) से प्राप्त हो सकता है।

उदाहरण (Illustration) :

गोरखपुर से प्रयाग जाने के लिए 16 बस सेवाएँ चलती है। एक यात्री गोरखपुर से प्रयाग जाता है और फिर वापस गोरखपुर लौट जाता है। बताइए वह यात्रा–जाना व लौटना–कितने तरीकों से पूरी कर सकता है यदि वह (क) किसी भी बस से लौटे, (ख) उस बस से न लौटे जिससे वह अजमेर गया था, (ii) उसी बस से लौटे जिससे वह गया था।

हल (Solution) :

(क) गोरखपुर से प्रयाग जाने के लिए 16 बस सेवायें हैं। अतः गोरखपुर से प्रयाग के लिए यात्री के सामने 16 विकल्प या तरीकें हैं। वह किसी तरीके से प्रयाग पहुँचने के बाद वापस भी 16 तरीकों से लौट सकता है। अतः यदि वह किसी भी बस से लौटे तो दोनों ओर की यात्रा पूरी करने के तरीकों की संख्या

$$= 16 \times 16 = 256$$

(ख). यदि वह उस बस से न लौटे जिससे प्रयाग गया था तो यात्रा 16 (16–1) = 16X15 = 240 तरीकों से सम्पन्न हो सकेगी।

(ग). यदि वह उसी बस से लौटे जिससे वह गया था, तो लौटने का एक ही तरीका होगा। गोरखपुर से प्रयाग जाने के तरीकों की संख्या = 16,1 प्रयाग से वापस गोरखपुर जान के तरीकों की संख्या जब वह उसी बस से लौटता है जिससे गया था = 1

अतः यात्रा पूरी करने के तरीकों की संख्या = 16 X 1 = 16

उदाहरण (Illustration) :

तीन पर्यटक एक ऐसे नगर में पहुँचते हैं जहाँ चार पाँच–सितारा होटल हैं। उनमें वे कितने तरीकों से ठहर सकते हैं यदि प्रत्येक एक अलग होटल में ही ठहरे? यदि प्रत्येक के अलग होटल में ठहरने की पाबंदी न रहे तो वे कितने तरीकों से ठहर सकते हैं?

हल (Solution) :

पहला यात्री चारों में से किसी भी ठहर सकता है। उसे एक होटल में ठहराने के बाद दूसरा 4–1=3 होटला में से किसी एक में ठहरा सकता है। अब तीसरे यात्री को केवल 3–1=2 होटलों में से किसी एक का चयन करना है।

पहले यात्री के ठहरने के तरीके = 4 ;

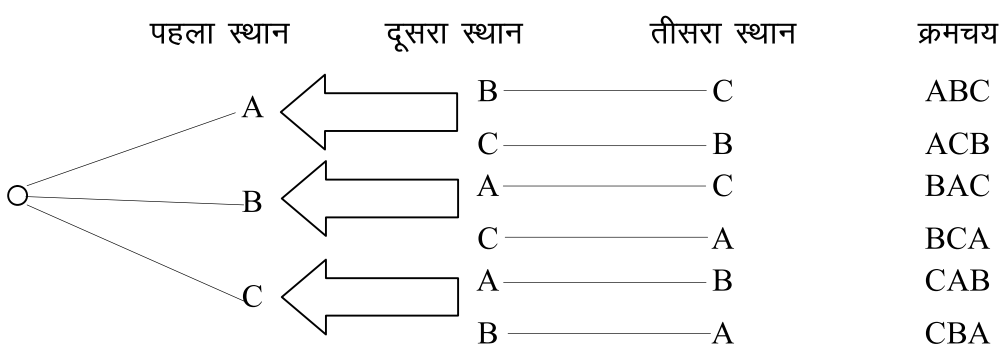
दूसरे यात्री के ठहरने के तरीक = 4–1=3

तीसरे के ठहरने के तरीके = 3–1=2 या 4–1–1 = 2; अतः तीनों यात्रियों के अलग–अलग ठहरने के तरीकों की संख्या = 4 X 3 X 2=24।

यदि अलग होटल में ठहरने की पाबंदी न रहे तो वे 4 X 4 X 4 = 64 तरीकों से ठहर सकते हैं।

क्रमचय (Permutation) : निश्चित वस्तुओं का एक निर्धारित क्रम विन्यास (arrangement), क्रमचय कहलाता है। दूसरे शब्दों में, क्रमचय का अर्थ अ समस्त क्रमों (orders) से है जिनमें हम दी वस्तुओं (n) में से कुछ (r) या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर विन्यासित (arrange) कर सकते हैं। आइए इसे निम्न उदाहरण द्वारा समझने का प्रयास करते हैं :–

तीन मोबाइल A, B और C के 6 क्रमचय प्राप्त होगें–



चित्र 16.3.1 तीन मोबाइलों का क्रमचय

संचय (Comloenation) : जहाँ क्रम को ध्यान में न रखकर निश्चित वस्तुओं के वर्गों या चयनों को किया जाता है वह संचय होता है। अर्थात् संचय से हमारा तात्पर्य उन वर्गों या चुनावों से है जो दी हुई वस्तुओं (n) में से कुछ (r) या सभी को एक साथ लेने पर प्राप्त होते हैं।

चार पुस्तकों – A, B, C तथा D में से दो–दो को साथ लेकन निम्न संचय और क्रमचय बनेगें :–

संचय (Combination)	संचय (Permutation)
A B	AB, BA
A C	AC, CA
A D	AD, DA
B C	BC, CB
B D	BD, DB
C D	CD, DC
कुल संख्या –6	12

उपर्युक्त स्थिति में क्रमचयों की संख्या, संचयों की संख्या से दो गुनी है क्योंकि प्रत्येक संचय के दो क्रम से क्रमचय बने है जैसे AB संचय के AB और BA क्रमचय हैं।

क्रमचय व संचय के लिए प्रयोग किये जाने वाले सूत्र : यदि दि हुई वस्तुत बहुत कम हों तो क्रमचयों व संचयों की संख्याएँ सरलता से ज्ञात की जा सकती है, परन्तु अधिक होने पर सूत्रों की सहायता ली जाती है। 'n' असमान वस्तुओं में से 'r' वस्तुओं के क्रमचय और संचय निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात किये जाते हैं :–

क्रमचय (P)

$$\boxed{n_{p_r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

संचय (C)

$$\boxed{n_{C_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

स्पष्टीकरण :– यदि 'n असमान वस्तुओं में से r लेकर क्रमचय बनाए जाएँ तो पहला स्थान 'n' ढ़ंगों से भरा जा सकता है, दूसरा स्थान n-1 ढ़ंगों से तीसरा n–2 ढ़ंगों से; चौथा n-(4-1) या n–3 ढ़ंगों से और अंत में r वाँ स्थान n-(n-r) या n-r+1 तरीकों से भरा जा सकता है। अतः सूत्र को (n-r)! से गुणा व भाग देने पर निम्न परिणाम निकलेगा–

$$n_{p_r} = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)........\,(n-r+1)\text{।}$$

सूत्र को (n-r)! से गुणा व भाग देने पर भिन्न परिणाम निकलेगा–

$$n_{p_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\,.....\,(n-r+1)\,(n-r-1)\,...\,3.2.1}{(n-r)\,(n-r-1)..3,2,1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

क्रमचय और संचय में सम्बन्ध : असमान वस्तुओं में से r! को साथ लेकर n_{c_r} संचय बनाये जा सकते हैं जिनमें से प्रत्येक संचय को ढ़ंगों से विन्यासित किया जा सकता है। जहाँ क्रम (order), ग्रेड (Grade) अथवा कोटि (rank) महत्वपूर्ण होते हैं, वहाँ क्रमचय की गणना की जाती है। क्रमचय के साथ व्यवस्थाएँ

(Arangemment) शब्द सामान्यतः जुड़ा रहता है। वहीं जहाँ क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता, वहाँ संचय की गणना करते हैं संचय के साथ समूह (Groups) चयन (Selection) आदि शब्द जुड़े रहते हैं।

अतः $n_{P_r} = n_{c_r} \times r!$

या

$$n_{c_r} = \frac{n_{pr}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

उदाहरणर्थ, 4 पुस्तकों में से तीन–तीन के संचय $4_{c_3} = \frac{4:}{(4-3)!} = 4$ होगें परन्तु क्रमचय अर्थात् 4_{P_3}अर्थात् 4_{C_3} X 3! = 4 X 3 X 2 X 1 = 24 होगें आगे दिये गये सारणी से स्पष्ट है। प्रत्येक संचय के 3! या 6 क्रमचय हैं।

4_{C_3} और 4_{P_3}

संचय	क्रमचय					
A B C	A B C_1	A C B_1	B A C	B C A	C B A	C B A
A B D	A B D_1	A D B_1	B A D	B D A	D B A	D B A
A C D	A C D_1	A D C_1	C A D	C D A	D A C	D C A
B C D	B C D_1	B D C_1	C B D	C D B	D B C	D C B
4	4 X 3! = 24					

क्रमचय संबंधी नियम : नियम (1) = n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाये जाने वाले क्रमचयों की संख्या–

$$n_{P_r} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \text{ होगी } (\because 0! = 1)$$

उदाहरण (Illustration) :

(क). मान बताइए – 15_{P_5}, 20_{P_2}, 8_{P_8}

(ख). आठ स्थानों वाले एक कार में 5 यात्री घुसते हैं वे कितने तरीकों से बैठ सकते हैं?

हल (Solution) :

(क). $15_{P_5} = \frac{15!}{(15-5)!} = \frac{15!}{10!} = \frac{15x14x13x12x11x10!}{10!}$

(यहाँ) 10 ! से 10 ! का मान 1 हो जायेगा)

अतः 15x14x13x12x11x1 =360360

$$20_{P_2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{20x19x18!}{18!}$$

अतः 20x19 =380

$$8_{P_8} = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8x7x6x5x4x3x2x1}{0!} = \frac{40320}{1}$$

$$=40320$$

(ख). यहाँ n=8 और r=5 है, अतः

$$= \quad n_{P_r} = 8_{P_5} \quad \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{(3!)} = \frac{8x7x6x5x4x3!}{3!}$$

$$= 8x7x6x5x4x1 = 6720$$

उदाहरण (Ilustration) :

(1) शब्द 'TRIANGLE' के सभी अक्षरों से कितने क्रमचय बन सकते हैं? (क) एक समय में सभी अक्षरों को लेकर (ख). एक समय में 3 अक्षरों को लेकर (ग) एक समय में सभी अक्षरों की लेकर यदि 'T' सदा आरम्भ में आर और E सदा अन्त में।

(2) 3, 1, 7, 0, 9, 5 अंकों से 6 अंकों वाली कुल कितनी संस्थाएं बनायी जा सकती है?

हल (Solution) :

(1). 'TRIANGLE' शब्द में आठ विभिन्न अक्षर हैं–

(क) सभी आठ अक्षरों को लेकर निम्नलिखित क्रमचय बनेगें–

$$= \quad 8_{P_8} = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8x7x6x5x4x3x2x1!}{o!} = 40320$$

(ख) तीन अक्षर लेकर बनाये जाने वाले क्रमचय –

$$= \quad 8_{P_3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} \quad \frac{8x7x6x5!}{5!} = 8x7x6$$

= 336 क्रमचय होगें।

(ग). सभी आठ अक्षरों को लेकर लेकिन 'T' से शुरू और E पर समाप्त होने वाले क्रमचयों की संख्या को ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया, अपनायी जायेगी–

- 'T' सदा आरंभ में और 'E' सदा अंत में रहेगा (शर्तानुसार) शेष 8–2 =6 अक्षरों के क्रमचय निम्न होगें–

$$= 6_{P_6} = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{8!}{5!} \quad \frac{6x5x4x3x2x!}{01} = \frac{720}{i} = 720$$

क्रमचय होगें जिन सभी में यह शर्त पूरी होगी।

- 6 विभिन्न अंक दिये हुए हैं और उनसे 6,6 अंकों की संख्याएँ बनानी हैं। अंतः 6 अंको वाली राशियों की संख्या = 6_{P_6} = 6! = 720 परन्तु इन 720 संख्याओं में ऐसी संख्याए भी

शामिल है जो शून्य (0) से आरम्भ होती है और वस्तुतः– 5 अंकों वाली संख्याएँ हैं। ये संख्याएँ कुल $5_{P_5} = 5! = 120$ है जो कि 720 में सम्मिलित हैं अतः 6 अंकों वाली राशियों की वास्तविक संख्या– $6_{P_6} - 5_{P_5}$

या 720–120

= 600

नियम : 2 जब n वस्तुओं में से कुछ आपस में समान हो तो स्पष्ट है कि उनके क्रमचयों की संख्या $n_!$ से कम होगी। अतः यदि n वस्तुओं में से P वस्तुएँ पूर्णतः एक समान और एक प्रकार की हों, q वस्तुएँ पूर्णतः एक स्थान और दूसरे प्रकार की हो। r वस्तुएँ पूर्णतः समान और तीसरी किस्म की हों और शेष वस्तुएँ भिन्न हों तो सभी n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या निम्न सूत्र से ज्ञात की जायेगी।

$$= \frac{n!}{p!q!r!}$$

उदाहरण (Iluslration) :

निम्न शब्दों के अक्षरों को कितने तरीकों से क्रमबद्ध (arranged) किया जा सकता है?

(अ). COMMITTEE (ब). ANSWER

(स). ECONOMICS (द). PROBABILITY

हल (**Solution**) :

अ. **COMMITTEE** शब्द में कुल 9 अक्षरों के क्रमचय की संख्या–

$$\frac{9!}{2!\,2!\,2!} \qquad (MM = 2, TT = 2, EE = 2)$$

$$= 45360$$

ब. **ANSWER** शब्द में कुल 6 अक्षरों के की संख्या–

$(r = n = 6),$ $n_{P_n} = 6_{P_6}$ क्रमचय बन सकते हैं–

इस प्रकार $n_{P_r} = 6_{P_6} = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6X5X4X3X2X1=720}{0! \qquad 1}$

$$= 720$$

स. **ECONOMICS** शब्द में कुल 9 अक्षर है जिनमें 'C' तथा 'O' दो–दो बार आये है अतः क्रमचयों की संख्या–

$$= \frac{9!}{2! - 2!} = \frac{9X8X7X6X5X4X3X2X1}{2 X 1 X 2 X 1} = 907 X 20$$

द. **PROBABILITY** शब्द में कुल 11 अक्षर है जिनमें 'B' तथा 'I' दो–दो बार आये है अतः क्रमचयों की संख्या–

$$= \frac{11!}{2!\,2!} = \frac{11 X10 X9 X8 X7 X6 X5 X4 X3 X2 X1}{2 X 1 X 2 X 1} = 9979 X 200$$

उदाहरण **(Illustration)** :

1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 अंकों में कितनी संख्याएं बनायी जा सकती है यदि विषम अंक सदा विषम स्थानों पर ही रहें।

हल **(Solution)** :

विषम अंकों की संख्या 4 है। इनको व्यवस्थित करने पर–

$= \frac{4!}{2!\,2!}$ (क्योंकि 3 और 1 दो–दो हैं)

$= \frac{4 X 3 X 2}{2 X 2} = \frac{12}{6} = 6$

समअंक 2, 4, 2 अर्थात् तीन के लिए क्रमचय

$\frac{3!}{2!}$ (दो–दो बार हैं)

$= \frac{3 x 2}{2} = 3$

अतः कुल संख्याए 6 X 3 = 18 बनेगी।

नियम –3, दी हुई n असमान वस्तुओं में से r वस्तुएँ लेकर बनाये गये क्रमचयों की संख्या निम्न प्रकार निकाली जा सकती है यदि प्रत्येक r बार दोहराई जाये–

पहला स्थान 'n' तरीकों से भरा जा सकता है, दूसरा भी 'n' ढ़ंगों से (n- 1 तरीकों से नहीं) भरा जा सकता है और इसी प्रकार r तक स्थान n x n x n x ----- r तक तरीकों से भरे जा सकते हैं। अतः क्रमचयों की संख्या n^r होगी।

उदाहरण **(Illustration)** :

(अ). 5 इनाम, 4 लड़कों को कितने तरीकों से बाँटे जा सकते हैं। जबकि किसी भी लड़के को इनाम दिये जा सकते हैं।

(ब). 5 लड़कों और 3 लड़कियों को एक पंक्ति में कितने तरीकों से क्रमबद्ध किया जा सकता है यदि–

1. तीनों लड़कियाँ एक साथ खड़ी हों?

2. दो लड़कियाँ कभी पास–पास न खड़ी हों।

हल (**Sollution**) :

अ. प्रश्नानुसार पहला इनाम 4 लड़कों में से किसी एक को 4 तरीकों से बाँटा जा सकता है, दूसरा इनाम की 4 लड़कों में से किसी एक को अर्थात् 4 तरीकों से बाँटा जा सकता है। इस प्रकार 2 इनाम $4 \times 4 = 4^2$ तीन इनाम $4 \times 4 \times 4 = 4^3$, चार इनाम $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$, अंत में 5 इनाम $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$, = 1024 होगी।

(ब).1. तीनों लड़कियों को एक साथ पास–पास खड़ा होना है अतः उन्हे एक इकाई माना जाएगा। अतः 5 (लड़के) + 1 (लड़कियों का समूह) = 6! इकाइयों को क्रमबद्ध करना है। अभीष्ट तरीकों की संख्या = 6! लेकिन 6 : में से प्रत्येक क्रमचय मे 3 लड़कियों का समूह है जो 3! तरीकों से पास–पास खड़ी हो सकती है। अतः कुल विन्यास

$6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$ होगें।

2. लड़कों को B (Boys) तथा लड़कियों को G (Girl) द्वारा निरूपित किया गया है यहाँ प्रश्नानुसार निम्न पैटर्न बनेगें–

GBGBGBGBGBG

5 लड़के B है जिनका विन्यास 5 ! तरीकों से किया जा सकता है परन्तु दो लड़कियों (G) को पास–पास नहीं खड़ा होना है। अतः 6 संकेत द्वारा व्यक्त कुल 6 स्थानों (n) पर उन्हें खड़ा किया जा सकता है। उनकी संख्या केवल 3 (r) है अतः 6_{P_3} तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

अत : अभिष्ट क्रमचयों की संख्या $= 5!\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{5 X 4 X 3 X 2 X 6 X 5 X 4}{2 X 1}$

$= 1,4,400$

संचय सम्बन्धी नियम : इस खण्ड में संचय सम्बन्धी नियम की व्याख्या की गयी जो प्रायिकता की समझ को विकसित करने मे अत्यन्त सहायक है–

नियम–1 : 'n' असमान वस्तुओं मे से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाये गये संचयों n_{c_r} या $\left(\frac{n}{r}\right)$ संकेत द्वारा व्यक्त की जाती है। स्पष्ट किया जा चुका है कि प्रत्येक संचय को $r!$ ढ़ंग से क्रमबद्ध किया जा सकता है।

अर्थात्– $n_{p_r} = n_{c_r} X\, r! \therefore n_{c_r} = \frac{n_{p_r}}{r!}$

$$\therefore\ n_{c_r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

उदाहरण (Illustration) :

6 जापानी और 5 भारतीयों में से 5 सदस्यों की एक कमेटी बनयी है। यह कमेटी कितनी प्रकार से बनायी जा सकती है अगर उस कमेटी मे 2 जपानी जरूर हो।

हल (Sollution) :

समिति में 5 सदस्य लेने हैं जिनमें 2 जापानी और शेष 3 भारतीय होगें।

6 में से 2 जापानियों के चयन के तरीकों की संख्या $= 6_{c_2}$

5 में से 3 भारतीय के चयन के तरीकों की संख्या $= 5_{C_3}$

अतः समिति के संगठन में कुल तरीकों की संख्या–

$$= 6_{c_2}\ \text{X}\ S_{C_3}$$

$$= \frac{6!}{(6-2)!\,2!}\ \text{X}\ \frac{5!}{(5-3)!\,3!}$$

$$= \frac{6!}{4!\,2!}\ \text{X}\ \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{6 \text{ x } 5 \text{ x } 4!}{4!\,2!}\ \text{X}\ \frac{5 \text{ x} 4 \text{ x } 3!}{2!\,3!}$$

$$= \frac{6 \text{ x } 5}{2}\ \text{X}\ \frac{5 \text{ x } 4}{2} = 3 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 2 = 150$$

उदाहरण (Illustration) :

एक थैले में 5 काली, 3 सफेद और 2 लाल गेद हैं। बतलाइये कितने तरीकों से–

(अ). 3 गेदें निकाली जा सकती है?

अर्थात् 10_{c_3} तरीकों सें

(ब). 3 काली गेंदें निकाली जा सकती हैं?

(स). 2 काली और 2 सफेद गेदें निकाली जा सकती हैं?

(द). प्रत्येक रंग की एक–एक गेंद निकाली जा सकती है।

हल (Sollution) :

(अ). 3 गेदें निकाली जा सकती है। अर्थात् 10_{c_3} तरीकों से

अर्थात् $\frac{10!}{(10-3)!\,3!} = \frac{10!}{7!\,3!} =$ 120 तरीकों से

(ब). 5 काली गेदें है अतः काली गदें निकालने के तरीके

$$5_{c_3} \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ तरीकों से}$$

(स). 2 काली गेदें निकालने के तरीके $= 5_{c_2}$

2 सफेद गेंदे निकालने के तरीके $= 3_{c_2}$

∴ 2 काली और 1 सफेद गेदों को निकालने के तरीके

$= 5_{c_2} \text{ X } 3_{c_2}$

या $= \frac{5!}{(5-2)!2!} \text{ X } \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} \text{ X } \frac{3!}{1!2!}$

$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} \text{ X } \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = \frac{20}{2} \text{ X } \frac{3}{1} = 30$

$= \frac{6 \times 5}{2} \text{ X } \frac{5 \times 4}{2} = 3 \times 5 \times 5 \times 2 = 150$

(द). 1 काली गेदें, 1 सफेद गेंद निकाले जाने की तरीकों की संख्या–

$= 5_{c_1} \times 3_{c_1} \times 2_{c_1} = \frac{5!}{(5-1)!1!} \text{ X } \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{2!}{(2-1)!1!}$

$= \frac{5!}{4! \times 1!} \text{ X } \frac{3!}{1!1!} \text{ X } \frac{2!}{1!1!} = 5 \times 3 \times 2 = 30$

नियम–2 : संचयों की अनुपूर्ति (Complementarity) की प्रकृति होती है अर्थात–

$$n_{c_r} = n_{c_{n-r}}$$

$$n_{c_{n-1}} = \frac{n!}{\{n-(n-r)\}!(n-r)!} = \frac{n!}{\{n-(n+r)\}!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!} = n_{c_r}$$

इस गुण के कारण गणना सरल हो जाती है–

$$n_{c_n} = n_{c_o} = 1$$

$$n_{c_n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1; n_{c_o} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\therefore n_{c_n} = n_{c_o} = 1$$

नियम–3 : सभी सम्भाव्य संचयों की कुल संख्या $2^n - 1$ होती है। n वस्तुओं में से कुछ या सभी वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की कुल संख्या निम्न प्रकार निश्चित की जा सती है–

प्रत्येक वस्तु के 2 तरीके हैं; या तो वह चुनी जा सकती है या छोड़ी जा सकती है और प्रत्येक वस्तु के 2 तरीको से अन्य वस्तुओं के 2 तरीके सम्बद्ध है इस प्रकार n वस्तुओं को चुनने के तरीको की कुल संख्या $2 \times 2 \times 2 \times - - - n$ तक $= 2^n$ होगी लेकिन इस संख्या 2^n में एक ऐसी परिस्थिति भी शामिल है जिसमें प्रत्येक वस्तु को छोड़ दिया जाये; अतः कुल संचयों की संख्या $2^n - 1$ होगीं।

वैकल्पिक रीति –

$$n_{c_1} + n_{c_2} + n_{c_3} + n_{c_4} + - - - n_{c_n} = 2^n - 1$$

उदाहरण (Illustration) :

(क). एक व्यक्ति के 7 सखा है। उनमें से एक या अधिक को वह रात्री भोज पर कितने तरीकों से बुला सकता है?

(ख). हाईस्कूल की परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए 6 विषयों में से प्रत्येक में न्यूनतम अंक प्राप्त करना अनिवार्य है। एक परीक्षार्थी कितने तरीकों से अनुत्तीर्ण हो सकता है?

हल (Sollution) :

(क). कुल 7 मित्र है जिनमें से 1 या 1 से अधिक को छाँटना है। अतः यह कार्य निम्न तरीकों से संपादित होगा–

हल (Sollution) :

$$7_{c_1} + 7_{c_2} + 7_{c_3} + 7_{c_4} + 7_{c_5} + 7_{c_6} + 7_{c_7}$$

$= 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 127$

(ख). हाईस्कूल की परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए 6 विषयों में से प्रत्येक में न्यूनतम अंक प्राप्त करना अनिवार्य है। एक परीक्षार्थी कितने तरीकों से अनुत्तीर्ण हो सकता है?

जहाँ 7_{c_1} का मान

$$= \frac{7!}{(7-1)!1!} = \frac{7!}{1!} = \frac{7 \times 6!}{6!1!} = \frac{7}{1} = 7$$

$$7_{c_2} \text{ का मान } \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!2!} = \frac{42}{2} = 21$$

ऐसे ही बाकी सभी का मान निकाला गया है–

वैकल्पिक रीति से हल–

1 या अधिक के चयन के तरीकों की संख्या = $2^n-1 = 2^7-1$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$

$= 128 - 1 = 127$

(ख). प्रत्येक विषय में छात्रों के 2 परिणाम हो सकते हैं– वह उत्तीर्ण हो सकता है या अनुत्तीर्ण 1 इस प्रकार 6 विषयों में वह $2^n = 2^6$ परिणाम प्राप्त कर सकता है जिनमें से 1 परिणाम के अनुसार वह सभी विषयों में उत्तीर्ण अर्थात् किसी में भी अनुत्तीर्ण नहीं होता $\left[n_{c_0} = 1\right]$अतः वह 2^6 1 = 63 तरीकों से अनुत्तीर्ण हो सकता है।

16.4 प्रयोग होने वाली शब्दावालियों का स्पष्टीकरण :

प्रायिकता की गणना करनी हो या विभिन्न प्रक्रियाओं और प्रभेयों का विवेचना करना हो उसके लिए कुछ महत्वपूर्ण पारिभाषिक शब्दों की व्याख्या करना परम–आवश्यक है जो निम्न है–

(क). **यादृच्छिक अभिप्रयोग** : परीक्षण (Trial) या अभिप्रयोग का आशय एक ऐसे कार्य से है जो कुछ परिस्थितियों में सम्पन्न किया जा सकता है और जिसके कुछ सम्भाव्य परिणाम होते हैं। यादृच्छिक अभिप्रयोग उन अभिप्रयोग या परीक्षणों को कहते हैं जिनके परिणाम दैव या संयोग पर निर्भर होते हैं।

(ख). **घटना** : किसी परीक्षण में सम्भाव्य परिणामों में से प्रत्येक परिणाम को 'घटना' (Event) कहते हैं। घटना एक विशिष्ट विवरण के अनुरूप होती है। उदाहरणार्थ एक सिक्का उछालने के अभिप्रयोग में दो सम्भाव्य घटनाएं हो सकती है प्रथम चित और दूसरा पट इसी प्रकार ताश की गड्डी में से पान का सिक्का खींचा जाना एक घटना है।

(ग). **सम–सम्भावी घटनाएँ (Equality Cekely Events)** : दो या अधिक घटनाएँ समसम्भावी होती हैं यदि उनके घटित होने की सम्भाविता समान हो अर्थात् किसी एक के घटने की प्रयुक्त अन्य घटनाओं के घटने की प्रायिकता से अधिक या कम न हो। जैसे एक सुड़ौल सिक्के के दीर्घकाल में अनेक बार उछाले जाने पर 'चित' या 'पट' आने की समान सम्भावना होती है– अतः 'चित' या 'पट' सम–सम्भावि घटनाएँ हैं।

(घ). **प्रारम्भिक एवं मिश्र घटनाएँ** : किसी परीक्षण के एक सम्भाव्य परिणाम को प्रारम्भिक या सरल घटना कहते हैं। सरल या प्रारम्भिक घटना को अन्य घटनाओं के संयोजन के रूप में उपविभाजित नहीं किया जा सकता। उदाहरणार्थ 52 पत्तों में से एक बेगम का पत्ता निकलना, 8 सफेद और 4 काली गेंदों वाले एक थैले में से काली गेंद का निकलना ये प्रारम्भिक या सरल घटनाएँ हैं। जब दो या दो से अधिक घटनाएँ एक साथ घटती है तो उनके संयुक्त रूप से घटित होने की घटना को मिश्र घटनाएं कहते हैं, और ये सरल घटनाओं के संयोजन (Combination) होती हैं। जैसे– 8 सफेद और 4 काली गेंदों वाली थैली मे से 3–3 काली गेंदों का निकलना मिश्र घटनाएं हैं। इसी प्रकार ताश की गड्डी में से खींचे गए दो पत्तों में दोनों का 'बेगम' होना। पहले पत्ते का बेगम होना सरल घटना है किन्तु दूसरे पत्ते का 'बेगम' होना पहले खींचे गए पत्ते के स्वरूप पर निर्भर करता है।

(घ). **स्वतन्त्र घटनाएँ** : जब दो या अधिक घटनाओं का प्रभाव एक–दूसरे पर नहीं पड़ता तब उन्हें स्वतंत्र घटनाएँ कहा जाता है। उदाहरण के लिए एक सुड़ौला सिक्का दो बार उछाला जाता है तो दूसरी बार उछालने पर प्राप्त परिणाम पर पहली उछाल के परिणाम का कोई असर नहीं पड़ता। दोनों उछालों के परिणाम स्वतंत्र है। ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं। इनमें एक लाल रंग का पत्ता खिंचने की संभावना

26 / 52 है। यदि एक पत्ता निकालकर फिर गड्डी में मिला दिया जाता है पुनः लाल रंग का पत्ता निकाला जाता है तो उसकी भी प्रायिकता 26 / 52 होगी। इस स्थिति में दो बार लाल रंग का पत्ता निकालना स्वतंत्र घटनाएँ है। इसी तरह दो पासे एक साथ फेकें जाएं तो एक पर बिन्दु 4 के आने का दूसरे पर 4 (या अन्य बिन्दु आने का कोई प्रभाव नहीं पड़ता) अतः ये घटनाएं भी स्वतंत्र है।

संकेताक्षरों के रूप में–

$$P\ (A\ \text{and}\ B) = P\ (A)\ X\ P\ (B)$$

उदाहरण (Illustration) :

अ 40 प्रतिशत दशाओं में सत्य बोलता है और ब 70 प्रतिशत दशओं में सत्य बोलता है। ज्ञात कीजिए कि किसी तथ्य का वर्णन करते समय वे कितने प्रतिशत समय एक–दूसरे के विपरीत बोलेगें?

हल (Solution) :

'अ' का सत्य बोलना या झूठ बोलना 'ब' के सत्य या झूठ बोलने से सर्वथा स्वतंत्र है। 'अ' के सत्य बोलने की प्रायिकता = $\frac{40}{100}$ अतः असत्य बोलने की प्रायिकता = $\frac{60}{100}$ इस प्रकार 'ब' के सत्य बोलने की प्रायिकता = $\frac{70}{100}$ अतः असत्य बोलने की प्रायिकता =$\frac{30}{100}$ एक दूसरे के विपरीत बोलने का अर्थ है।

अ सत्य बोले और ब असत्य बोले या 'अ' असत्य बोले और 'ब' सत्य बोले

वांछित प्रायिकता= $\left(\frac{40}{100}\ X\ \frac{30}{100}\right) + \left(\frac{60}{100}\ X\ \frac{70}{100}\right)$

$$= \frac{12}{100} + \frac{42}{100} = \frac{54}{100}$$

उदाहरण (Illustration) :

ताश के 52 पत्तों की एक प्रामाणिक गड्डी में से एक पत्ता निकाला और उसका रंग देखकर उसे वापस मिला दिया, तब एक पत्ता दुबारा निकाला। दोनों पत्ते पान के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

प्रथम बार पान का पत्ता एवं दूसरी बार पान का पत्ता आने की प्रायिकता ज्ञात कराई गई है, क्योंकि पत्ता वापस रख दिया जाता है, अतः यह प्रश्न स्वतंत्र घटनाओं का हैं।

P (I पान का पत्ता और II पान का पत्ता)= $\frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$

(च). **आश्रित घटनाएँ (Dependents Events)** : उन घटनाओं को आश्रित घटनाएँ कहते हैं जिनमें से एक के घटने का प्रभाव दूसरी (या अन्य) घटना के घटित होने पर पड़ता है, और प्रायिकता पूर्ववत् नहीं रहती। ताश के 52 पत्तों में से 1 लाल पत्ता निकालने की प्रायिकता $\frac{26}{52}$ है परन्तु लाल पत्ता निकालने के बाद यदि उसे गड्डी में शामिल न किया जाए और दूसरी बार एक पत्ता खींचा जाए तो उसके लाल होने की प्रायिकता $\frac{26-1}{52-1} = \frac{25}{51}$ होगी।

दूसरे उदाहरण में 5 काली और 3 सफेद गेदों वाले थैले में से पहली बार काली गेंद निकालने की सम्भावना $\frac{5}{8}$ है परन्तु दूसरी बार काली गेंद निकालने की प्रायिकता $\frac{4}{7}$ होगी जो पहले से भिन्न है। इस प्रकार दो घटनाएँ A और B आश्रित घटनाएं कहलायेगी जबकि B घटना तभी घटित हो सकती है जबकि A घटित हो गई है इस प्रकार की प्रायिकता को सप्रतिबन्ध प्रायिकता भी कहते हैं।

सांकेतिक रूप में यदि A और B आश्रित घटनाएँ है तो B की सप्रतिबन्ध प्रायिकता (जबकि A प्रदत्त हो) निम्नवत होगी–

$$P\ (A \text{ और } B) = P\ (A)\ X\ P\ (B/A)$$

यहाँ P (B / A) का आशय Probaolity of B Given A है। यहाँ B घटना की प्रायिकता इस मान्यता पर आधारित है कि घटना A घट चुकी है। जैसे यदि किसी ताश की गड्डी में से एक–एक कर दो पत्ते निकाले जाते हैं एवं पहली बार निकाला गया पत्ता वापस नहीं रखा जाता तब यह एक आश्रित घटना का उदाहरण है।

उदाहरण **(Illustration)** :

एक थैले में 6 सफेद और 4 काली गेंदें हैं। 4 गेंदे बारी–बारी से एक–एक करके निकाली जाती है और वापस थैले में नहीं रखी जाती। क्या सम्भावना है कि वे एक–एक करके भिन्न रंगों के क्रम से निकलेगी?

हल **(Illustration)** :

6 सफेद एवं 4 काली गेंदों में से एक–एक करके 4 गेंद बिना वापस रखे भिन्न रंग की होने की प्रायिकता की गणना से पूर्व निम्न विकल्प हो सकते हैं–

= P (W, B, W, and B) P (B; W, B और W)

W = सफेद तथा B = काली

$$= \left(\frac{6}{10}\ X \frac{4}{9}\ X \frac{5}{8} X \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{4}{10}\ X \frac{5}{9}\ X \frac{3}{8} X \frac{5}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

उदाहरण **(Illustration)** :

एक ढ़ेर में 10 इकाइयाँ है जिनमें से 3 दूषित हैं। इस ढ़ेर में से एक–एक करके बिना वापस रखे हुए तीन इकाइयाँ निकाली गई। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि सभी इकाइयाँ अदूषित थीं।

हल **(Solution)** :

निम्न स्थितियाँ बनेगी–

पहली बार अदूषित इकाई चुनने की प्रायिकता $= \frac{7}{70}$

दूसरी बार अदूषित इकाई चुनने की प्रायिकता $= \frac{6}{9}$ (बिना वापस रखे)

तीसरी बार अदूषित इकाई चुनने की प्रायिकता $= \frac{5}{8}$ (बिना वापस रखे)

अतः प्रायिकता (P) $= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{7}{24}$

(छ). **परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually Exclussive Events)** : जब एक परीक्षण में दो घटनाएँ एक साथ नहीं घट सकती अर्थात् एक का घटित होना दूसरी घटना को घटने से रोक देता है, तो उन्हे परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहते है। उदाहरण एक सुड़ौल सिक्के का 'चित' और 'पट' आना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ है। छः फँस वाले पासे के फेके जाने पर यदि परिणाम 3 आता है तो साथ–साथ उसी क्षेपण में 4 या 6 नहीं आ सकता।

(ज). **अतिव्यापी घटनाएँ (Overlapping Events)** : दो या दो से अधिक घटनाएं अतिव्यापी घटनाएँ कहलाती है यदि एक घटना का कोई अंश दूसरी घटना के किसी अंश के साथ–साथ घटित हो सके। वास्तव में ये घटनाएँ आंशिक रूप से अतिव्यापी होती है। जैसे ताश की गड्डी में से एक ईंट का पत्ता खींचना और एक इक्का (Arace) खींचना परस्पर अतिव्यापी घटनाएँ है क्योंकि ईंट के इक्के में दोनों घटनाएँ ईंट का पत्ता तथा इक्का–सर्वनिष्ठ रूप से व्याप्त है। उक्त परिस्थिति में ईंट का पत्ता या किसी इक्के की खींचे जाने की प्रायिकता निम्न प्रकार ज्ञात की जाएगी–

ईंट का पत्ता निकालने की प्रायिकता P (A) $= \frac{13}{52}$

एक इक्का निकलने की प्रायिकता P (B) $= \frac{4}{52}$

ईंट का इक्का (अतिव्यापी घटना जो उपर्युक्त दोनों में शामिल है) की प्रायिकता $P(AB) = \frac{1}{52}$

अतः ईंट का पत्ता या एक इक्का निकलने की प्रायिकता $= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} = \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

यदि A और B दो घटनाएँ हो जो आंशिक रूप से अतिव्यापी हो तो A या B की प्रायिकता योग प्रमेय द्वारा निम्न सूत्रानुसार परिकलित की जाएगी–

$$P\ (A \text{ या } B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A \text{ और } B)$$

16.5 प्रायिकता प्रमेय (योग प्रेम और गुणन प्रमेय) :

विभिन्न प्रकार की घटनाओं की प्रायिकता का आंकलन करने के लिए अलग–अलग परिस्थितियों ये विशिष्ट नियमों और प्रमेयों का अनुप्रयोग किया जाता है। इनमे दो प्रमेय योग प्रमेय तथा गुणन प्रमेय का वर्णन निम्न है–

योग प्रमेय (Addition Thearem) : यदि दो घटनाएँ परस्पर अपवर्जी एक का घटित होना दूसरे घटना को रोक देना हों, और एक घटना के घटित होने की प्रायिकता (PCA) तथा दूसरीं घटना के घटित होने की प्रायिकता P(B) हो दोनों मे से किसी एक घटना के घटने की प्रायिकता $P(A) + P(B)$ होगी।

सूत्र रूप में $$P\,(A \text{ या } B) = P\,(A) + P\,(B)$$
or
$$P\,(A+B) = P(A) + P\,(B)$$

प्रमेय की उत्पत्ति (Proof of the Theorem) : मान लिजिए कि n किसी प्रयोग की सम्पूर्ण और समप्रायिक स्थितियों की कुल संख्या हैं। m_1 और m_2 क्रमशः घटना A और B के घटित होने के अनुकूल मामलों की संख्या है। तब

$$P\,(A) = \frac{M_1}{n}$$
$$P\,(B) = \frac{M_2}{n}$$

चूँकि घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी है, घटना A या B के घटित होने के तरीकों की कुल संख्या $M_1 + M_2$ है।

$$P\,(A \text{ या } B) = \frac{M_1+M_2}{n} = \frac{M_1}{n} + \frac{M_2}{n} = P(A) + P(B)$$

अतः $P\,(A \text{ या } B) = P(A) + P\,(B)$

इसलिए यह प्रमेय सिद्ध हुआ।

सामान्यिकरण (Generalisation) : प्रमेय को तीन या अधिक परस्पर अनन्य घटनाओं तक बढ़ाया जा सकता है। यदि A, B और C तीन पूर्णतः आपवर्जी घटनाएँ हैं, तब

$$P\,(A+B+C) = P(A) + P\,(B) + (C)$$

उदाहरण (Illustration) : 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है या तो राजा या रानी प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल (Solution) : 52 पत्तों की एक गड्डी में 4 राजा और 4 रानियाँ है।

किंग कार्ड निकालने की प्रायिकता $P(K) = \frac{4}{52}$

क्वीन कार्ड निकालने की प्रायिकता $P(8) = \frac{4}{52}$

∴ दोनों घटनाएं परस्पर अपवर्जी है, राजा या रानी के आने की प्रायिकता

$$P(K \text{ या } Q) = P(K) + P(Q) =$$
$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} + \frac{8}{52} = \frac{3}{13}$$

उदाहरण (Illustration) : एक थैले में 8 सफेद; 6 काली, 4 हरी और दो पीली गेंदे है। एक परीक्षण में एक काली या एक हरी या एक पीली गेंद के निकलने की क्या सम्भावना हैं?

हल (Solution) : थैले में कुल 20 गेदें है।

काली गेंद निकालने की प्रायिकता =

हरी गेंद निकालने की प्रायिकता =

पीली गेंद निकालने की प्रायिकता =

अतः काली या हरी या पीली गेंद की प्रायिकता =

$$\frac{6}{20} + \frac{4}{20} + \frac{2}{20} + \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

उदाहरण (Illustration) :

(क). दो पासों को एक बार फेंकने पर कम से कम 10का योग आने की क्या प्रायिकता है?

(ख). दो पासों के फेकने पर 2 या 8 या 12 के पोंग प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए–

हल (Solution) :

(क) दो पासे एक साथ फेके जाने पर कुल 36 परिणाम (6X6) प्राप्त हो सकते हैं जो निम्न तालिका में प्रस्तुत किये गये हैं–

दो प्रयासों के प्रयोग में सभी सम्भाष्य परिणाम–

II	परिणाम (Outcomes)					
I	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2,1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3,1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4,1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5,1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6,1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

कम से कम 100 का जोड़ प्राप्त करने का अर्थ है–10 का जोड़ या 11 या 12 का जोड़ प्राप्त करना।

10 का जोड़ (6,4), (5,6), (4,6) प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{3}{36}$

10 का जोड़ (6,5), (5,6) प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{2}{36}$

12 का जोड़ (6,6) प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{36}$

अतः 10 या 11 या 12 अर्थात् कम से कम 10 प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ख). दो पासे फेकनें पर कुल परिणामों की संख्या = 36

2 का जोड़ (1,1) प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{36}$

8 का जोड़ (6,2), (5,3),(4,4), (3,5), (2,6) की प्रायिकता $= \frac{5}{36}$

12 का जोड़ (6,6) प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{36}$

अतः 2 या 8 या 12 प्राप्त करने की प्रायिकता =

$$= \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$$

योग प्रमेय की परिसीमाएँ : योग प्रमेय तभी लागू होगी जब निम्न शर्तें पूरी हों–

1. घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हो; और
2. वे एक ही समुच्चय (Set) से संबंधित हों।

योग प्रमेय का संशोधित रूप–जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हों :

जब दो घटनाएँ A व A में से या तो A या A दोनों (Either A or B or both) घट सकती है तो वे पूर्ण रूप से परस्पर अपवर्जी नहीं कहलाती ऐसी स्थिति में योग–प्रमेय संशोधित रूप में प्रयोग किया जायेगा। अतः दोनों घटनाओं के सर्वनिष्ठ अंश (Pentially orean-lapped set or entersection) को प्रायिकताओं के योग में से घटा दिया जायेगा।

सूत्र रूप में–

P(A या B या दोनों) = P (A)+P(B)-P(AB)

इस सूत्र में हम P(A और B) अर्थात् A व B के दोनों के साथ घटने की प्रायिकता को P(A)+P(B) में से घटाते है। इस तरह के संशोधन करने से घटनाएँ स्वतः ही पूर्ण रूप से पुनः परस्पर अपवर्जी हो जायेगी। समुच्चय सिद्धान्त के संकेत के रूप में–

सामान्यिकरण : यह संशोधित रूप तीन घटनाओं की स्थिति में भी प्रयोग की जा सकती है। यदि A, B तथा C घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हो तो P (A या B या दोनों) = P(A)+P(B)+P(C)-(P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)

उदाहरण (Illustration) :

यदि दो पासे एक साथ फंके जाते है तो यह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि अंकों का जोड़ न तो 7 हो न 11।

हल (Solution) :

7 के जोड़ को A द्वारा तथा 11 के जोड़ को B संकेत द्वारा निरूपित किया जायेगा। दो पासों के फेकने पर सम्भाष्य कुल परिणामों की संख्या 6 X 6 =36 होगी।

A घटना (7 का जोड़) के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2),(5,1), (पिछले के उदाहरण में तालिका का अवलोकन करें

B घटना (11 का जोड़) के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

(5,6), (6,5)

अतः 7 के जोड़ आने की प्रायिकता = $\frac{6}{36}$

11 के जोड़ आने की प्रायिकता $= \frac{2}{36}$

इस प्रकार प्रायिकता की जोड़ न हो और न 11 हो

$$= 1 \quad \{P(A) + P(B)\}$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{36} + \frac{2}{36}\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

उदाहरण (Illustration) :

(क). फेटे गये ताशों की एक गड्डी में से एक ईंट का पत्ता या एक बादशाह निकाले जाने की क्या प्रायिकता हैं?

(ख). अच्छी तरह फेटे गये 52 ताश के पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता यदृच्छया निकाला जाता है। बताइए क्या– क्या सम्भावना है कि वह एक चित्र वाला पत्ता होगा या एक हुकुम का पत्ता होगा?

हल (Solution) :

(क). 52 पत्तों की गड्डी मे से ईंट का पत्ता निकालने की प्रायिकता $= \frac{13}{52}$

एक बादशाह के निकालने की प्रायिकता $= \frac{4}{52}$

लेकिन बादशाहों में एक ईंट का बादशाह की शामिल है। इस प्रकार ईंट का बादशाह निकाले जाने की प्रायिकता (जो दोनों में शामिल है) $= \frac{1}{52}$

अतः ईंट का पत्ता था एक बादशाह निकालने की प्रायिकता

= P (K) = P(D) + P(K) –R (ईंट का बादशाह)

$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} + \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$ जहाँ– K= King, D= Diamond

उदाहरण (Illustration) :

छः फलकों वाले तीन पासे डालने पर 7 का योग आने की क्या प्रायिकता है?

हल (**Solution**) :

छः फलकों वाले तीन पासे फेकने पर कुल विशेष परस्पर अपवर्जी परिणामों की संख्या = $6 \text{ X } 6 \text{ X } 6$ = 216 होगी।

तीनों पासों की बिन्दुओं का जोड़ 7 आने की अनुकूल परिस्थितियाँ निम्न प्रकार ज्ञात की जायेगी–

परिणाम :

	पासों पर आने वाले बिन्दु		योग	क्रमचयों की संख्या	
	I	II	III		
क.	1	1	5	7	$\frac{3\,!}{2\,!} = 3$
ख.	1	2	4	7	$\frac{3\,!}{3\,!} = 6$
ग.	1	3	3	7	$\frac{3\,!}{2\,!} = 3$
घ.	2	2	3	7	$\frac{3\,!}{2\,!} = 3$

अनुकूल परिस्थितियों की संख्या = 15

अतः क, ख, ग, घ परिणामों में पासों पर आने वाले बिन्दुओंका जोड़ 7 आता है–

सात का जोड़ आने की प्रायिकता P (Total of Seven)

$$= \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{3}{216}$$

$$= \frac{3+6+3+3}{216} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

गुणन प्रमेय (Multiplication Threescore) :

गुणन प्रमेय का अध्ययन दो शीर्षक के अन्तर्गत किया जाता है–

(क). जब घटनाएँ स्वतंत्र हो–

यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ है, तो इन दोनों A और B घटनाओं के एक साथ घटने की प्रायिकता दोनों घटनाओं की अलग–अलग घटने की व्यक्तिगत प्रायिकता के गुणा के बराबर होती है।

सूत्र– $P(A \text{ या } B) = P(A) \text{ X } P(B)$

प्रमेय की उत्पत्ति (Proorf of the theorem) : मान लीजिए m_1 घटना के घटित होने की अनुकूल मामलों की कुल संख्या n_1 है।

$$\therefore P(C) = \frac{M_1}{n_1}$$

वही पर दूसरी तरफ m_2 घटना के घटित होने की कुल संख्या n_2 है।

$$\therefore P(B) = \frac{M_2}{n_2}$$

अब गणना के मौलिक सिद्धान्त द्वारा घटना AB के घटित होने की अनुकूल स्थितियों की संख्या n_1, n_2 मे से m_1 और m_2 है।

$$P(AB) = \frac{M_1 M_2}{n_1\, n_2} = \left(\frac{M_1}{n_1}\right) X \left(\frac{M_2}{n_2}\right)$$

$$= \quad P(A)\ X\ P(B)$$

$$\therefore P(AB) = P(A)\ X\ P(B)$$

अतः यह प्रमेय सिद्ध हुआ।

सामान्यिकरण : इस प्रमेय को तीन या अधिक स्वतंत्रत घटनाओं पर लागू किया जा सकता है। यदि A, B, तथा C तीन स्वतंत्र घटनाएँ हो, तब $P(ABC) = P(A)\ X\ P(B)\ X\ P(C)$

उदाहरण (Illustration) :

(क). एक सिक्के को तीन बार उछालने पर सभी (3) पट (tails) ऊपर आने की क्या प्रायिकता है?

(ख). एक पास दो बार फेंका जाता है। प्रथम फेक में बिन्दु '6' के आने की तथा दूसरी फेंक में एक विषय (odd) संख्या आने की क्या प्रायिकता है?

(ग). एक थैले में 5 लाल व 4 हरी गदें हैं। 3–3 गेंदों को दो बार निकाला गया। दूसरी बार निकालने से पहले उन्हें थैले में ही वापस रख दिया गया। यह प्रायिकता बताइए कि पहली बार तीनों गेदें लाल तथा दूसरी बार हरी निकलेंगी।

(घ). दो पासे तीन बार फेकें जाते हैं। क्या संभावना है कि पहली फेंक में 10 का जोड़, दूसरी में 11 का और तीसरी फेंक में 12 का जोड़ आयेगा?

हल (**Solution**) :

(क). सिक्के तीनों बार उछाला जाना स्वतंत्र घटनाएँ है

पहली बारे में 'पट' आने की संभावना $= \frac{1}{2}$

दूसरी बार में 'पट' आने की संभावना $= \frac{1}{2}$

तीसरी बार में 'पट' आने की संभावना $= \frac{1}{2}$

तीनों बार पट आने की संभावना $= \frac{1}{2} X \frac{1}{2} X \frac{1}{2} \quad = \frac{1}{8}$

(ख). पासें के पहली बार में फेकने का परिणाम और दूसरी बार फेंकसे से प्राप्त परिणाम स्वतंत्र घटनाएं है।

पहली बार में फेंकने से 6 आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

दूसरी बार में फकने से विषम संख्या (1,3,5) आने की प्रायिकता $= \frac{3}{6}$

पहली बार 6 और दूसरी बार विषम अंक प्राप्त होने की संयुक्त प्रायिकता =

$$= \frac{1}{6} X \frac{3}{6} X \frac{3}{36} \quad = \frac{1}{12}$$

(ग). तीन–तीन गेदें दो बार निकाली जाती है। पहली बार निकली गेदें फिर से थैले में रख दी जाती है, अतः दोनों बार गेंदो का निकलना स्वतंत्र घटनाएँ हैं। कुल 9 गेंदे (5 लाल और फिर 4 हरी) है।

9 गेंदों में से 3 गेदें निकालने के तरीकों की संख्या $= 9_{C_3}$

5 लाल गेंदों में से 3 लाल गेदें निकालने के रीतियों की संख्या $= 5_{C_3}$

4 हरी गेंदों में से 3 हरी गेदें निकालने के रीतियों की संख्या $= 4_{C_3}$ गेंदों को थैले में पुनस्थापित करने पर गेंदों की कुल संख्या पूर्ववत हो जाती हैं :–

अतः दूसरी बार तीनों हरी गेंदे निकलने की प्रायिकता $= \frac{4_{C_3}}{9_{C_3}}$

पहली बार लाल और दूसरी बार हरी गेदें निकालने की प्रायिकता =

$$= \frac{^5C_3}{^9C_3} X \frac{^4C_3}{^9C_3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} X \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{10}{84} X \frac{4}{84} =$$

$$= \frac{9!}{(9-3)!3!} X \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{5}{882}$$

(च). दो पासे एक साथ फेकने पर कुल परिणामों की संख्या (6 X 6) = 36 पहली बार 10 का जोड़ (46; 5, 5; 6,4) प्राप्त होने की कुल परिस्थितियाँ = 3

अतः पहली बार 10 आ जाने की प्रायिकता $= \frac{3}{36}$

दूसरी बार 11 (5,6; 6;5) प्राप्त होने की परिस्थितियां = 2

अतः दूसरी बार 11 आ जाने की प्रायिकता $= \frac{3}{36}$

तीसरी बार 12 (6;6) आने की कुल परिस्थितियां = 1

अतः तीसरी बार 12 आ जाने की प्रायिकता $= \frac{1}{36}$

अतः उक्त क्रम से स्वतंत्र घटनाओं के घटने की प्रायिकता =

$$= \quad \frac{3}{36} X \frac{2}{36} X \frac{1}{36} = \frac{1}{7776}$$

कभी–कभी हमें अनेक स्वतंत्र घटनाओं में से कम–से–कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करनी होती है। इसके लिए सभी घटनाओं के न घटने की संयुक्त प्रायिकता निकालकर कर उसे 1 में से घटना दिया जाता है।

सूत्रानुसार– यदि पहली, दूसरी, तीसरी............. घटना के घटने की प्रायिकता क्रमशः P_1, P_2, P_3,----- P_n हों तो उनके न घटने की व्यक्तिगत प्रायिकताएँ क्रमशः $(1-P_1)$; $(1-P_2)$; $(1-P_3)$;.............$(1-P_n)$; होंगी।

सभी घटनाओं में से किसी न घटने की मिश्रित प्रायिकता $(1-P_1)$; $(1-P_2)$; $(1-P_3)$;.....$(1-P_n)$;

अतः क्रम से कम एक घटना के होने की प्रायिकता इसकी अनुपूरक होगी–

1- $(1-P_1)$; $(1-P_2)$; $(1-P_3)$;.............$1-P_n)$;

उदाहरण (Illustration) :

सांख्यिकी का एक प्रश्न तीन विद्यार्थियों– A, B व C को दिया जाता है, जिनके द्वारा उसका हल करने की संभावना क्रमशः 1/2, 1/3 व 1/4 है। क्या सम्भावना है कि प्रश्न का हल हो जायेगा? प्रश्न के हल न होने की क्या प्रायिकता होगी?

हल (Solution) :

प्रश्न का हल हो जायेगा। यदि तीनों विद्यार्थियों में से कम से कम एक भी उसे सही हल कर दें–

A. द्वारा प्रश्न के हल न करने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

B. ,, ,, ,, न ,, ,, $= 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

C. ,, ,, ,, न ,, ,, $= 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

तीनों के द्वारा प्रश्न हल न होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2} X \frac{2}{3} X \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

अतः कम से कम एक के द्वारा प्रश्न के हल किये जाने की प्रायिकता =

$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

स्पष्ट है कि प्रश्न हल न होने की प्रायिकता $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ होगी।

उदाहरण (Illustration) :

(क). दो पासे एक बार फेंके जाते हैं। कम से कम एक '6' प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

(ख). ताश की दो गाड्डियों में से प्रत्येक से एक–एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। कम से कम एक के पान की बेगम होने की क्या प्रायिकता है?

हल (Solution) :

(क). '6' बिन्दु वाले पक्ष की आने की प्रायिकता = 1/6

पहले पासे पर '6' न आने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

दूसरे पासे पर '6' न आने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

पहले और दूसरे दोनों पर '6' के न आने की प्रायिकता $= \frac{5}{6} X \frac{5}{6} X = \frac{25}{36}$

कम से कम एक पासे पर '6' आने की प्रायिकता = $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

(ख). पहली गड्डी में 'पान की बेगम' न निकालने की प्रायिकता = $\frac{51}{52}$

दूसरी गड्डी में 'पान की बेगम' न निकालने की प्रायिकता = $\frac{51}{52}$

दोनों गड्डियों में 'पान की बेगम' न निकालने की प्रायिकता = $\frac{51}{52} X \frac{51}{52} = \frac{2601}{2704}$

अतः कम से कम एक गड्डी में पान की बेगम निकालने की प्रायिकता

= $1 - \frac{2601}{2704} = \frac{103}{2704}$

सप्रतिबन्ध या शर्तयुक्त (Conditional) प्रायिकता :

जब घटनाएँ स्वतंत्र न हों अर्थात् आश्रित घटनाएँ हो, तो एसी दशा में उपरोक्त वर्णित गुणन प्रमेय का प्रयोग तो ऐसी दशा में उपरोक्त वर्णीत गुणेन प्रमेय का प्रयोग नही किया जा सकता। आश्रित घटनाओं में एक घटना के घटने का प्रभाव दूसरी पर पड़ता है। A घटना के घट जाने पर घटना B के घटने की प्रायिकता को शर्तयुक्त या सप्रतिबन्ध प्रायिकता कहते हैं। इसे P(P/B) द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार B घटना के द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार B घटना के घट जाने पर A घटना की शर्तयुक्त प्रायिकता को द्वारा P (A/B) व्यक्त किया जाता है।

$$P\,(A/B) = \frac{P\,(A/B)}{P(A)} \qquad (\text{Provided } P(A)>0)$$

यदि A और B आश्रित घटनाएँ हैं, तो 'B' के घटने की शर्तयुक्त प्रायिकता निम्न प्रकार निकाली जाती है–

$$P\,(A/B) = \frac{P\,(AB)}{P(B)} \qquad (\text{Provided } P(B)>0)$$

शर्तयुक्त प्राकियता के संदर्भ में गुणन प्रमेय अथवा गुणन प्रमेय जब घटनाएँ आश्रित हों :

जब दो घटनाएँ स्वतंत्र न हों अर्थात् आश्रित (Dependent) हो, तो उपरोक्त वर्णित गुणन प्रमेय संशोधन करना अनिवार्य हो जाता है। संशोधित गुणन प्रेमय के अनुसार ''यदि A और B दो आश्रित घटनाएँ हो तो उनके एक साथ घटने की प्रायिकता पहली घटना के घटने की प्रायिकता और दूसरी घटना की शर्तयुक्त प्रायिकता का गुणनफल है।''

$$P\,(A/B) = P\,(A)\ X\ P\,(B/A)$$

या $$P(AB) = P\,(B)\ X\ P(A/B)$$

जहाँ P(B/A) की शर्तयुक्त प्रायिकता है अर्थात् B की उस स्थिति की प्रायिकता है जिनमें पहले टी घटित हो चूँकी है और P (B/A) की शर्तयुक्त प्रायिकता है जिनमें B घटना पहले की घट चुकी है।

उदाहरण **(Illustration)** :

एक थैले में 6 सफेद और 9 काली गेदें है। 4–4 गेंदे दो बार में इस प्रकारि निकाली जाती है कि– (क) दूसरे ड्रा से पहले गेंदे पुनः थैले में वापस रख दी जाएँ; (ख) दूसरे ड्रा से पहले गेदें पुनर्स्थापित न की जाएँ। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहले ड्रॉ में 4 सफेद और ड्रा में 4 काली गेदें निकालेगी।

हल **(Solution)** :

(क). जब पहली बारे निकाली गेदें वापस थैले में रख दी जाये–

15 गेंदों में से 4 गेदें निकालने के तरीकों की संख्या = 15_{C_4}

6 सफेद गेदों में से 4 निकाले जाने के तरीकों की संख्या = 6_{C_4}

अतः पहली बार 4 सफेद गेदें निकाले जाने की प्रायिकता = $\frac{6_{C_4}}{15_{C_4}}$

दूसरी बार 4 काली गेदें निकाले जाने की प्रायिकता = $\frac{9_{C_4}}{15_{C_4}}$

अतएव पहली बार 4 सफेद और दूसरी बार 4 काली गेदें निकाले जाने की संयुक्त प्रायिकता = $\frac{6_{C_4}}{15_{C_4}} X \frac{9_{C_4}}{15_{C_4}} = \frac{15}{1365} X \frac{126}{1365} = \frac{1}{91} X \frac{6}{65} = \frac{6}{5915}$

(ख). जब पहली बारे निकाली गेदें थैले में वापस न रखी जाये– पहली बार 4 सफेद गेदें निकालने की प्रायिकता = $\frac{6_{C_4}}{15_{C_4}}$

$$= \frac{\frac{6!}{(6-4)!4!}}{\frac{15!}{(15-4)!4!}} = \frac{\frac{6X5X4!}{2\,!4!}}{\frac{15X14X13X12!X!1!!}{11!4!}} = \frac{15X14X13X12}{4X3X2X1} = \frac{15}{1365} = \frac{1}{21}$$

जब ये चार सफेद गेदें अलग रख दी जाये तो थैले ये केवल 6–4 = 2 सफेद और 9 काली = 11 गेदें बचती हैं, दूसरी बार 11 गेदों में से 4, 11_{C_4}तरीकों से और 9 काली गदों में से 4 काली गेंदे 9_{C_4}तरीकों से निकल सकती है।

अतः दूसरी बार 4 काली गदें निकलने की शर्तयुक्त प्रायिकता = $\frac{9_{C_4}}{11_{C_4}} = \frac{126}{330} = \frac{21}{51}$

पहली बार 4 सफेद और उन्हें थैले में वापस न डालकर दूसरी बार 4 काली गेदें निकाले जाने की संयुक्त प्रायिकता $= \frac{1}{91} X \frac{21}{55} = \frac{3}{715}$

उदाहरण (**Illustration**) :

(क). एक थैले में 6 लाल और 4 हरी गेदें हैं। आँखों पर पट्टी बांधकर एक–एक करके दो गेदें बिना पुनर्स्थापन के निकाली जाती है। क्या संभावना है कि दोनों गेदें लाल रंग की होगी?

(ख). एक ताश की गड्डी में से 4 पत्ते यादृच्छया (Randonly) निकाले जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वे एक बादशाह, एक बेगम, एक गुलाम और एक इक्का होगें।

हल (**Solution**) :

(क). पहली ड्रा में लाल गेदें निकलने की प्रायिकता $P(A) = \frac{6}{6+4} = \frac{6}{76}$

अब थैले में 10–1 = 9 गेदें रह गई है, 5 लाल और 4 हरी। दूसरी बार भी लाल गेदें निकलने की संभावना जबकि पहली बार लाल गेंद निकल चुकी है–

$P(B/A) = \frac{5}{5+4} = \frac{5}{9}$ दोनों गेदें लाल निकलने की मिश्र–प्रायिकता–

$P(AB) = P(A)X\ P(B/A) = \frac{6}{10} X \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

(ख). 4 पत्ते एक बार में निकाले जाने की तरीकों की कुल संख्या $= 52_{C_4}$ है।

एक बादशाह, एक बेगम, एक गुलाम और एक इक्का में से प्रत्येक के निकाले जाने के तरीकों की संख्या 4 है।

अतः कुल अनुकूल परिस्थितियों की संख्या

$= \quad 4_{C_1} X\, 4_{C_1} X\, 4_{C_1} X\, 4_{C_1}$ होगी।

अभिष्ट प्रायिकता $= \frac{4_{C_1} X\, 4_{C_1} X\, 4_{C_1} X\, 4_{C_1}}{52_{C_4}} = \frac{4X4X4X4}{52!}$

$= \quad \frac{256}{\frac{52X51X50X49X4\ !}{48!4x\ 3\ x\ 2\ x1}} = \frac{256}{\frac{52\ x\ 51\ x\ 50\ x49}{4\ x\ 3\ x\ 2\ x1}} = \frac{256}{270725}$

16.6 बोध प्रश्न :

रिक्त स्थान की पूर्ति करें –

1. अनिश्चित घटनाओं के प्रति हम अपना अनुमान.................... के रूप में व्यक्त करते हैं।

2. ....तथा..............................प्रायिकता की चरम सीमाएं हैं।

3. क्रम गुणित को.........................चिन्ह से प्रदर्शित किया जाता है।

4. जहाँ क्रम को ध्यान में रखकर निश्चित वस्तुओं के वर्गों का चयनों को किया जाता है वह.......................... होता है।

5. क्रमचय और संचय को क्रमशः.........................तथा................से प्रदर्शित करते हैं।

सत्य एवं असत्य कथन को छाँटिए –

1. निश्चित वस्तुओं का एक निर्धारित क्रम विन्यास क्रमचय कहलाता है।
2. एक घटना जिसका घटित होना असंभव है, की प्रायिकता 1 होगी।
3. जब दो या अधिक घटनाओं का प्रभाव एक–दूसरे पर नहीं पड़ता तब उन्हें स्वतंत्र घटनाएं कहा जाता है।
4. जब एक परीक्षण में दो घटनाएं एक साथ नहीं घट सकती उन्हें परस्पर अपवर्जी घटनाएं कहते हैं।
5. जब एक घटना दुसरी घटना के साथ घटती है तो उसे अतिव्यापी घटनाएं कहते हैं।

16.7 बोध प्रश्नो के उत्तर :

रिक्त स्थान वाले प्रश्नों के उत्तर –

1. प्रायिकता; 2. 0 एवं 1; 3 ! 4. संचय; 5. P तथा C।

सत्य एवं असत्य कथन वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. सत्य; 2. असत्य; 3. सत्य, 4. सत्य 5. सत्य।

16.8 स्व परख प्रश्न :

1. प्रायिकता से आप क्या समझते है?

2. गणना क्रिया का वर्णन की किजिए।

3. मान बताइए– 17 $P_S{}'$ 18 P_2 18 P_8

4. 6 इनाम 5 लड़कों में कितने तरीकों से बाँटे जा सकते है, जबकि किसी भी लड़के को इनाम दिये जा सकते हैं।

इस खण्ड के लिये कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. बघेल डी0एस0 (2012–13), आगरा शोध पद्धतियाँ : एस0 बी0 पी0डी0 पब्लिशिंग हाउस, आगरा।

2. नागर कैलाश नाथ एवं मित्तल एस0ए0 (2012–13), सांख्यिकी के मूल तत्व, मेरठ : मीनाक्षी प्रकाशन मेरठ।

3. शर्मा श्याम गोपाल, जैन रवि के एवं पारिक गोविन्द (2011), नई दिल्ली शोध प्रणाली तथा सांख्यिकीय तकनीकें : आर0बी0डी0 पब्लिकेशन्स, (यूनिट ऑफ रमेश बुक डिपो), जयपुर : नई दिल्ली।

4. सिन्हा एवं गुप्ता (2013), व्यावसायिक सांख्यिकी : एस0बी0पी0, डी0 पब्लिकेशन्स आगरा।

/ / / /

उ० प्र० राजर्षि टण्डन
मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

M.Com.-201
(शोध प्रविधि)
Reserarch Methodology

खण्ड – **5**
इकाई अध्ययन एवं प्रतिवेदन लेखन
(Case Study & Report Writing)

खण्ड – **5 इकाई अध्ययन एवं प्रतिवेदन लेखन**

खण्ड 5 में शोधार्थी द्वारा सम्पूर्ण शोध को प्रस्तुत करने एवं इकाई अध्ययन तथा प्रतिवेदन करने के लिए कार्य करता है, जिसका वर्णन इस इकाई में किया गया है।

इकाई – 17 में छोटे–छोटे समस्याओं का अध्ययन करने के लिए विधियों एवं यूक्तियों का वर्णन है।

इकाई – 18 में आँकड़ों के सैद्धान्तिक वितरण का वर्णन है।

इकाई – 19 में अनुभवजन्य समस्याओं तथा ग्रन्थ सूची के विभिन्न पहलुओं का वर्णन है।

इकाई – 20 में प्रस्तुतीकरण के लिए प्रतिवेदन के बारे में विस्तृत वर्णन है।

इकाई – 17 इकाई अध्ययन विधि (Case study Method)

इकाई की रूपरेखा

17.0 उद्देश्य :

इस इकाई का उद्देश्य निम्न है–

- ऋणात्मक घटनाओं का गहन अध्ययन करने में प्रवीण होना।
- छोटे क्षेत्र के माध्यम से विशाल ज्ञान प्राप्त करना।
- किसी इकाई की सम्पूर्णता से अध्ययन करने मे सक्षम बनना।
- जटिल जीवन के ऐतिहासिक अध्ययन में निपुण होना।

17.1 प्रस्तावना :

इकाई अध्ययन विधि अनुसंधान की अनेक पद्धतियों में से एक ऐसी पद्धति है जिसमें समग्र की एक इकाई का सम्पूर्ण अध्ययन किया जाता है। इस इकाई में अनुसंधान की इस पद्धति का आशय स्पष्ट करते हुए प्रक्रिया तथा महत्व को रेखांकित किया गया है। यह विधि शोध की एक अलग दृष्टि प्रस्तुत करती है तथा सत्य समाधान की राह प्रशस्त करती है। अन्य विधियों की भाँति इस विधि की भी अपनी सीमाएँ है जिनका वर्णन किया गया है, जिससे कि इसके माध्यम से किये गये शोध को और प्रभावी बनाया जा सकें।

17.2 इकाई अध्ययन विधि की अवधारणा :

सामाजिक घटनाओं और सामाजिक समस्याओं का अध्ययन करने के लिए दो प्रकार की विधियों का उपयोग किया जाता है प्रथम–गणनात्मक और दूसरा गुणात्मक। गुणनात्मक अध्ययन को सांख्यिकी अध्ययन कहा जाता है जिसके अन्तर्गत तथ्यों का प्रदर्शन संख्या के आधार पर किया जाता है। यहीं पर जिन घटनाओं की प्रकृति गुणात्मक होती है उनके लिए गुणात्मक पद्धति का उपयोग किया जाता है। सामाजिक घटनाओं की जटिल प्रकृति के कारण इनको गुणात्मक पद्धति जिसमें किसी व्यक्ति या संस्था का अध्ययन ऐतिहासिक क्रम के अनुसार किया जाता है इकाईया व्यक्तिगत अध्ययन पद्धति (Cast Study Method) के नाम से जाना जाता है।

कुछ समाज में व्याप्त घटनाएँ इस प्रकार की होती है कि उनका सामान्य अध्ययन कर वास्तविकता का पता लगाना संभव नहीं होता इसलिए उनका गहन अध्ययन करना पड़ता है। इसके लिए ही इकाई अध्ययन पद्धति का उपयोग किया जाता है। इस पद्धति का सर्वप्रथम प्रयोग लीप्ले (Leplay) ओर हर्बर्ट स्पेंसर (Herbert Spencer) ने किया था। अत्यन्त ही कम शब्दों में इसे एक इकाई के पूर्ण अध्ययन के रूप में जाना जाता है।

इकाई (व्यक्तिगत) अध्ययन पद्धति, किसी व्यक्ति, संस्था या समुदाय के गहन अध्ययन से संबंधित है। इस पद्धति में किसी एक इकाई को लेकर उसका गहराई से अध्ययन किया जाता है।

पी0वी0 यंग (P.V. Young) के अनुसार ''व्यक्तिगत अध्ययन पद्धति किसी सामाजिक इकाई के जीवन की खोज और उसके विश्लेषण की पद्धति है, चाहे वह एक व्यक्ति, परिवार, संस्था, सांस्कृतिक वर्ग या सम्पूर्ण समुदाय हो।

मार्शल (Alfred Marshall) के अनुसार ''यह सावधानीपूर्वक कुछ चुने परिवारों के घरेलू जीवन के समस्त पहलुओं का गहन अध्ययन है।''

गुडे तथा हॉट के अनुसार ''यह सामाजिक तथ्यों के व्यवस्थापन का एक तरीक है, ताकि अध्ययन की सामाजिक विषय–वस्तु के वैयाक्तिक गुण सुरक्षित रह सकें।''

उपरोक्त परिभाषाओं के आधार पर निष्कर्षित ''इकाई अध्ययन पद्धति सामाजिक अनुसंधान की गुणात्मक पद्धति है'' जिसमें किसी व्यक्ति या समुदाय का सूक्ष्म गहन और विस्तृत अध्ययन किया जाता है।

17.2.1 इकाई अध्ययन पद्धति की विशेषताएँ :

इकाई अध्ययन पद्धति की निम्नलिखित विशेषताएँ है–

(क). **व्यक्तिगत/इकाई अध्ययन** : व्यक्तिगत या इकाई अध्ययन का तात्पर्य यह है कि अनुसंधानकर्त्ता एक ही इकाई को लेकर अनुसंधान करता है। इस इकाई का व्यक्तिगत स्तर में अलग से अध्ययन किया जाता है। यह इकाई व्यक्ति, संस्था, जाति अथवा कोई भी समुदाय हो सकता है।

(ख). **गहन (सूक्ष्म) अध्ययन** : यह पद्धति समस्या से संबंधित इकाई का अति गहन अध्ययन करती है इस गहन अध्ययन की कोई भी निश्चित सीमा नहीं है, यह एक लम्बे अवधि तक चल सकता है। इस प्रकार के अध्ययन में इकाई के भूतकाल से लेकर वर्तमान काल तक का अध्ययन किया जाता है। इकाई से सम्बन्धित अत्यन्त गहनतम सूचनाओं का संग्रह किया जाता है।

(ग). **सम्पूर्ण (समग्र) अध्ययन** : इस पद्धति की सहायता से किसी भी इकाई का उसकी सम्पूर्ण से अध्ययन किया जाता है। व्यक्ति अध्ययन पद्धति में किसी इकाई के समस्त पहलुओं (सामाजिक, आर्थिक, भौगोलिक, धार्मिक, प्राणिशास्त्री, राजनीतिक आदि) का अध्ययन किया जाता है।

(घ). **गुणात्मक अध्ययन** : इस विधि में तथ्यों (सामाजिक समस्याओं) की विवेचना संख्यात्मक आधार पर नहीं किया जाता है, बल्कि गुणात्मक अध्ययन किया जाता है। इस पद्धति के निष्कर्षों को कहानी के रूप में या जीवन–इतिहास के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।

(ड़). **कारकों का अध्ययन** : इस पद्धति के द्वारा इकाई के उन कारकों का पता लगाया जाता है, जो इसके (इकाई के) स्वरूप का निर्धारण करते है, अर्थात् इसके अन्तर्गत इकाई के व्यवहार को प्रभावित करने वाले कारकों का पता लगाया जाता है।

(च). **सीमित क्षेत्र** : इकाई अध्ययन पद्धति में एक विशिष्ट इकाई का अध्ययन किया जाता है। इकाई के इस अध्ययन की प्रकृति गहन होती है, परिणामस्वरूप अध्ययन का क्षेत्र सीमित होता है।

17.3 इकाई अध्ययन विधि की प्रक्रिया :

इकाई अध्ययन पद्धति में व्यक्ति, इकाई या संस्था की सम्पूर्णता के साथ अध्ययन किया जाता है, जिस पर इस विधि का अस्तित्व टिका हुआ है। सम्पूर्णता का अर्थ है– विभिन्न दृष्टिकोणों से घटना का अध्ययन। इस अध्ययन के लिए निम्नलिखित चरण (प्रक्रिया) प्रयोग मे लाये जाते हैं :–

1. **समस्या की पहचान** : इकाई अध्ययन विधि में सबसे पहले समस्या को स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना आवश्यक होता है, साथ ही उसके विभिन्न पहलुओं की स्पष्ट व्याख्या कर लिया जाता है। समस्या के पहचान (विवेचन) के लिए निम्न तत्वों को ध्यान में रखकर किया जाना चाहिए–

   (अ). **विषय का चुनाव** : किसी समस्या पर प्रकाश डालने के लिए ऐसे विषय का चुनाव करना चाहिए जो समस्या का सही प्रतिनिधित्व कर सकें और उस पर जो विषय चुना जाता है वह या तो विशेष, साधारण और असाधारण हो सकता है।

(ब). **इकाईयों का प्रकार** : विषय के चुनाव करने के बाद इकाईयों के प्रकारों व्याख्या करनी चाहिए। जिन इकाइयों से व्यक्ति या संस्थाओं का अध्ययन किया जा रहा है, उनके कितने प्रकार हैं?

(स). **इकाईयों की संख्या** : इकाईयों के प्रकारों को निश्चित करन लेने के बाद इकनी संख्या निश्चित करनी चाहिए। ये संख्या इतनी होनी चाहिए कि जिससे समस्या पर प्रभाव पड़े।

(द). **विश्लेषण** : इकाईयों की संख्या निश्चित कर लेने के उपरान्त समस्या के विभिन्न पहलुओं का विश्लेषण किया जाता है, जिसमें अध्ययन के क्षेत्र का निर्धारण किया जाता है।

2. **घटनाओं के क्रम का विश्लेषण** : विषय का अर्थात् समस्या का चुनाव करने के बाद समस्या से संबंधित घटनाओं का अध्ययन किया है। इसके बाद घटनाओं में जो उच्चावचन होते है, उनके क्रम का विश्लेषण किया जाता है।

3. **कारकों का विश्लेषण** : इस चरण में उन कारकों का पता लगाया जाता है, जो वर्तमान समस्या या घटना के लिए उत्तरदायी होते है ये दो प्रकार के हो सकते है–

(अ). **मौलिक कारक** : जो घटना या व्यवहार को संचालित करने में मुख्य भूमिका अदा करते है।

(आ). **सहायक कारक** : वे कारक गौड़ होते हैं, किन्तु मौलिक कारकों को शक्ति प्रदान करते हैं, और घटना में घटित होने में सहायक होते हैं।

4. **विश्लेषण और निष्कर्ष** : अन्त में समस्या के सम्बन्ध में जो तथ्य प्राप्त होते हैं, उनके कारकों का विश्लेषण किया जाता है। साथ ही इस घटना के परिणामों की ओर संकेत किया जाता है। विवेचना इस प्रकार की जाती है कि इकाई में सम्पूर्णता के दर्शन है। साथ ही इकाई के स्वरूप को भी स्पष्ट करें।

17.4 इकाई अध्ययन विधि के महत्व एवं सीमाएँ :

17.4.1 महत्व :

इकाई अध्ययन पद्धति सामाजिक शोध में तथ्य संकलन की एक महत्वपूर्ण विधि है। इसका प्रयोग विविध सामाजिक विज्ञानों में कई दशकों से होता आ रहा है। इस विधि के महत्व को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया गया है।

(क). **गहन एवं सूक्ष्म अध्ययन** : इस पद्धति की मौलिक विशेषता यह है कि इसके अन्तर्गत किसी समस्या का गहन एवं सूक्ष्म अध्ययन किया जाता है क्योंकि इसमें प्रतिदिन इकाइयों का चुनाव लम्बें समय तक किया जाता है।

(ख). **परिकल्पनाओं का स्रोत** : इकाई अध्ययन पद्धति में प्रतिनिधि इकाइयों का अध्ययन किया जाता है। तत्पश्चात सामान्यीकरण किया जाता है, अर्थात् निष्कर्ष निकाले जाते हैं। इन्ही निष्कर्षों के आधार पर परिकल्पनाओं का जन्म होता है।

(ग). **विशिष्ट पहलुओं का अध्ययन** : जैसाकि उपर बताया गया है कि इस विधि मे प्रतिनिधि इकाइयों का अध्ययन किया जाता है। इकाइयों के अनेक पहलू होते हैं, जैसे– पारिवारिक, आर्थिक, राजनीतिक आदि। इस पद्धति में इन्ही विशिष्ट पहलुओं का अध्ययन किया जाता है।

(घ). **अध्ययन की समस्त विधियों का प्रयोग** : उपरोक्त महत्व के क्रम में आपने देखा कि विशिष्ट पहलुओं का अध्ययन किया जाता है तथा इन्ही विशिष्ट पहलुओं के अध्ययन के लिए विविध प्रकार की विधियों को अपनाया जाता है। परिणामस्वरूप मनुष्य के ज्ञान और अनुभव के क्षेत्र में वृद्धि होती है।

(ड़). **सांख्यिकी अध्ययन** : इकाई अध्ययन पद्धति सांख्यिकी अध्ययन की रूपरेखा प्रस्तुत करती है। इस पद्धति में पहले व्यक्तिगत आधार पर अध्ययन किया जाता है और इसके माध्यम से भविष्य में सांख्यिकीय अध्ययन की रूपेरखा प्रस्तुत की जाती है।

(च). **सामग्री की सम्पूर्णता** : किसी अध्ययन की पूर्णता उसके सामग्री में नीहित होती है। इकाई अध्ययन विधि में सामग्री संकलित की जाती है, जो पूर्ण होती है।

(छ). **व्यक्ति के बारे में ज्ञान** : व्यक्ति का जीवन अत्यन्त जटिल है। इसे आसानी से नहीं समझा जा सकता। व्यक्ति के जीवन घटनाओं और मूल्यों में व्यापक असमानता पायी जाती है। इस प्रकार व्यक्ति के बारे में जानकारी प्राप्त करने के लिए व्यक्तिगत अध्ययन पद्धति महत्वपूर्ण है।

(ज). **ऐतिहासिक ज्ञान** : इकाई अध्ययन पद्धति ऐतिहासिक स्थितियों की तस्वीर को स्पष्ट करती है, जिससे हमें भूतकालीन जीवन की जानकारी प्राप्त होती है।

(झ). **सामान्यीकरण का आधार** : इकाई अध्ययन पद्धति के द्वारा विभिन्न प्रकार की परिस्थितियों और व्यक्ति के व्यवहारों का अध्ययन किया जाता है। जिससे सामान्यीकरण के लिए आधार प्रस्तुत करने में सहायता मिलती है।

17.4.2 सीमायें : जहाँ गुण वहाँ दोष जरूर होता है। इसके प्रमुख दोषों एवं सीमाओं को निम्न रूप में विभाजित किया गया है–

(क). **जीवन के इतिहास का दोषपूर्ण होना** : इस विधि में सूचनाओं के आधार पर जो जीवन–इतिहास, तैयार किये जाते हैं, व निम्न कारणों से दोषपूर्ण एवं अवैज्ञानिक होते हैं–

- जीवनी को बढ़ा–चढ़ाकर अलंकारिक और साहित्यिक भाषा लिखने के कारण उनमें यथार्थता का अभाव पाया जाता है।
- सूचनादाता अपने जीवन के समस्त पहलुओं पर प्रकाश नहीं डालता।
- शोधकर्त्ता के निजी अनुभव और पक्षपातपूर्ण व्यवहार से भी यथार्थता समाप्त हो जाती है।
- सूचनादाता लोक–मर्यादा, भय और शंका के कारण अनेक तथ्यों को प्रकट नहीं करता है।
- इसमें सूचनादाता अपने–अपने कहानी कहता है, इसलिए अध्ययन अवैज्ञानिक हो जाता है।

(ख). **अधिक धन एवं समय** : इकाई अध्ययन पद्धति में इकाई का सूक्ष्म और गहराई से अध्ययन किया जाता है। इसलिए यह खर्चिला और समय लेने वाला होता है।

(ग). **दोषपूर्ण तथ्य** : इस विधि में सभी प्रकार की सामग्री को अध्ययन क्षेत्र में सम्मिलित किय जाता है।

(घ). **भ्रामक तथ्य** : विभिन्न प्रकार के सामग्री के उपयोग से भ्रामक तथ्यों का भरमार हो जाता है। जो अध्ययन की दिशा को गलत कर देता है।

(ड़). **सीमित अध्ययन** : इस विधि के अन्तर्गत सूक्ष्म और गहन अध्ययन किया जाता है, किन्तु इस प्रकार का अध्ययन कुछ प्रतिनिधि इकाईयों का ही होता है। अतः इस विधि के द्वारा सिर्फ सीमित क्षेत्र में ही अध्ययन सम्भव हो सकता है।

(च). **पक्षपात** : इस इकाई अध्ययन विधि में शोधकर्ता उन्ही समस्याओं और घटनाओं का अध्ययन करता है, जिनका सम्बन्ध उसके व्यक्तिगत जीवन से होता है। अतः इसके संबंध में उसकी पूर्वाग्रहता के कारण पक्षपात की संभावना बनी रहती है।

(छ). **निदर्शन का अभाव** : इस विधि में कुछ इकाईयों का ही अध्ययन किया जाता हो इकाईयों का चुनाव मनमाने ठंडा से होने के कारण निदर्शन का अभाव स्पष्ट रूप से पाया जाता है।

(ज). **वैज्ञानिकता का अभाव** : इस पद्धति में असंगठित एवं वैज्ञानिकता का अभाव मिलता है। कारण यह है कि शोधकर्त्ता पर किसी प्रकार का नियंत्रण नहीं होता है। वह मनताने ढ़ंग से इकाईयों का चुनाव करता है तथा सूचनाएं संकलित करता है।

17.5 बोध स्व परख प्रश्न :

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें–

1. अध्ययन विधि.......................... की राह प्रशस्त करती है।
2. इकाई अध्ययन विधि का सर्वप्रथम प्रयोग..................और....................ने किया था।
3. इकाई अध्ययन विधि में सबसे पहले..............को स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाता है।
4. प्रतिनिधि इकाइयों का अध्ययन के पश्चात्.......................... किया जाता है।

सत्य एवं असत्य कथन छाँटिए :–

1. इकाई अध्ययन पद्धति में इकाई का सूक्ष्म एवं गहराई से अध्ययन नही किया जाता है।
2. इकाई अध्ययन पद्धति मे कुछ प्रतिनिधि इकाइयों का अध्ययन किया जाता है।
3. इकाई अध्ययन पद्धति किसी सामाजिक इकाई के जीवन की खोज और उसके विश्लेषण की पद्धति है।
4. यह कम खर्चिला पद्धति है।
   व्यक्ति का जीवन अत्यन्त जटिल होता है।

17.6 बोध प्रश्नों के उत्तर :

रिक्त स्थानों वाले प्रश्नों के उत्तर –

1. सत्य समाधान, 2. लीप्ले और हबर्ट स्पेन्सर, 3. समस्या, 4. समान्यीकरण

सत्य एवं असत्य कथन के उत्तर –

1. असत्य, 2. सत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य।

17.7 बोध प्रश्न :

1. इकाई अध्ययन पद्धति के अवधारणा को स्पष्ट कीजिए।
2. सामाजिक अनुसंधानों में इकाई अध्ययन पद्धति के महत्व का उल्लेख कीजिए।
3. किसी समस्या के समाधान के लिए इकाई अध्ययन पद्धति की प्रक्रियाओं को विस्तार से समझाइए।
4. इकाई अध्ययन पद्धति की विशेषताओं का उल्लेख कीजिए।
5. वैयक्तिक अध्ययन पद्धति के गुण एवं सीमाओं का विवेचन कीजिए।

/ / / /

इकाई – 18 सैद्धान्तिक वितरण (Theoritical Distribution)

इकाई की रूपरेखा

18.0 उद्देश्य :

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप निम्न को जान सकेगें–

- आपको पता चल सकेगा कि निश्चित मान्यताओं के अन्तर्गत समंकों की क्या प्रवृत्ति होगी?
- प्रत्याशित समंकों की सहायता से भावी पूर्वानुमान को लगाना सीख जायेगें।
- आपको ज्ञान हो जायेगा कि सैद्धान्तिक बंटन अवलोकित बंटनों के स्थानापन्न होते हैं, विशेषकर उस परिस्थितियों में जब वास्तविक अनुसंधानों में व्यय अत्यधिक हो।
- आपके निर्णय को एक तर्कपूर्ण आधार प्राप्त हो जायेगा।

18.1 प्रस्तावना :

अब तक आपके द्वारा ऐसे आवृत्ति बंटन का अध्ययन किया गया है जिसकी रचना सांख्यिकी अनुसंधानों से उपलब्ध वास्तविक या अवलोकित समंकों (Actual or obserbed) के संकलन, वर्गीकरण तथा सारणीयन के आधार पर की जाती है, जिसे हम अवलोकित आवृत्ति बंटन कहते हैं। अवलोकित आवृत्ति बंटन के उपयोग की भी सीमा है। जहाँ किसी सुनिश्चित पूर्वकल्पना या मान्यता को लेकर गणितीय आधार पर आवृत्ति बंटन को अनुमानित किया

जाता है वहाँ सैद्धान्तिक आवृत्ति, बंटन की आवश्यकता पड़ती है। प्रस्तुत इकाई में इसी सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन के बारे में तथा प्रमुख सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटनों का विस्तृत व्याख्या किया गया है।

18.2 सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन का अर्थ :

सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन का आशय स्पष्ट करने से पूर्व यहाँ अवलोकित आवृत्ति बंटन और प्रायिकता बंटन (सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन) का तुलना करना आवश्यक है। जब एक आवृत्ति बंटन की आवृत्तियाँ वास्तविक अवलोकनों पर आधारित हो तो उसे अवलोकित आवृत्ति बंटन कहते है। उदाहरण के लिए किसी कक्षा के 60 विद्यार्थियों की ऊँचाई का माप करके और परीक्षा में उनके प्राप्तांक ज्ञात करके निम्न दो अ और ब अवलोकित आवृत्ति बंटन–बनाये जा सकते हैं–

अवलोकित आवृत्ति बंटन

(Observed frequency distibutiobn)

(अ).

ऊँचाई सेमी (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)
150—155	2
155—160	6
160—165	33
165—170	15
170—175	3
175—180	1
योग	60

(ब).

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)
1—20	5
21—40	10
41—60	36
61—80	6
81—100	3
योग	60

दूसरी तरफ जब आवृत्ति बंटन की आवृत्तियाँ किसी सुनिश्चित पूर्वकल्पना या मान्यता से आरंभ करके गणितीय आधार पर (प्रायिकता) किसी विचर के मूल्यों का अनुमान लगाया जाता हैं, उदाहरणार्थ (स) यदि 5 सुड़ौल सिक्के 64 बार उछाले जायें, चित्त (Head) आने को सफलता माना जाए तो निम्न प्रायिकताएँ और प्रत्याशित आवृत्तियाँ (द्विपद प्रायिकता के आधार पर) प्राप्त की जा सकती हैं–

(स).

सफलताओं की संख्या (चित)	प्रायिकता	प्रत्याशित आवृत्ति
0	1/16	4
1	4/16	16
2	6/16	24
3	4/16	16
4	1/16	4
योग	1	64

स्पष्टीकरण : उपरोक्त में (अ) और (ब) वास्तविक परिणामों पर आधारित बंटन है अतः अन्हें अवलोकित आवृत्ति बंटन कहते है। जबकि सैद्धान्तिक मान्यताओं तथा प्रायिकता पर आधारित बंटन उदाहरण (स) है जिन्हें सैद्धान्तिक बंटन या प्रायिकता बंटन कहा जाता है।

एक बात और स्पष्ट कर देना उचित होगा कि जिस प्रकार वास्तविक आवृत्ति बंटन खण्डित (Discrete) तथा सतत् (Continuous) होता है, उसी प्रकार प्रायिकता बंटन भी खण्डित तथा सतत् होता है। प्रायिकता बंटन को चर के दैव चर कहते है। जब किसी दैव चर के परिणाम निश्चित अन्तर पर ही प्राप्त हो सकते है तो ऐसा दैव चर खण्डित दैव चर कहलायेगा, जैसे किसी निश्चित समय में दूकान पर आने वालों की संख्या टेलीफोन काल की संख्या आदि 0, 1, 2, ... हो सकती है, न कि 1, 4 या 0.32 जबकि ऐसा दैव या जिसका मूल्य निश्चित सीमाओं के अन्दर कुछ भी हो सकता है, उसे सतत् दैव चर कहेगें जैसे, ऊँचाई क्षेत्रफल, माप तौल आदि से सम्बन्धित सतत् चर के उदाहरण है।

पाठ्यक्रम मे जो अध्ययन सामग्री प्रस्तुत किया गया है वो इस प्रकार वर्गीकृत करने पर प्राप्त होगा–

खण्डित प्रायिकता बंटन (सैद्धान्तिक)

1. द्विपद बंटन (Binomial Distribution)
2. प्वॉयसन बंटन (Poisson Distribution)

सतत् प्रायिकता बंटन (सैद्धान्तिक)

3. प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution)

18.3 द्विपंद बंटन (Binomial Distribution) :

द्विपद बंटन को विकसित करने का श्रेय स्विस गणितज्ञ जेम्स बर्नोली को है। जेम्स बर्नोली के नाम पर इसे बर्नोली बंटन भी कहा जाता है।

द्विपद बंटन में द्विपद का अर्थ है दो पद– एक, घटना की सफलता (Success) और दूसरे, घटना की विफलता (Failure) से सम्बन्धित है। अतः यह एक ऐसा खण्डित आवृत्ति बंटन है जो द्वन्द्वात्मक विकल्पों–सफलता तथा विफलता के एक समूह की प्रायिकता को प्रस्तुत करता है।

द्विपद बंटन की मान्यताएँ–

(क). यादृच्छिक अभिप्रयोग समान परिस्थितियों में आवर्तक रूप से परीक्षणों की स्थिर और परिमित संख्या के अनुरूप सम्पन्न किया जाता है। दूसरे शब्दों में, परीक्षणों की संख्या n स्थिर और परिमित (Fixed and finiete) होती है।

(ख). प्रत्येक परीक्षण में अभिप्रयोग के दो परस्पर अपवर्जी परिणाम होते हैं। सफलता को P द्वारा तथा आसफलता को q द्वारा व्यक्त किया जाता है तब $p+q = 1$ होगा।

(ग). सभी परीक्षण P और q के स्थिर मान होते हैं। उदाहरण के लिए एक सिक्के की सभी उछालों में चित आने की प्रायिकता 'P' तथा पट आने की प्रायिकता q वही रहेगी।

(घ). सभी परीक्षण आपस में स्वतंत्र होते है।

सिक्का उछालने और पासा फेंकने के अभिप्रयोगों में उपर्युक्त चारों मान्यताएँ पूरी होती है।

द्विपद बंटन का विस्तार :

द्विपद बंटन के विस्तार को समझने के लिए सबसे अच्छा अभिप्रयोग सिक्के का उछालना है। यदि एक सुड़ौल सिक्के को उछाला जाये तो या तो चित गिरेगा या पट गिरेगा चित = सफलता (P) तथा पट = विफलता q द्वारा संकेतन किया जाए तो प्रायिकता सिद्धांत के आधार पर यह कहा जा सकता है कि–

$$p = q = \frac{1}{2} \text{ और } \quad p + q = 1$$

अब यदि दो सिक्के अ और ब नामक एक साथ उछाले जाये तो संभावित परिणाम इस प्रकार होगें–

दो सिक्के वाला अभिप्रयोग

(Outcomes) परिणाम		तरीके				
H (चित)	पट (T)	अ	ब	प्रायिकता	सफलता	प्रायिकता माप (P)
2	0	H	H	$(pxq) = p^2$	2	$\frac{1}{4}$
1	1	H	T	$\left.\begin{matrix}(pxq)\\(qxp)\end{matrix}\right] = 2pq$	1	$\frac{1}{2}$
1	1	H	T			
0	2	T	T	$qxq = q^2$	0	$\frac{1}{4}$
योग				$(p+q)^2$		1

सभी परिणामों की प्रायिकता का प्रयोग $P^2 + 2\ pq + q2$ है जो कि $(p+q)^2$ का विस्तार है। अतः दो सिक्कों के उछाले जाने पर द्विपद बंटन $(p+q)^2$ का विस्तार होगा।

इसी प्रकार 3, 4, 5, 6........... n घटनाओं के लिए द्विपद बंटन उपर्युक्त आधार पर बनाये जा सकते है। जितनी घटनाएँ (सिक्के) हों उतनी घात (p+q) पर लगानी होती है और उसका विस्तार ज्ञात किया जा सकता है, जैसे–

एक घटना – $(p+q)^1 = p + q$

दो घटना – $(p+q)^2 = p^2 + 2\,p\,q + q^2$

तीन घटना – $(p+q)^3 = p^3 + 3\,p^2\,q + 3\,p\,q^2 + q^3$

चार घटना – $(p+q)^4 = p^4 + 4\,p^3\,q + 6\,p^2q^2 + 4\,pq^3 + q^4$

पाँच घटना – $(p+q)^5 = p^5 + 5\,p^4\,q + 10\,p^3q^2 + 10\,p^2\,q^3 + 5pq^4 + q^5$

उपर्युक्त स्वरूप से स्पष्ट हो जाता है कि द्विपद विस्तार का प्रत्येक पद बर्नोली–प्रमेय– $n_{c_r} p^r q^{\ n-r}$ द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। वास्तव में द्विपद बंटन प्राप्त करने के लिए विस्तार के सभी (n+1) पदों को बर्नोली–प्रमेय द्वारा निकाला जा सकता है।

उदाहरण (Illustration) :

7 सिक्के 256 बार उछाले गये। 5 चित (Heads) और 2 पट (Tails) आने की प्रायिकताएँ और प्रत्याशित आवृत्तियाँ निकालिए–

हल (Solution) :

N = 256, n = 7, p = q = 1/2

5 चित और 2 पट गिरने की प्रायिकता

$$n_{c_r} p^2 q^{\ n-r} = 7_{C_5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 21\ X \frac{1}{28} = \frac{21}{128}$$

∴ 5 चित गिरने की प्रत्याशित आवृत्ति $= N\,x \frac{21}{128}$

$$= \frac{256\ X\ 21}{128} = 42$$

उदाहरण (Illustration) :

एक किसान ने यह अनुभव किया कि जितने बीज वह एक क्यारी में बोता है उनमें से एक–चौथाई नष्ट हो जाते हैं। वह 5120 क्यारियाँ तैयार करता है और प्रत्येक मे 5 बीज बोता है। उन क्यारियों की संख्या बताइए जिनमें 5, 4, 3, 2, 1 व 0 बीज नष्ट हो जाते हैं।

हल (Solution) :

बीज नष्ट होने की प्रायिकता $P = \frac{1}{4}$

नष्ट न होने की प्रायिकता $= q$

$q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$N = 5120, n = 5, \qquad r = 5, 4, 3, 2, 1, 0$

$P_r = n_{C_r}\ p^2 q\ h\text{-}\ r \qquad N(p+q)^n = 5120\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^5$

व

π	5	4	3	2	1	0	योग
P_x	$5_{C_5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$	$5_{C_4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1$	$5_{C_3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$5_{C_2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1$	$5_{C_1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$5_{C_0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5$	
	$\frac{1 X 1}{1024}$	$\frac{5 X 3}{1024}$	$\frac{10 X 9}{1024}$	$\frac{10 X 27}{1024}$	$\frac{5 X 81}{1024}$	$\frac{1 X 243}{1024}$	
P_x	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{243}{1024}$	$= \frac{1024}{1024}$
N(Px)	$\frac{5120}{1024}$	$\frac{5120 X 15}{1024}$	$\frac{5120 X 90}{1024}$	$\frac{5120 X 270}{1024}$	$\frac{5120 X 405}{1024}$	$\frac{5120 X 243}{1024}$	=1
प्रत्याशित आवृत्ति fe	5	75	450	1350	2025	1215	5120

अतः क्यारियों की प्रत्याशित संख्या निम्न प्रकार हैं :–

नष्ट बीजों की संख्या	5	4	3	2	1	0	योग
क्यारियों की प्रत्याशित संख्या	5	75	450	1350	2025	1215	5120

द्विपद बंटन के अचर मूल्य (Constants) :

द्विपद बंटन के माध्य $(\overline{X}) = np$

द्विपद बंटन के प्रमाप विचलन $= \sigma = \sqrt{npq}$

द्विपद बंटन के विचरण $= \sigma^2 = npq$

द्विपद बंटन $Pr = n_{C_r} P^r q^{n-r}$

उदहारण (**Illustration**) :

ऐसा सम्पूर्ण द्विपद बंटन लिखिए जिनका समान्तर माध्य 3 है और प्रसरण 2 है।

हल (**Solution**) :

एक द्विपद बंटन के समान्तर माध्य $\overline{X} = 3$

प्रसरण $\sigma^2 = 2$

$\sigma = \sqrt{2} = 1.414$

$\overline{X} = np = 3, \sigma^2 = npq = 2, \frac{npq}{np} = q = \frac{2}{3}$

$\therefore p\ 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$npq = n\ X\ \frac{1}{3} X \frac{2}{3} = 2$

$\therefore \frac{2}{9} n = 2\ \therefore\ n=9$

$n = 9,\ P = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$ द्विपद बंटन $= (q + p)^n = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^9$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^9 = \left(\frac{2}{3}\right)^9 + 9\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + 36\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 84\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 126\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 126$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + 84\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + 36\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^7 + 9\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^8 + \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$= \frac{2}{19683}(512x1) + [(9X256) + (36\,X128) + (84X64) + (126X32) + (126X16) + 84X8) + (36X4) + (9X2) + 1]$$

सफलता की संख्या (X) :	प्रायिकता P(X)	सफलता की संख्या (X) :	प्रायिकता P(X)
0	$\frac{512}{19683}$	5	$\frac{2016}{19683}$
1	$\frac{2304}{19683}$	6	$\frac{672}{19683}$
2	$\frac{4608}{19683}$	7	$\frac{144}{19683}$
3	$\frac{5376}{19683}$	8	$\frac{18}{19683}$
4	$\frac{4032}{19683}$	9	$\frac{1}{19683}$

द्विपद बंटन की विशेषताएँ :

(क). द्विपट बंटन एक सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन है जो बर्नोली प्रमेय पर आधारित है। बर्नोली प्रमेय से परिगणित बंटन की कुल संख्या (N) से गुणा करके प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं।

(ख). यह एक खण्डित आवृत्ति बंटन है, जिसमें सफलताओं की संख्या 0, 1, 2, 3, ... n होती है और तत्संवादी प्रायिकताएँ और प्रत्याशित आवृत्तियाँ द्विपद विस्तार द्वारा परिलक्षित की जाती हैं।

(ग) द्विपदद बंटन को रेखाचित्र पर आवृत्ति बहुभुज (Frequency polygon) के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

(घ) द्विपद बंटन का स्वरूप P और q माप और घातांक के मूल्य पर आधारित है। यदि

$p = q$ तो बंटन पूर्ण सममित (Perfect symmetrical)

$p \neq q$ तो बंटन असममित (Asymmetrical)

$p < 0.5$ तो बंटन दाहिनी ओर असममित

$p > 0.5$ तो बंटन बाई ओर असममित

नोट : P और q के असमान होने पर यदि घातांक n का मूल्य अत्यधिक हो तो असममित की मात्रा कम होती जायेगी अर्थात् जैसे–जैसे n में वृद्धि होती जायेगी बंटन सममित की ओर अग्रसर होता जायेगा।

(ङ). n, p और q ज्ञात होने पर पूर्ण द्विपद बंटन लिखा जा सकता है यदि सफलता की संख्या आरोही क्रम में– 0, 1, 2, 3......... n लिखनी है तो द्विपद प्रायिकता बंटन का विस्तार होगा। इसके विपरीत सफलता की संख्या अवरोही क्रम n - - - 3, 2, 1, 0 में होने पर बंटन $(p+q)^n$ का विस्तार होगा।

द्विपद बंटन का उपयोग :

जिस क्षेत्र में घटनाओं की सफलता असफलता के आधार पर द्वन्द–भाजन किया जा सकता है वहाँ द्विपद का प्रयोग उपयुक्त होता है, जैसे सिक्का उछालने पट चित या पर का गिरना; कारखाने में निर्मित वस्तुओं के प्रतिदर्श में दोषपूर्ण और दोषरहित वस्तुओं को अलग–अलग करना आदि। व्यावहारिक जीवन में दैव पर आधारित इस प्रकार की द्वन्द्वात्मक घटनाओं पर यह सैद्धान्तिक बंटन लागू होता है। निर्णय लेने व भावी अनुमान लगाने में भी यह प्रबन्धकों के लिए एक अत्यावश्यक उपकरण का काम करता है।

18.4 प्वायसन बंटन (Poisson Distribution) :

व्यॉयसन बंटन की उत्पत्ति का क्षेत्र साइमन डेनिस प्वॉयसा को दिया जाता है। ये फ्रांस के प्रसिद्ध गणितज्ञ थे। यह एक खण्डित प्रायिकता बंटन हैं। इसमें किसी घटना के एक अल्प समयावधि में घटने की प्रायिकता बहुत कम होती है तथा दो अथवा अधिक ऐसी घटनाएँ उस अल्पवधि में घटने की प्रायिकता नगण्य

होती है। दूसरे शब्दों में जहाँ घटना के घटित होने की प्रायिकता p बहुत ही कम (लगभग शून्य के निकट) हो घटना के घटित न होने की प्रायिकता q बहुत अधिक (लगभग 1 के निकट हो एक खण्डित n घातांक का मान भी अत्यधिक हो और np = समान्तर माध्य एक छोटी धनात्मक संख्या हो। ऐसी स्थिति में द्विपद बंटन सही परिणाम नहीं दे सकता इसलिए प्वॉयसा बंटन द्विपद बंटन की सीमा निर्धारित उपरोक्त बातों को स्पष्ट करते हुए कहा जा सकता है कि प्वॉयसा बंटन उन घटनाओं पर लागू होता है जो बिरले घटती हैं, असामान्य और दुर्लभ होती है और उनके घटने की प्रायिकता बहुत अल्प होती है। अतः यह ''दुर्लभ व असंभाव्य घटनाओं का नियम है।''

प्वॉयसा बंटन के उदाहरण :

(क). किसी वर्ष एक नगर में किसी महामारी से मरने वालों की संख्या।

(ख). किसी वर्ष नगर के एक बड़े चौराहे पर होने वाली दुर्घटनाओं की संख्या। यह जानना कोई अर्थ नहीं रखता कि कितनी दुर्घटनाएँ नहीं हुई।

(ग). एक वर्ष में प्रतिष्ठित व्यक्तियों द्वारा की जाने वाली आत्महत्याओं की संख्या।

(घ). एक बूँद स्वच्छ पानी में कीटाणुओं की संख्या।

(ड़). किसी कारखानों में निर्मित पेनों में से दोषपूर्ण पेनों की संख्या।

(च). फुटबाल के मैच में 10 मिनट के समयांतर पर किये गये गोलों की संख्या।

उपर्युक्त सभी कारखानों में दी गयी अवधि में घटना के न घटने की सम्भावना उपेक्षाकृत अधिक है, जबकि घटना कितनी बार घट सकती है, उसकी कोई सीमा नहीं है। जैसे व्यस्त चौराहे पर दुर्घटना कितनी हो सकती है इसकी कोई सीमा नहीं बांधी जा सकती। 20, 50 अथवा 100 दुर्घटनाएं भी हो सकती है लेकिन ऐतिहासिक तथ्यों के आधार पर ज्ञात होता है कि एक वर्षों में ऐसे दिनों की संख्या बहुत अधिक है जबकि कोई दुर्घटना नहीं होती।

प्वॉयसा बंटन की गणना–क्रिया :

प्वॉयसा बंटन ये 0, 1, 2, 3,.........n सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए निम्न गणना–क्रिया अपनायी जाती है–

(क). सर्वप्रथम समान्तर माध्यम 'm' का परिकल्पन किया जाता है।

(ख). $_{e}$-m का मान निकाला जाता है।

जहाँ– e = गणितीय अचर–मूल्य जो कि प्राकृतिक लघुगणक (Natural logarithm) का आधार है जिसका मान 2.7183 है।

$$e^{-m}\frac{1}{e^{m}} = \frac{1}{(2.7183)^{m}} = \frac{1}{\text{Antiolog [log 2.7183 x m]}}$$

$$= \frac{1}{\text{AL(0.4343 x m)}} = \text{Reciprocal [Antiolog (0.43 43 x m)]}$$

(ग). निम्नलिखित प्वॉयसा–सूत्र का प्रयोग किया जायेगा और 0, 1, 2, 3, ...n सफलता के लिए प्वॉयसॉ–प्रायिकताएँ ज्ञात कर ली जायेंगी–

$$P(x) = e^{-m} x \frac{m^{x}}{x!}$$

जहाँ – x = सफलता की संख्या, 0, 1, 2, 3 .... n

$e = 2.7183$

m = समान्तर माध्य

यदि सफलता–संख्या की प्रायिकता 0 अर्थात् $x = 0$ तो

$$P(0) = e^{-m} x \frac{M\,0}{0\,!} = e^{-m} \; (\because \; m^{0} = 1, 0! = 1)$$

अतः स्पष्ट है कि 0 सफलता की प्रायिकता होती e^{-m} होती है यदि 1 सफलता संख्या की प्रायिकता 1 अर्थात् $x = 1$

तो $P(1) = {}^{i-m} x \frac{M\,1}{1\,!} = e^{-m}{}_{x}{}^{m}$

$= e^{-M}{}_{(M)} = P\,(0) X\,M$

यदि 2 सफलता संख्या की प्रायिकता 2 अर्थात् $X = 2$

तो $P(2) = {}^{i-M} x \frac{M\,2}{2\,!} = e^{-m} \; x\, m\, x \frac{m}{2}$

$= P(1)^{X} \; \frac{m}{2}$

इसी प्रकार–

$P(3) = {}^{e-m\,x\,\frac{m^{3}}{3\,!}} = e^{-m}\, x\, m\, x \frac{m^{2}}{2\,!} \; x \; \frac{m}{3} = P_{(2)} \; x \; \frac{m}{3}$

$P(4) = {}^{e-m\,x\,\frac{m^{4}}{4\,!}} = e^{-m}\, x\, m\, x \frac{m^{3}}{3\,!} \; x \; \frac{m}{4} = P_{(3)} \; x \; \frac{m}{4}$

$P(5) = {}^{e-m\,x\,\frac{m^{5}}{5\,!}} = e^{-m}\, x\, m\, x \frac{m^{4}}{4\,!} \; x \; \frac{m}{5} = P_{(4)} \; x \; \frac{m}{5}$

सारणी के रूप में प्वायसॉ प्रायिकताएँ और प्रत्याशित आवृत्तियाँ निम्नांकित हैं–

X :	0	1	2	3	4	5	 x
p (x) ;	$e^{-m} \times \frac{m^0}{0!}$	$e^{-m} \times \frac{m^1}{1!}$	$e^{-m} \times \frac{m^2}{2!}$	$e^{-m} \times \frac{m^3}{3!}$	$e^{-m} \times \frac{m^4}{4!}$	$e^{-m} \times \frac{m^5}{5!}$	$e^{-m} \times \frac{m^x}{x!}$

$$P(x) = e^{-m}\left[1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \frac{m^4}{4!} + \frac{m^5}{5!} \ldots . \frac{m^x}{X!}\right]$$

(घ). सभी पदों को N से गुणा करने पर प्वॉयसां बंटन की प्रत्याशित आवृत्तियाँ निकाल ली जाती है–

$$f(x) = N\left[e^{-m} \times \frac{m^x}{x!}\right]$$

उदाहरण (Illustration) :

एक व्यस्त चौराहे पर पिछले वर्ष 365 दिनों में 73 दुर्घटनाएँ घटित हुईं। उसी चौराहे पर अगले वर्ष सम्भावित दैनिक दुर्घटनाओं की प्रायिकता तथा प्रथम 120 दिनों के लिए दुर्घटनाओं की आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

प्वॉयसॉ बंटन की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम समान्तर माध्य (m) का परिकलन की आवश्यकता है।

$$m = \frac{73}{365} = 0.2$$

दूसरे क्रम में e^{-m} का मान निकाला जायेगा–

$$\frac{1}{2.7183} 0.2$$

$$e^{-2.51} = e^{-2.0-0.51}$$

$$e^{-2.0} \times e^{-0.51} = 0.13534 \times 0.6005 = 08127$$

m = 0.0 से m = 0.99 तक के लिए e^{-m} के मानों की तालिका

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	.9048	.8958	.8869	.8681	.8694	.8607	.8521	.8437	.8353	.8207
0.2	.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	.7408	.7334	.7261	.7189	.7118	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6126
0.5	.6065	.6005	.5945	.5886	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5273	.5220	.5169	.417	.5066	.5016

0.7	.4966	.4916	.4868	.4819	.1771	.4724	.4677	.4630	.4548	.4538
0.8	.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	.4066	.4025	.3985	.3946	.3906	.3867	.3829	.3791	.3753	.3716

$m = 1$ से $m = 10$ के लिए e^{-m} के मानों की तालिका

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-m}	**0.36788**	**0.13534**	**0.04979**	**0.01832**	**0.006738**	**0.002479**	0.000912	0.000335	0.000123	0.000045

उपर्युक्त तालिका से $m = 0.51$ के e^{-m} का मान देखने के लिए पहले स्तम्भ में 0.5 लें इसके सामने तथा स्तम्भ 1 के नीचे लिखा मान पढ़े– इस प्रकार

$$e^{-0.51} = 0.6005$$

इसी प्रकार $e^{-0.61} = 0.5434$ तथा e^{-m} का मान अर्थात् $e^{-0.2}$ का उपरोक्त तालिका में से देखने पर 0.8187 होगा।

अतः $e^{-0.2} = 0.8187$

$P(0) = e^{-m} \times \frac{m^0}{0!} = e^{-m} = 0.8187$ (0 सफलता की प्रायिकता e^{-m} होती है।)

प्वॉयसॉ बंटन के अचर मूल्य :

यह पहले ही स्पष्ट किया जा चुका है कि प्वॉयसा बंटन में p का मूल्य बहुत कम होता है अर्थात् q का मान लगभग 1 के बराबर होता है। इसलिए द्विपद बंटन के अचर मूल्य में q के स्थान पर 1 का प्रयोग करके प्वॉयसां अचर ज्ञात किये जा सकते हैं।

समान्तर माध्य (Mean) :

$\bar{x}$ या $m = np = n \times \frac{\bar{x}}{n} = \bar{x}$ या m $\left[\because p = \frac{\bar{x}}{n}\right]$

प्रमाप विचलन (Standerd Deviation) :

$\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{n \times p \times 1} = \sqrt{n\,p} = \sqrt{m}$ इसी प्रकार $\sigma^2 = m$

प्वॉयसॉ बंटन में समान्तर माध्य (m) वह प्रसरण (σ^2) के मान बराबर होते हैं और प्रमाप विचलन समान्तर माध्य का ही वर्गमूल होता है।

प्रथम परिघात = $\mu_1 = 0$

द्वितीय परिघात = $\mu_2 = m$

तृतीय परिघात = $\mu_3 = m$

चतुर्थ परिघात = $\mu_4 = m(3m + 1)$

$\beta_1 = \frac{1}{m} \quad r_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{m}};$

$\beta_2 = 3 + \frac{1}{m}$

नोट : प्वॉयसॉ बंटन के लिए केवल (m) ज्ञात हो तो अन्य सभी अचर मूल्य निकाले जा सकते है।

उदाहरण (Illustration) :

एक कंपनी बिजली के बल्ब बनाती है। बल्ब के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता 0.02 है। 500 बल्बों के एक लइन में 5 दोषपूर्ण बल्ब होने की क्या प्रायिकता है?

हल (Solution) :

माना X = 500 बल्बों के एक लदान में दोषपूर्ण बल्बों की संख्या, n = 500, p=0.02

अतः m = np = 500 X 0.02 = 10

तथा $P(X) = P(X{=}X) = e^{-m}\frac{m^x}{X\,i}\ (x = 0.1 - - - \infty)$

प्रायिकता = $P_{(5)} = P\ (X{=}5)$

$= e^{-}10\frac{10^5}{5!}$

$e^{-10} = 0.000045$ (तालिका से लिया गया)

मान रखने पर $0.000045\ X\frac{10X10X10X10X1}{5X4X3X2X1}$

$= 0\text{-}000045 \quad X\ 833.30$

$= 0.0375$

उदाहरण (Illustration) :

यदि प्वॉयसॉ वितरण का माध्य 2.0 हो तो 0,1,2,3... सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। विभिन्न आवृत्तियाँ क्या होगी जबकि कुल आवृत्ति 100 हो?

हल (Solution) :

2 सफलताओं की प्रायिकता = $p_{(r)} = e^{-m}\frac{m^r}{r\,!}\ (m = 2.0)$

$\therefore \quad p_o = e^{-m}\frac{m^o}{0\,!} = e^{-m} = e^{-2}$

$= \quad p_o = 2.71828^{-2} = \left(\frac{1}{AL\ (m\ x\log 2.71828)}\right)$

$= \quad p_o\left(\frac{1}{AL\ (2\ x\log 2.71828}\right)$

$= \quad \frac{1}{AL\ (2\ x\ 0.4343)}$

$= \quad p_o = \frac{1}{AL\ 0.8686}$

$$= \frac{1}{7.389} = 0.1353$$

अब सूत्र $p^{(r+1)} = P(r) X \frac{m}{r+1}$ से,

$$p_1 = p_0 X \frac{m}{1} = 2_{P(0)} = 2X0.1353 = 0.2706$$

$$p_2 = p_1 X \frac{m}{2} = \frac{2}{2} x\, 0\, 2.706 = 0.2706$$

$$p_3 = p_{(2)} X \frac{m}{3} = \frac{2}{3} x\, 0\, 2.706 = 0.1804$$

$$p_4 = p_{(3)} X \frac{m}{4} = \frac{2}{4} x\, 0\, 2.804 = 0.0902$$

$$p_5 = p_{(4)} X \frac{m}{5} = \frac{2}{5} x\, 0.0902 = 0.036108$$

$$p_6 = p_{(5)} X \frac{m}{6} = \frac{2}{6} x\, 0.036108 = 0.0120266$$

$$p_7 = p_{(6)} X \frac{m}{7} = \frac{2}{7} x\, 0.0120266 = 0.0034371$$

यही तरीका अनंत सफलता संख्या तक चलाया जा सकता है लेकिन स्पष्ट है कि सम्भावना तेजी से घटती जा रही है और कुछ संख्याओं के पश्चात् बहुत कम हो जायेगी जिनकी गणना करना महत्वहीन हो जाता है।

इस प्रकार प्वॉयसॉ वितरण निम्न प्रकार का हुआ :–

X :	0	1	2	3	4	5	6	7 या अधिक
P (x)	0.1353	0.2706	0.2706	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034

(7 के बाद सम्भावनाओं की गणना नही की गयी है इसलिए अंत में 7 और 7 से अधिक बना दिया गया है जिसकी सम्भावना 0–6 सफलताओं की सम्भावनाओं के योग को 1 से घटाकर ज्ञात किया गया है।

यदि कुल आवृत्ति N = 100 हो तो प्रत्याशित आवृत्तियाँ निम्न होगीं–

प्वॉयसॉ बंटन की विशेषताएं :

X	N_p (x)
0	100 x 0.1353 = 13.53 = 14
1	100 x 0.2706 = 27.06 = 27
2	100 x 0.2706 = 27.06 = 27
3	100 x 0.1804 = 18.84 = 27
4	100 x 0.0902 = 9.02 = 9
5	100 x 0.0361 = 3.61 = 4
6	100 x 0.0120 = 1.20 = 1
7 या अधिक	100 x 0.0034 = 0.34 = 0

प्वॉयसॉ बंटन की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं :–

(क). माध्य – प्वॉयसॉ बंटन का एक मात्र प्राचल इसका समांतर माध्य है, इसे ऐतिहासिक तथ्यों के आधार पर ज्ञात किया जा सकता है। जब प्यॉवसां बंटन को द्विपद बंटन की सीमांत स्थिति के रूप में प्रयुक्त किया

जाता है, तब $m = np$ के द्वारा ज्ञात किया जाता है। यह n तथा p द्विपद बंटन के प्राचल है। निम्नलिखित स्थितियों में एक द्विपद बंटन की प्रायिकता प्वॉयसॉ बंटन के आधार पर ज्ञात की जाती है–

(अ). जब अभिप्रयोगों की संख्या अधिक हो अर्थात् $n \rightarrow \infty$.

(ब). जब p अर्थात् सफलता की प्रायिकता शून्य के पर्याप्त निकट हो $p \rightarrow 0$.

(स). जब np-m परिमित हो।

(ख). प्रमाप विचलन $- \sigma = \sqrt{m}$

(ग). प्रसरण $= \sigma^2 = m$

आवृत्तियों – प्वॉयसॉ प्रायिकता बंटन की आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिए प्वॉयसॉ प्रायिकताओं को कुल आवृत्तियों (N) से गुणा करेगें, इस प्रकार प्राप्त परिणाम N.P गणितीय प्रत्याश है।

(ड़). **स्वरूप (Forms)** : प्वॉयसॉ बंटन असममित (Skeweed) होता है और जैसे–जैसे समांतर माध्य (m) का मूल्य बढ़ता जाता है यह बढ़ता जाता है यह बंटन दाहिनी ओर प्रवृत्ति होता जाता है और विषमता की मात्रा कुछ कमी होती जाती है।

(च). **मूलभूत मान्यता (Basic Assumption)** :इस बंटन की आधारभूत मान्यता है कि घटना की प्रत्याशा स्थिर होनी चाहिए। यदि यह प्रत्याशा 'm' विभिन्न परीक्षणों के अनुसार बदलती रहती है दो प्वॉयसरा बंटन का प्रयोग भ्रमात्मक रहेगा। उदारणार्थ, किसी देश में आत्महत्या की घटनाओं पर यह बंटन लागू नहीं किया जा सकता क्योंकि आत्महत्या की दर समय–समय पर बदलती रहती है।

प्यॉवसॉ बंटन की उपयोगिता :

उन सभी घटनाओं में जिनकी सफलता की प्रायिकता (p) बहुत कम हो और n अधिक हो, व्यॉयसॉ बंटन उपयोगी सिद्ध होता है। ऐसी घटनाओं (rare events) में हम यह नही जानना चाहते कि कितनी दशाओं में घटना नहीं घटी, बल्कि केवल यह ज्ञात करना तर्कसंगत होता है कि कितनी बार यह घटना घटी। जैसे– एक बड़े कारखानों में गुणवत्ता निरीक्षण के दौरान की गई दोषपूर्ण वस्तुओं की गणना (दोष रहित की गणना नहीं), मैच में किये गये गोल की संख्या (न किये गये गोलों की संख्या नहीं), महामारी व सड़क दुर्घटनाओं में मृतकों की संख्या, प्राणि विज्ञान में जीवाणुओं की गणना, बीमा व्यवसाय में मृत्यु या दुघर्टनाओं की संख्या– ये सभी प्वॉयसॉ बंटन के अनुसार वितरित घटनाएँ हैं। इनके न घटने की प्रायिकता (q) अत्यधिक (लगभग 1) होती है। प्राणिशास्त्र, जनांकिकी, यातायात, नियंत्रण, टेलीफोन संन्देशवाहन, उद्योग और सांख्यिकीय किस्म–नियंत्रण की विभिन्न समस्याओं का विश्लेषण प्वॉयसॉ बंटन के आधार पर होता है।

18.5 प्रसामान्य बंटन (**Normal Distribution**) :

प्रसामान्य बंटन एक सतत् प्रायिकता बंटन है। इस बंटन को विकसित करने में 18वीं शताब्दी के गणितज्ञ कार्ल गॉस का बहुत बड़ा योगदान रहा है, इसलिए इस बंटन को गॉस का बंटन (Gaussian Distribution) भी कहते हैं।

द्विपद बंटन $(p + q)^n$ में यदि घातांक (Exponent)n का मान अनंत (Infinitely large) हो तो बिन्दुरेखीय पत्र पर सभी बिन्दुओं को अंकित करने से एक पूर्ण सरल सममित वक्र (Perfectly smooth symmetrical Curve) प्राप्त होगा। यदि p और q बराबर न भी हो और n अनन्त हों तो भी लगभग पूर्ण सरल सममित वक्र बनेगा। गॉसियन बंटन के अलावा इसे विभ्रम का प्रसामान्य वक्र (Normal curve of error) प्रसामान्य प्रायिकता वक्र (Normal Probability curve) के नाम से भी जाना जाता है।

या–लुन–चाऊ के शब्दों में वह परिपूर्ण सरल सममित वक्र जो द्विपद $(p + q)^n$ के विस्तार से प्राप्त होता है और जिसमें n घातांक का मान अनन्त की ओर प्रवृत होता है, प्रसामान्य वक्र कहलाता है। इस प्रकार प्रसामान्य वक्र बंटन की वह सीमा है जिसमें n का मान अनंत की ओर बढ़ता जाता है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि प्रसामान्य वक्र एक अखण्डित, सतत् और अनंत द्विपद बंटन या सरल रूप में प्रसामान्य बंटन का निरूपण करता है।

यदि 10 सिक्के उछाले जायें और $p = q = \frac{1}{2}$ अर्थात् सफलता तथा असफलता के आने की प्रायिकता 1/2 हो तो द्विपद बंटन के आधार पर एक दस भुजाओं वाला आवृति बहुभुज बनेगा। परन्तु यदि 100,000 सिक्के एक साथ उछाले जायें और परिणामों को एक रेखाचित्र पर अंकित किया जाये तो निश्चित रूप से एक पूर्ण सरल सममित वक्र बनेगा जो प्रसमान्य बंटन का वक्र कहलायेगा। अतः n का मान अनंत होने पर द्विपद बंटन प्रसामान्य बंटन में परिणत हो जाता है।

प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ :

प्रसामान्य वक्र में निम्नलिखित विशेषताएँ पायी जाती हैं :–

1. **आवृति (Shape)** : प्रसामान्य वक्र का स्वरूप घंटी नुमा होता है और माध्य के दोनों ओर पूर्ण सममित वक्र होता है। यदि उच्चतम कोटि–अक्ष से कागज को मोड़ दिया जाए तो वक्र के दोनों भाग एक–दूसरे के समरूप हों जायेगें। इस बंटन में माध्य के दोनों ओर की आवृत्तियाँ लगभग बराबर होती हैं। अधिकतम आवृति बिल्कुल केन्द्र में होती है जहाँ उच्चतम कोटि–अक्ष (Maximum ordinate) अथवा वक्र का शीर्ष–बिन्दु स्थित है। माध्य, मध्यका और बहुलका $(\overline{X} = M = Z)$ तीनों ही इस बिन्दु पर स्थित होते है।

2. **सतत् चर** : प्रसामान्य बंटन सतत् या अखण्डित चर–मूल्यों का बंटन है जबकि द्विपद और प्वॉयसॉ बंटन खण्डित श्रेणी के रूप में होते है।

3. **एक बहुलक** : प्रसामान्य बंटन के वक्र में एक ही शीर्ष होना हैं। अतः यह एक–बहुलक वाला बंटन है।

4. **केन्द्रीय माप भी समानता तथा चतुर्थकों का समान अंतर** : $\bar{X}$ = M=Z और $[(Q_3\text{-}M) = (M\text{-}Q_1)]$ होता है।

5. **चतुर्वक विचलन (Q.D)** : चतुर्थक विचलन या अर्द्ध–अन्तर चतुर्थक विस्तार सम्भाव्य विभ्रम के बराबर होता है जो प्रमाप विचलन का लगभग 2/3 भाग (Q.D=0.67456) होता है। केन्द्रीय कोटि अक्ष से दोनों ओर 0.6745σ अन्तरों के विस्तार में आधी आवृत्तियाँ (50% or the cases) सम्मिलित होती है।

चतुर्थक विचलन को प्रथम चतुर्थक में जोड़ने और तृतीय चतुर्थक में से घटाने पर मध्यका = समान्तर माध्य = बहुलक प्राप्त हो जाता है।

$$[Q_1 + Q.D = Q_3 - Q.D. = M = \bar{X} = z\,;$$
$$\because \qquad M_1 - Q_1 = Q_3 - M = \frac{Q_3 - Q_1}{2}\,]$$

6. **माध्य विचलन (Mean Deciation)** : प्रसामान्य बंटन का माध्य विचलन, उसके प्रमाप विचलन का $\sqrt{\frac{2}{X}} = \sqrt{\frac{2}{3.1416}}$ = 0.79788 अर्थात् लगभग 4/8 भाग होता है। (δ = 0.7979σ)

7. **सम्भाष्य विभ्रम और माध्य–विचलन (Probable Error and M.D.)** : सम्भाव्य विभ्रम अर्थात् चतुर्थक विचलन माध्य विचलन का 0.845 गुना (लगभग 5/6 भाग) होता है।

$$\left[\mathrm{Q.\,D.}\frac{0.6745}{0.7979}\delta\ 0.845\delta\right]$$

8. **अनन्तस्पर्शी** : वक्र के दोनों सिरे आधार रेखा के निकट आते रहते हैं किन्तु वे उसे स्पर्श कभी नहीं करते। वक्र अनन्तस्पर्शी होता है। सैद्धान्तिक रूप से वक्र दोनों दिशाओं में अनन्त की ओर अग्रसर होता है।

9. **नीति–परिवर्तन–बिन्दु (Point of Inflection)** : ऐसे बिन्दु जहाँ प्रसामान्य वक्र की वक्रता अपनी दिशा बदलती है, माध्य से एक प्रमाप विचलन के अन्तर पर होते हैं $(\bar{X} \neq \sigma)$। इस परिवर्तन बिन्दुओं से यदि आधार रेखा पर दोनों ओर लम्ब खीचें जाये तो समान्तर माध्य से वहाँ तक की दूरी $\bar{X} \pm 1\sigma, \bar{X} \pm 2\sigma$, $\bar{X} + 3\sigma$ आदि होगी। माध्य मूल के निकट यह वक्र भुजाक्ष की ओर अवतल (Concave) और दोनों सिरों (Two tails) के निकट उत्तल (Convex) होता है।

10. **प्रसामान्य वितरण के अचर मूल्य** : निम्नलिखित अचर मूल्य होते है–

समान्तर माध्य = $\bar{X}$ अथवा μ_1

प्रमाप विचलन = σ

परिघात — प्रथम द्वितीय तृतीय चतुर्थ

$$\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = \sigma^2 \qquad \mu_3 = 0 \qquad \mu_4 = 3\,\mu_2{}^2 = 3\sigma^4$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4^2}{\mu_3^2} = \qquad = \frac{3\mu_2^2}{\mu_2^2} = 3$$

$$r_1 = 0, r_2 = \beta_2 - 3 = 3 - 3 = 0$$

प्रसामान्य वितरण सममित होने के कारण इसके विषम (odd) परिघातों का मूल्य सदैव शून्य होता है और इसलिए विषमता भी शून्य होगी, परन्तु पृथुशीर्षत्व (kurtosis) जो मध्य शीर्ष वाले वितरण का प्रतीक है, का मान 3 होता है।

11. **वितरण के प्राचल (Parameter of Distribution)** : इसके दो प्रमुख प्राचल हैं, समान्तर माध्य $\overline{X}$ और प्रमाप विचलन σ. इन दोनों की सहायता से सम्पूर्ण वितरण लिखा जा सकता है। μ संकेताक्षर सम्पूर्ण समग्र के लिए समान्तर माध्य के लिए प्रयोग होता है।

12. **कोटि सम्बन्ध (Ordinate Relationship)** : प्रसामान्य के समान्तर माध्य पर कोटि अक्ष की अधिकतम ऊँचाई होती है। कोटि अक्ष पर माध्य से एक बार प्रमाप विचलन की दूरी माध्य पर कोटि अक्ष की ऊँचाई की 60.653 प्रतिशत होती है। इसी प्रकार $\overline{X} \pm 2\sigma$ के कोटि अक्ष की ऊँचाई सर्वोच्च कोटि अक्ष की 0. 13534 या 13.54 % होती है। अन्य अनुपात को निम्नलिखित सारणी में देखी जा सकती हैं :–

माध्य से दूरी (इकाइयों में) $[(x-\overline{X})/\sigma]$	माध्य कोटि की ऊँचाई से अनुपात	माध्य कोटि की ऊँचाई का प्रतिशत
0.5	0.88250	88.25%
1.0	0.60653	60.65%
1.5	0.32465	32.47%
2.0	0.13534	13.53%
2.5	0.04394	9.39%
3.0	0.01111	1.11%

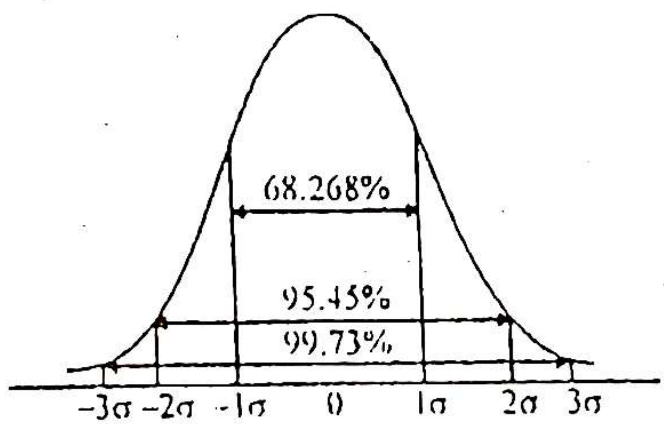
13. **क्षेत्रफल सम्बन्ध (Area Relationship)** : प्रसामान्य वक्र और आधार रेखा (भुजाक्ष) के बीच का क्षेत्र 'प्रसामान्य, वक के अधीन क्षेत्र' कहलाता है। इसी सम्पूर्ण क्षेत्र में प्रसामान्य बंटन की लगभग सभी आवृत्तियाँ पायी जाती हैं। माध्य कोटि अक्ष के साथ प्रमाप विचलन (σ) की माध्य से निश्चित दूरियों पर कोटि अक्ष का सदैव एक ही सम्बन्ध होता है। इसका अर्थ यह है कि माध्य कोटि अक्ष और माध्य से

किसी निश्चित प्रमाप विचलन की दूरी पर कोटि अक्ष के मध्य वक्र का क्षेत्रफल वक्र सम्पूर्ण क्षेत्रफल का सदैव एक निश्चित अनुपात होता है।

मध्य एवं प्रमाप विचलन के आधार पर प्रसामान्य वक्र का क्षेत्रफल निम्नलिखित सारणी में दिया जा रहा है।

(माध्य–कोटि से दूरी में) (σ विचलन इकाइयों में) $\left(Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}\right)$	बाईं ओर के क्षेत्रफल का अनुपात $(\bar{X} - \sigma)$	दाहिनी ओर के क्षेत्रफल का अनुपात $(\bar{X} + \sigma)$	माध्य कोटि से दोनों ओर के क्षेत्रफल का सम्पूर्ण क्षेत्रफल से अनुपात व प्रतिशत
0.5	0.19146	0.19146	0.38292 या 38.29%
0.6745	0.25000	0.25000	0.50000 या 50%
1.0	0.34134	0.34134	0.68268 या 68.27%
1.96	0.47500	0.47500	0.95000 या 95%
2.00	0.47725	0.47725	0.99000 या 99%
2.5758	0.49500	0.49500	0.99000 या 99%
3.00	0.49865	0.49865	8.99730 या 99.73%

प्रसामान्य वक्र में क्षेत्रफल सम्बन्ध



उपरोक्त प्रसामान्य वक्र से निम्न क्षेत्रफल सम्बन्ध स्पष्ट हो जाते हैं–

(क). **प्रमापित प्रसामान्य वितरण (बंटन)** : प्रसामान्य वितरण के लिए दो प्राचल समान्तर माध्य $(\bar{X})$ तथा प्रमाप विचलन (σ) आवश्यक होते हैं। इनकी सहायता से ही पुरा वितरण (बंटन) प्रस्तुत किया जा सकता है। प्रसामान्य वक्र के अधीनस्थ विभिन्न क्षेत्र तत्सम्बन्धी सारणी से ज्ञात किये जा सकते हैं परन्तु अलग–अलग $\bar{X}$ और σ के लिए अलग–अलग सारणी की आवश्यकता होगी, इसी कठिनाई को ठीक करने के लिए $\bar{X}$ और σ वाले प्रसामान्य वितरण को एक ऐसे प्रमापित प्रसामान्य वितरण में परिणत कर दिया जाता है जिसका समान्तर माध्य $(\bar{X})$ शून्य है। अर्थात् $\bar{X} = 0$ और प्रमाप विचलन इकाई अर्थात् $(\sigma = 1)$ हो। इस

प्रकार के वितरण की सहायता से प्रसामान्य वितरण के अधीन माध्य कोटि से विभिन्न प्रमाप विचलन इकाइयों वाले कोटि–अक्ष तक के क्षेत्रफल देखे जा सकते हैं।

(ख). **प्रमापित प्रसामान्य चर–मूल्य अर्थात् (Z)** : माध्य $\bar{x}$ और प्रमाण विचलन σ वाले प्रसामान्य बंटन को $\overline{X} = 0, \sigma = 1$ वाले प्रसामान्य बंटन में निम्नलिखित सूत्रानुसार परिणत किया जा सकता है। यह Z परिणति (Z -Transfernation) कहलाता है।

$$Z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

या $$\frac{x}{\sigma}\ [\because x = x - \bar{x}]$$

जहाँ– Z= परिवर्तन विधि, X = अवलोकित मान, $\bar{X} =$ वितरण का माध्य, $\sigma =$ वितरण का प्रमाप विचलन 'Z' प्रमाप विचलन–इकाइयों के रूप में ज्ञात विचलन है और यह प्रमापित प्रसमान्य चर (Standrd Normal variate) कहलाता है।

मानाकि एक वितरण में माध्य ($\bar{X}$) =200 एवं प्रमाप विचलन (σ)=20 है तथा X का का मूल्य 200 है तो Z का मूल्य $\frac{200-200}{20} = 0$ होगा। इसी प्रकार यदि X के मूल्य 180 एवं $\bar{X}$ का मूल्य 20 है तो Z का मूल्य $\frac{180-2}{20} = -1$ होगा।

(ग). **क्षेत्रफल देखने की विधि** : परिशिष्ट के उपलब्ध सारणी में पहला कालम Z अर्थात् $\frac{x-\bar{x}}{\sigma}$ या $\frac{x}{\sigma}$ का मूल्य दिया गया है जो 0.0 से 3.9 तक लिखे गये हैं। इसके आगे 0.00 से लेकर 0.09 तक 10 और कालम है तो सारणी का मुख्य भाग में क्षेत्रफल के अनुपात, अर्थात् प्रायिकता (चार दशमलव बिन्दुओं तक) दिये गये हैं। यदि $Z = 1.54$ हो तो क्षेत्रफल अनुपात (1.5 के आगे 0.04 के नीचे) 0.4382 है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि केन्द्रिय कोटि से Z.1.54 तक का क्षेत्रफल कुल क्षेत्रफल (1) का 0.4382 है। यदि Z ऋणात्मक है तो यह क्षेत्रफल माध्य कोटि से बाईं ओर होगा तथा Z धनात्मक है तो यह (43.82%) का क्षेत्र सर्वोच्च कोटि से दाहिनी ओर होगा। अब यदि आरम्भ से Z= -1.54 तक का क्षेत्रफल निकालना हो तो केन्द्र कोटि से –1.54 तक के क्षेत्रफल 0.4382 को आधे क्षेत्रफल (0.5000) में से घटाकर (0.5000–0.4382=0.618) ज्ञात कर लिया जायेगा। यदि Z की दो सीमाओं अर्थात् Z_1 एवं Z_2 के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो तो दोनो Z के सारणी मूल्यों को जोड़ दिया जाता है जबकि Z_1 का मान ऋणात्मक तथा Z_2 का मान धनात्मक है।

Z_1=1.54 और Z_2 = +1.05 के मध्य का क्षेत्रफल निकालने के लिए 1.54 के बाई ओर का क्षेत्र (0. 4382) और 1.05 का दाहिनी ओर का क्षेत्र 0.3531 को जोड़ दिया जायेगा जो 0.7913 होगा। इसी प्रकार Z के किसी मूल्य के लिए प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रफल के अनुपात (प्रायिकता) निकाले जा सकते हैं।

उदाहरण (Illustration) :

X एक प्रसामान्य बंटन है। इसका माध्य ($\overline{X}$) 485 तथा प्रमाप विचलन (σ) 23 है। कितनी प्रतिशत इकाइयाँ स्थित होंगी–

(क). 430 और 485 के बीच।

(ख). 450 और 500 के मध्य।

(ग). 450 से कम।

(घ). 500 और 531 के मध्य, तथा

(ङ). 331 से अधिक

हल (Solution) :

$\overline{X} = 485$ तथा $\sigma = 23$

(क). 450 और 485 के बीच का क्षेत्रफल निकालना–

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$Z_1 = \frac{450-4}{23} = -1.52$$

$$Z_2 = \frac{485-485}{23} = 0$$

-1.52 और 0 के मध्य का क्षेत्रफल = 0.4357 या 43.57%

अतः 450 और 485 के बीच 43.57% मूल्य स्थित होंगें।

(ख). 450 और 500 के बीच के मूल्यों का प्रतिशत–

$$Z_1 = \frac{450-485}{23} = 1.52$$

$$Z_2 = \frac{500-485}{23} = 0.65$$

-1.52 से माध्य कोटि (0) तक का क्षेत्रफल= 0.4357 0 से 0.65 तक का क्षेत्रफल = 0.2422

$Z_1 = Z{-}1.52$ से $Z_2 = +\ 0.65$ तक का क्षेत्रफल (0.4357 + 0.2422) = 0.6779

∴ 450 और 500 के बीच 67.79% मूल्य होगें।

(ग). 450 से कम मूल्यों का अनुपात–

$$Z = \frac{450-485}{23} = -1.52$$

केन्द्रीय कोटि–अक्ष 0 से – 1.52 (बाई ओर) तक का क्षेत्रफल = 0.4357

बॉयी ओर के अर्द्ध–भाग का क्षेत्रफल = 0.5000

∴ – 1.52 से पूर्व बॉयी ओर का क्षेत्रफल = 0.5000–0.4357 = 0.0643

अतः 450 से कम मूल्य वाले अवलोकनों का प्रतिशत = 6.43% होगा।

(च). 500 और 531 के बीच का माप–

$Z_1 = \frac{500-485}{23} = +0.65$ तक का क्षेत्रफल = 0.2422

$Z_2 = \frac{531-4}{23} = +2.0$ तक का क्षेत्रफल = 0.4772

$Z_1 = 0.65$ और $Z_2 = +2$ के बीच का क्षेत्रफल 0.4772–0.2422= 0.2350

अतः 500 और 531 के बीच वाले मूल्यों का अनुपात = 23.5% है।

(ड़). 531 से अधिक के लिए–

$$Z = \frac{531-4}{23} = 2$$

$Z = +2$ तक का क्षेत्रफल (माध्य कोटि से) = 0.4772

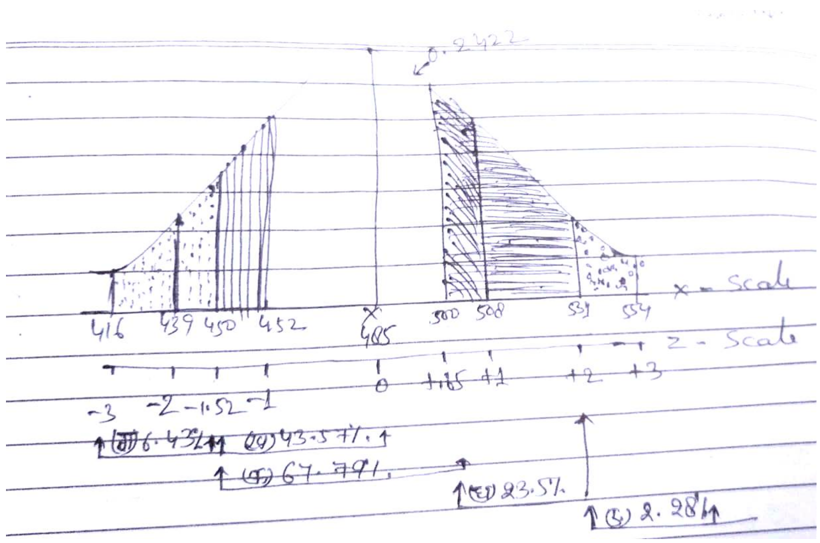
दाहिने अर्द्ध–भाग का क्षेत्रफल = 0.5000

$Z = 2$ से अधिक वाले भाग का क्षेत्रफल = 0.5000–0.4772

= 0.0228

∴ 531 से अधिक 2.28% मूल्य है।

नीचे चित्र (चित्र संख्या– 18.5.2) से अनुपात स्पष्ट हो जाते है–



उदाहरण (**Illustration**) :

1000 विद्यार्थियों पर किये गये एक बुद्धि परीक्षण में माध्य ($\overline{X}$) और प्रमाप विचलन (σ) क्रमशः 42 व 24 थे। उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके अंक (क) 50 से अधिक हों, (ख) 30 और 54 के बीच हों, तथा (ग) सर्वोच्च 100 छात्रों द्वारा प्राप्त न्यूनतम अंक निकालिए–

हल (**Solution**) :

(क). $N = 1000$; $\overline{X} = 42$

$\sigma = 24$, $X = 50$

प्रश्नानुसार X.50 है तो $Z = \frac{50-4}{24} = +0.333$ जिसका क्षेत्रफल 1304[1] है।

$Z =$ 50 से अधिक वाला क्षेत्रफल $= 0.5000 - 0.1304 = 0.3696$

500 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या =

0.3696 X 1000 = 370

1.0 क्षेत्रफल 1304 की गणना अन्तरगणना द्वारा–

0.330 का सारणी देखा गया मान 0.1293 तथा

0.340 का सारणी देखा गया मान 0.1331

अतः 0.333 का मान $= 0.1293 + \frac{0.0038}{0.010} \text{ X } 0.003$

$= 0.1293+0.0011 = 1304$

$$\begin{bmatrix} 0.0038 & = 0.1331 - 0.1293 \\ 0.010 & = 0.340 - 0.330 \end{bmatrix}$$

(ख). $Z_1 = \frac{30-42}{24} = -0.5$

क्षेत्रफल − 0.5 का 0.1915

$Z_2 = \frac{54-42}{24} = +0.5$

क्षेत्रफल + 0.5 का 0.1915

Z_1 और Z_2 के बीच का क्षेत्रफल = 0.1915 + 0.1915 = 0.3830

अतः 30 और 54 के बीच अंक पाने वालों की संख्या

$= 0.3830 \text{ X } 1000 = 383$

(ग). उच्च अंकों वाले 100 विद्यार्थियों की प्रायिकता

$= \frac{100}{1000} = 0.1$ वक्र में दाहिनी ओर।

अंतिम 0.1 का क्षेत्रफल = केन्द्र 0.5–0.1 = 0.4 से अधिक वाला क्षेत्र।

0.4000 क्षेत्रफल के लिए Z का मूल्य = 1.2817 है।

$z = \frac{X-\overline{X}}{\sigma}$; $1.2817 = \frac{X-42}{24}$;

$X - 42 = 30.761$

$\therefore X = 42+30.761 = 72.761$ या 73

अतः श्रेष्ठतम 100 विद्यार्थियों के प्राप्तांक 73 से अधिक होंगे।

उदाहरण (**Illustration**) :

एक प्रसामान्य वितरण में 31% इकाईयाँ 45 से कम हैं और 8% इकाइयाँ 64 से अधिक हैं उस वितरण का माध्य व विचलन ज्ञात कीजिए।

हल (**Solution**) :

31% पद 45 से कम मूल्य के हैं अधिक 45 पर स्थिति कोटि से बाई ओर का क्षेत्रफल 0.31 है इसलिए माध्य–कोटि से 45 पर स्थित कोटि तक का क्षेत्रफल 0.50–0.31= 0.19 हुआ। जिससे सम्बद्ध Z का मान –0.5 है। देखें माध्य एवं प्रमाप विचलन के आधार पर प्रसामान्य वक्र का क्षेत्रफल वाला सारणी।

$$z = \frac{X-\overline{X}}{\sigma} = \frac{45-\overline{X}}{\sigma} = -0.5 - -(i)$$

8% मूल्य 64 से अधिक है अतः माध्य कोटि से 64 तक का क्षेत्रफल = 0.50– 0.08 = 0.42 है। इसे सामान्य वितरण के क्षेत्रफल वाला सारणी का अवलोकन करें। 0.42 क्षेत्रफल के लिए Z का मूल्य 1.4 है। माध्य कोटि से दाहिने ओर होने के कारण यह धनात्मक है।

$$z = \frac{64-\overline{X}}{\sigma} = +1.4 = - - (ii)$$

अर्थात् $45-\overline{X} = -\ 0.5\,\sigma$ . . . (i)

$64-\overline{X} = \ 1.4\,\sigma$ . . . (ii)

अब (ii) में से (i) को घटाने पर

$$-19 = -\ 1.9\,\sigma \therefore \sigma = \frac{-1}{-1.9} = 10$$

σ का मान (i) में रखने पर–

$$45 - \overline{X} = 0.5 \text{ X } 10$$

$$=) - \overline{X} = -\ 45-5 \therefore \overline{X} = 50$$

अतः प्रसामान्य वितरण का माध्य = 50 और प्रमाप विचलन 101।

18.6 बोध प्रश्न :

खाली स्थान की पूर्ति करें–

1. एक आवृत्ति बंटन की आवृत्तियाँ वास्तविक अवलोकनो पर आधारित हो तो उसे............ आवृत्ति बंटन कहते है।
2. प्रसामान्य बंटन एक..................प्रायिकता बंटन होता है।
3. चतुर्थक विचलन प्रमाप विचलन का लगभग..................भाग होता है।
4. द्विपद बंटन को................... बंटन भी कहा जाता है।
5. सफलता को....................तथा असफलता को....................से प्रदर्शित किया जाता है।

सत्य एवं असत्य कथन छाटिएँ–

1. द्विपद बंटन खण्डित प्रायिकता बंटन है।
2. प्वायसा बंटन के उत्पत्ति का श्रेय साइमन डेनिस को दिया जाता है।
3. ''एक बूँद स्वच्छ पानी में किटाणुओं की संख्या'' द्विपद बंटन का उदाहरण है।
4. $\overline{X}$ तथा σ प्रसामान्य वितरण के लिए कोई एक प्राचल आवश्यक होता है।
5. प्वायसा बंटन का एक मात्र प्राचल समान्तर माध्य ($\overline{X}$) होता है।

18.7 बोध प्रश्नों के उत्तर :

खाली स्थान की पूर्ति वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. अवलोकित; 2. सतत् ; 3. 2/3 ; 4 p और q 5. बर्नोली।

सत्य एवं असत्य कथन वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. सत्य; 2. सत्य ; 3. असत्य, 4. असत्य, 5. सत्य।

18.8 स्वपरख एवं आंकिक प्रश्न :

1. सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन का क्या अर्थ है?
2. द्विपद बंटन के आशय को स्पष्ट करते हुए इसके मान्यताओं को स्पष्ट कीजिए।
3. द्विपद बंटन की प्रमुख विशेषताओं का उल्लेख करते हुए इसकी उपयोगिता बताइए।
4. प्वॉयसॉ बंटन का उदाहरण देते हुए अर्थ स्पष्ट कीजिए।
5. प्वॉयसॉ बंटन की उपयोगिता का उल्लेख अपने शब्दों में कीजिए।
6. द्विपद और प्यॉवसॉ बंटनों के माध्य और प्रमाप विचलन के व्यंजक लिखिए। जिन सांकेतिक चिन्हों का आप उपयोग करें उनके अर्थ समझाइए।
7. प्रसामान्य बंटन की प्रमुख विशेषताएँ क्या है? सांख्यिकीय विश्लेषण में प्रसामान्य बंटन की महत्ता का संक्षिप्त वर्णन कीजिए।
8. प्रसामान्य वक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल संबंध की व्याख्या कीजिए।
9. द्विपद, प्वॉयसॉ और प्रसामानय बंटनों का अन्तर स्पष्ट कीजिए। निम्न घटनाओं में आप किस प्रकार के बंटन की प्रत्याशा करेगें और क्यों?

   क. पॉसा फेंकने के प्रयोगों की आवृत्तियाँ तथा

   ख. भारत की कुल जनसंख्या में आत्महत्या की आवृत्तियाँ जबकि आत्महत्या एक अल्प संभावना वाली घटना है।

   ग. एक परीक्षण में दो से अधिक परिणामों वाले अभिप्रयोग।

घ. किसी विश्वविद्यालय के 10,000 छात्रों की ऊँचाई के समग्र में से 100–100 छात्रों के 50 यादृच्छिक प्रतिदर्श।

ड़. किसी कार्यालय में आने वाले प्रति मिनट टेलीफोन काल की संख्या।

द्विपद बंटन (Binomial Distribution)

10. द्विपद बंटन का सम्पूर्ण विस्तार कीजिए : 128 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5$ [4,20,40,40,20,4]

11. 4 सुडौल सिक्के 256 बार उछाले गये। चित्र और पट आने की बारम्बरताओं को ज्ञात कीजिए तथा परिणामों को सारणी में दिखाइए। चित की संख्या के माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए। $[16, 24, 36, 66, 16, 2.1]$

12. एक निर्माणी प्रक्रिया में औसत रूप से 5% वस्तुएँ दोषपूर्ण बनती है। तीन वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में 0, 1, 2 एवं 3 दोषपूर्ण वस्तुएँ पाये जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। $[0.8574, 0.1354, 0.0071, 0.0001]$

13. 5 पासे 128 बार उछाले गए। इस अभ्यास में 4, 5 या 6 जितनी बार आया उसका वर्णन आवृत्ति वितरण के रूप नीचे दिया गया है। प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए। पासों की संख्या जो, 4, 5 या 6 प्रदर्शित करते हैं।

अवलोकित	0,	1	2	3	4	5
आवृत्तियाँ	10	20	43	40	11	4

$[\mathrm{Fe} \rightarrow 4, 20, 40, 40, 20, 4]$

14. उस द्विपद बंटन का निर्धारण कीजिए, जिसका माध्य 4 है और प्रमाप विचलन $\sqrt{3}$ है $\left[\mathrm{q} = \frac{3}{4}\ \mathrm{P} = \frac{1}{4,}\mathrm{n} = 16\ 16_{c_r}\left(\frac{1}{4}\right)\mathrm{r}\left(\frac{3}{4}\right)^{16}\right]$

प्वाँयसाँ बंटन (Poisson Distribution)

15. किसी बड़े कार्यालय में कार्य के 100 दिनों में प्राप्त पत्रों की संख्याएँ निम्न प्रकार थीं। यह मानकर कि यह प्रदत्त प्वाँयसाँ बंटन के लिए लिये गये यादृच्छिक प्रतिदर्श के रूप में हैं, इनकी प्रत्याशित आवृत्तियाँ निकटतम ज्ञात इकाई तक निकालिए।

(प्रदत्त $\mathrm{e}^{-2} = 0.1353, \mathrm{e}^{-0.4} = 0.6703, \mathrm{e}^{-10} = 0.000045$)

मदों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
दिनों की संख्या	1	4	15	22	21	20	8	6	2	0	1

$[\mathrm{e}^{-4} = \mathrm{e}^{-2}\mathrm{x}\mathrm{e}^{-2} = 0.0183; \mathrm{fe} = 2,7,15,20,20,16,10,6,3,1,1]$

16. यदि एक ढ़ेर में दोषपूर्ण वस्तु होने का अनुपात 4% है तो 10 के एक प्रतिदर्श में 2 से अधिक दोषपूर्ण न होने की प्रायिकता क्या है? (दिया है : $\mathrm{e}^{-4} = 0.6703$)

$\left[P_{(o)} + P_{(1)} + P_{(2)} = 0.6703 + 0.2681 + 0.0536 = 0912\right]$

17. एक टेलीफोन एक्सचेंज में औसतन 4 संदेश प्रति मिनट आते हैं। प्वॉयसॉन वितरण के आधार पर प्रायिकता ज्ञात कीजिए–

(क). प्रति मिनट दो या दो से कम संदेश आएंगे

(ख). 4 संदेश तक आएंगें, तथा

(ग). 4 से अधिक संदेश आएंगें। (दिया है, $e^{-4} = 0.0183$)

(क. 0.2379, (ख) 0.6283, (ग) 0.371)

18. यह ज्ञात है कि कम्पनी द्वारा निर्मित पेंन में से 3% दोषपूर्ण होते हैं। प्यॉवसॉ आंकलन का प्रयोग करके, यह ज्ञात कीजिए कि 100 बल्बों के एक प्रतिदर्श में (क) कोई दोषपूर्ण पेन नहीं होगा (ख) एक दोषपूर्ण होगा (प्रदत्त $e^{-3} = 0.05$)

(क $P_o = 0.1353, P_3 = 0.1804, P_4 = 0.0902$)

(ख $P_o = 0.05, P_1 = 0.15$)

19. एक टाइपिस्ट के द्वारा 100 पृष्ठों के टंकण में निम्न प्रकार गलतियां की (प्वॉयसनॅ वितरण का आसंजन कीजिए तथा प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए :

प्रतिपृष्ठ त्रुटियाँ	0	1	2	3	4	5
पृष्ठों की संख्या	42	33	14	6	4	1

(दिया है– $e^{-3} = 0.3679$)

$[36.8, 36.8, 18.4, 6.1, 1.5, 0.4]$

<u>प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution)</u>

20. एक विश्वविद्यालय में एम0काम0 की एक कक्षा में 100 विद्यार्थियों थे। एक परीक्षा में उनके माध्य अंक 40 और प्रमाप विचलन 5 था। बताइए 30 और 40 के बीच अंक पाने वाले कितने विद्यार्थी होंगे?

($\overline{X} \pm$ 26 दोनों ओर के क्षेत्रफल की प्रायिकता 0.9544 है)

21. एक प्रसामान्य वितरण में 7% मदों का मूल्य 35 से कम और 89% मदों का मूल्य 63 से कम है। इस वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

($\overline{X} =$ 50, 29, $\sigma =$ 10.36)

22. प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि माध्य 20 और प्रमाप विचलन 10 वाले एक प्रसामान्य वितरण से यदृच्छया चयनित एक इकाई निम्न के मध्य होगी। (क) 10 और 15 (ख) –5 और 10, तथा (ग) 15 और 25।

23. एक प्रसामान्य वितरण में एक अवलोकन यादृच्छिक रूप से निकालने पर उसके 2.75 तथा 4.34 के मध्य होने की प्रायिकता बताइए यदि वितरण का समान्तर माध्य 5 तथा प्रमाप विचलन 3 हो। [0.2256]

24. निम्न अवलोकित आवृत्ति वितरण पर (क) कोटि अक्ष विधि द्वारा (ख) क्षेत्रफल विधि द्वारा एक प्रसामान्य वक्र आसंजित कीजिए और दोनों रीतियों से प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए।

चर	50—52	53—55	56—58	59—61	62—64	योग
अवृत्ति	1 5	18	42	27	8	100

[fe 4, 20, 41, 28, 7 (b)fe, 4, 21, 39, 28, 8]

/ / / /

इकाई – 19 आनुभाविक अनुसंधान एवं ग्रन्थ सूची (**Empirical Research and Bibilography**)

इकाई की रूपरेखा

19.0 उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्न विधाओं को सीख पायेगें।

- ग्रन्थ सूची का आशय।
- अनुसंधान में प्रयुक्त संदर्भ की अवधारणा।
- प्रयुक्त किये जाने वाले पाद टिप्पणी की उपयोगिता, तथा
- प्रबन्धन में आनुभाविक शोध की प्रक्रिया।

19.1 प्रस्तावना :

प्रस्तुत अध्याय ग्रन्थ सूची वेब ग्रन्थ सूची, संदर्भ तथा पाट टिप्पणी पर प्रकाश डालता है। ये सभी किसी शोध के प्रतिवेदन के अन्त में लिखे जाते है। पाट–टिप्पणी तो कथन या पैराग्राफ के अन्त में ही लिख दिया जाता है।

19.2 ग्रन्थ सूची का परिचय :

ग्रन्थ सूची किसी पुस्तक की सुव्यवस्थित अध्ययन और विवरण है। यह शीर्षक की एक सूची है, जिसमें किसी विषय, भाषा, कालावधि या किसी अन्य संबंध में सूचना हो सकती है। इस सूची की प्रकृति चयनात्मक अथवा वर्णनात्मक भी हो सकती है।

ग्रन्थ सूची, अंग्रेजी शब्द (Bibliography) का हिन्दी है। 1961 में इफ्ला (इंटरनेशनल फेडेरेशन ऑफ लाइब्रेरी) कांफ्रेस मे दी गयी परिभाषा के अनुसार ''वह कृति (या प्रकाशन) जिसमें ग्रन्थों की सूची दी गयी हो। ये ग्रन्थ किसी एक विषय से संबंधित हो, किसी एक सभा में प्रकाशित हुए हो या किसी एक स्थान से प्रकाशित हुए हों। यह शब्द ''ग्रन्थों का भौतिक पदार्थ के रूप में अध्ययन'' इस अर्थ में भी प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार इंफ्ला 'द्वारा स्वीकृत उक्त परिभाषा में मुख्य रूप से ग्रन्थ सूची के तीन अर्थ शामिल किये गये हैंः–

- ग्रन्थ सूची या सिस्टमैटिक और इन्यूमेरेटिव बिल्लियोग्राफी
- ग्रन्थ वर्णन या अनालिटिक डिस्क्रिप्टिव और टेक्श्चुअल बिब्लियोग्राफी और
- ग्रन्थ का भौतिक पदार्थ के रूप में अध्ययन या हिस्टोरिकल विडियोग्राफी

अतः ग्रन्थ का वाह्य रूप में प्रत्येक प्रकार का अध्ययन, जिससे ग्रन्थ के इतिहास, निर्माण आदि का ज्ञान हो आ जाता है। इस प्रकार कागज की निर्माण विधि, मुद्रणकला का इतिहास विकास, चित्रों के मुद्रण की विविध पद्धतियाँ ग्रन्थ के निर्माण काल में की जाने वाली विविध क्रियाएँ आदि सभी बातें 'ग्रन्थ सूची' शब्द के अन्तर्गत आ जाती है।

19.3 वेबग्रन्थ सूची :

शोध में संदर्भ हेतु प्रयोग की गयी वेबसाइटों की एक सूची का प्रतिनिधित्व करने वाला वेबग्रन्थ सूची कहलाता है। दूसरे शब्दों में किसी विशेष विषय में संबंधित इलेक्ट्रानिक दस्तावेजों या वेबसाइटों की सूची विशेष रूप से एक विद्वानों के काम में प्रयोग की जाती है। वेब ग्रन्थ सूची कहलाती है।

19.4 सन्दर्भ :

संदर्भ का आशय किसी पुस्तक या ग्रन्थ में उल्लिखित वे बातें जिनका उपयोग जानकारी बढ़ाने के लिए किया गया हो से है।

अगर हम अपनी बात किसी को बता रहें है तो वह बात कब, कहाँ, कैसे और किस प्रसंग में कही गयी है इसी को बताना संदर्भ देना कहते हैं इसे पढ़ने या जानने वाले के मन में वहाँ का एक आभासी चित्र तैयार हो जाता है और उसे सारी घटनाओं के समझने में आसानी होती है।

19.5 पाद लेख / पाद टिप्पणी (Foot-Notes) :

प्रत्येक उद्धरण की एक पाद लेख या पाद टिप्पणी होनी चाहिए। इसमें इस बात का संकते हो कि उसे किन स्रोतों से प्राप्त किया गया है। ये विद्वत समाज की मांग है, और होनी भी चाहिए कि निश्चित शोध कार्य में बौद्धिक निष्ठा तथा अपने शोध–कार्य की बोधता को प्रभावित करने के लिए मान्यता प्राप्त स्रोतों तथा अधिकारियों के सम्बन्ध में आभार प्रदर्शन कर दिया जाये।

19.5.1 पद–टिप्पणी निर्देशिका : प्रत्येक पद टिप्पणी को प्रसंग (अथवा उद्धरण) को निर्देशिका के क्रमानुसार इंगित किया जाता है जो कथन के अंत में आता है अथवा कभी–कभी लेखक के नाम के अनुसार अथवा एक विशेष शीर्षक भी दे दिया जाता है– जैसा भी उचित हो। राष्ट्रीय संस्थाओं के अनुसार निर्देशिका बनती है तथा प्रत्येक अध्याय में क्रमानुसार अंकित की जाती है।

19.5.2 पद–टिप्पणी सूची : शोध–प्रबंध के मुख्य सूची बनाने की अनेक विधि है। सर्वाधिक अनुमोदित विधि यह है कि प्रमुख भाग में पृष्ठानुसार उसी पृष्ठ के अंत मं आए हुए उद्धरणों की सूची बना दी जाये। छुपे हुए प्रकाशनों मे भी यही विधि अपनायी जाती है। प्रत्येक पाद–टिप्पणी से पाँच स्थान तक ही सीमित रखा जाता है तथा एक स्थान छोड़कर भी टंकन किया जाता है। जब दो या उससे अधिक पाद–टिप्पणियाँ किसी पृष्ठ पर अंकित की जाती है तो उनके बीच में दो स्थानों का अन्तर रहता है।

प्रत्येक पृष्ठ के अंत में पाद–टिप्पणी को मुख्य भाग से ढ़ेड़ इंच दीर्घ पंक्ति द्वारा पृथक रखा जाता है जो कि पीसा टाइपराइटर के 15 स्थानों तथा इलाइट टंकन मशीन के 18 स्थानों के समतुल्य होता है। पृष्ठ के मुख्य भाग के अंत में ये पंक्ति दो स्थान छोड़कर होनी चाहिए।

सूची के प्रत्येक टिप्पणी में निम्नांकित तथ्य रहेगें–

क. लेखक का नाम, प्रथम नाम अथवा हस्ताक्षर के पश्चात् तथा उसका अंतिम नाम लघु विराम सहित।

ख. प्रकाशन का वर्ष।

ग. पुस्तक का शीर्षक नीचे पंक्ति खींची हो तथा तत्पश्चात् लघु विराम।

घ. प्रकाशन का स्थान, जिसके पश्चात् कोलन लिखा है।

ड़. प्रकाशन संस्था का नाम जिसके पीछे लघु–विराम का प्रयोग किया गया है।

च. निश्चित पृष्ठ संख्या जिनके पश्चात् विराम चिन्ह लगा है।

क, ख, ग में वर्णित वर्ग में कोष्ठकों मे लिखे जायेगें जिनके पश्चात् लघु–विराम चिन्ह रहेगा।

19.6 प्रबंधन में आनुभाविक शोध की प्रक्रिया :

अनुभव जन्य साक्ष्य का उपयोग करके किया गया अनुसंधान अनुभवजन्य अनुसंधान (Emprical Research) कहलाता है। यह प्रत्यक्ष और अप्रत्यक्ष अवलोकन या अनुभव के माध्यम से ज्ञान प्राप्त करने का एक तरीका अर्थात् पद्धति है। यह अनुभवजन्य साक्ष्य मात्रात्मक बाजार अनुसंधान और गुणात्मक बाजार अनुसंधान विधियों का प्रयोग करके एकत्र किया जा सकता हे। जैसे– यह पता लगाने के लिए एक शोध किया जा रहा है कि क्या काम करते समय खुशनुमा संगीत सुनने से रचनात्मकता को बढ़ावा मिल सकता है? दर्शकों के एक समूह पर एक संगीत वेवसाईट, सर्वेक्षण का उपयोग करके एक प्रयोग किया जाता है, जो खुश संगीत के संपर्क में हैं और दूसरा सेट जो संगीत विल्कुल नहीं सुन रहे हैं और विषयों का अवलोकन किया जाता है। इस तरह के शोध से प्राप्त परिणाम अनुभवजन्य साक्ष्य देगें कि यह रचनात्मकता को बढ़ावा देता है या नहीं। यह इस लोकोक्ति को संतुष्ट करता है कि, ''जब तक मैं इसे नहीं देखूंगा तब तक मुझे इस पर विश्वास नहीं होगा।''

प्रबंधन में आनुभाविक शोध की प्रक्रिया निम्न वक्रानुसार संपादित की जाती हैं :–

आनुभाविक शोध की प्रक्रिया

19.7 बोध प्रश्न :

खाली स्थानों की पूर्ति करें–

1. किसी पुस्तक की सुव्यवस्थित अध्ययन और विवरण................ कहलाता है।
2. ग्रन्थ सूची में ग्रन्थ के...................... भी आते हैं।
3. वेवसाइटों की सूची का प्रतिनिधित्व करने वाला.................. कहलाता है।
4. कोई बात/तथ्य कब? कहाँ? कैसे? और किस प्रसंग मे कही गयी है बताना ही...........है।
5. संदर्भ स्रोतों का संक्षिप्तीकरण ही.................है।

सत्य एवं असत्य छाँटिए :–

1. ग्रन्थ सूची की प्रकृति केवल चयनात्मक होती है।

2. इलेक्ट्रॉनिक दस्तावेजों की सूची वेव ग्रन्थ सूची कहलाती है।
3. ग्रन्थ में उल्लिखित वे बाते जिनका उपयोग जानकारी बढ़ाने के लिए किया गया हो संदर्भ कहलाता है–
4. राष्ट्रीय संस्थानों के अनुसार पद–टिप्पणी निर्देशिका नहीं बनती है।
5. प्रत्येक पृष्ठ के अंत में पाद–टिप्पणी को मुख्य भाग से डेढ़ इंच दीर्घ पंक्ति द्वारा पृथक रखा जाता है।

19.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

खाली स्थानों की पूर्ति वाले प्रश्नों के उत्तर –

1. ग्रन्थ सूची; 2. निर्माण काल; 3. वेवग्रन्थ सूची; 4. संदर्भ ; 5. पाद–टिप्पणी;

सत्य एवं असत्य वाले प्रश्नों के उत्तर–

1. असत्य; 2. सत्य; 3. सत्य; 4. असत्य; 5. सत्य।

19.9 स्वपरख प्रश्न

1. ग्रंथ सूची से आप क्या समझते हैं?
2. शोधग्रन्थ सूची तथा संदर्भ में अंतर लिखिए।
3. पाद–टिप्पणी क्या है?
4. प्रबंधन में आनुभाविक शोध–प्रक्रिया के चरणों को स्पष्ट कीजिए।

इकाई – 20 (प्रतिवेदन लेखन) (Report Writing)

इकाई की रूपरेखा

20.0 उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् निम्न तथ्यों को जान सकेगें–

- शोध प्रतिवेदन कैसे लिखा जाता है।
- शोध प्रतिवेदन के महत्व।
- शोध प्रतिवेदन लिखने की कला।
- प्रतिवेदन लेखन के चरण, सामग्री तथा लिखने की शैली को जान सकेगें।

20.1 महत्व :

प्रतिवेदन के द्वारा शोधकर्त्ता अपने शोध की समस्या उस क्षेत्र में किये गये कार्यों शोध की प्रक्रिया, उसके आँकड़ों तथा प्राप्त निष्कर्षों को लिपिवद्ध करता है, जिससे इस क्षेत्र में अन्य रूचिवान, व्यक्तियों तक वह पहुँच सकें तथा वे उसके निष्कर्षों का परीक्षण, मूल्यांकन और विवेचन कर सकें।

- शोध प्रतिवेदन से अन्य शोधकर्त्ता उसकी पुनरावृत्ति पर अनावश्यक समय ज्ञात करने से बचते हैं।
- शोध प्रतिवेदन उस क्षेत्र की अन्य समस्याओं तथा प्रस्तुत अनुसंधान की सीमाओं की चर्चा कर भावी शोध के लिए सुझाव भी देता है।
- महत्वपूर्ण उद्देश्य की यह पूर्ति होती कि शोधकर्त्ता अपने प्रतिवेदन के माध्यम से किसी विशेष क्षेत्र में ज्ञान–कोष की वृद्धि के लिए द्वार खोल देता है। अन्य शोधकर्ता उसके प्राप्त निष्कर्षों का मूल्यांकन कर आगें कार्य करने के लिए प्रेरित होते है।

20.2 प्रस्तावना :

शोध प्रतिवेदन संचार का माध्यम, ज्ञान के प्रसार का तथा एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी में हस्तान्तरण का माध्यम है। प्रत्येक शोधकर्त्ता अलग–अलग ज्ञान की खोज करता है, और उसे प्रस्तुत करने के विभिन्न तरिकों को अपनाता है परन्तु एक सामान्य आकार विधि, शैली तथा बनावट में प्रस्तुत करना अधिक उचित होता है। प्रस्तुत अध्याय में शोध प्रतिवेदन के अवधारणाओं के साथ–साथ, लेखन के चरण, सामग्री तथा शैली पर प्रकाश डाला गया है, जिससे आपको अपने प्राप्त शोध ज्ञान को विस्तारित करने में सरलता की अनुभूति हो सकें।

20.3 प्रतिवेदन की परिभाषा :

'रिपोर्ट' Report शब्द लैटिन भाषा के शब्द Reportere से बना है जिसका अर्थ होता है 'वापस लाओ' Bring Back इसका अर्थ यह हुआ कि किसी व्यक्ति को किसी कार्य के लिए भेजा जाता है तो वह वापस आकर भेजने वाले को कार्य के बारे में बताता है या कोई वस्तु मंगाई गई हो तो वह लाकर देता है अर्थात् शोध प्रतिवेदन का उद्देश्य यह है– पढ़ने वाले को यह बताना कि शोध कार्य की समस्या क्या थी? किन विधियों का प्रयोग किया गया? कौन–कौन से नतीजे व खोज की जानकारी हुई? क्या–क्या सामान्यीकरण (Generalisation) व अर्थ (Inferences) निकाले गये? सारांश क्या है? सुझाव तथा इन सबसे और क्या समस्याएँ उत्पन्न हो सकती हैं? आदि। प्रतिवेदन का उद्देश्य, अन्वेषणात्मक, विवरणात्मक, क्रियात्मक (किसी निश्चित कार्य दिशा का सुझाव दिया जावे) अथवा नीति प्रधान हो सकता है। प्रतिवेदन के लेखन के तीन तत्व होते हैं– लेखक, पाठक एवं सामग्री। प्रतिवेदन लेखक के लिए आवश्यक है कि उसे उसके पाठक के ज्ञान, आवश्यकता, अभिवृत्ति एवं रुचि की भली–भाँति जानकारी हो। इस प्रकार शोध द्वारा प्राप्त तथ्यों एवं आँकड़ों का विवेचन करने के बाद उनके निष्कर्षों

को प्रतिवेदन के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। प्रतिवेदन एक प्रकार से सम्पूर्ण शोध का एक लिखित विवरण होता है।

20.4 प्रतिवेदन लेखन के चरण :

एक प्रभावी प्रतिवेदन लेखन के निम्नलिखित चरण होते हैं–

प्रथम चरण	:	संबंधित विषय का गहन अध्ययन करते हुए उसके उद्देश्य को ध्यान में रखना।
दूसरा चरण	:	उद्देश्यों के अनुसार अपने कार्य की रूपरेखा तैयार करना।
तीसरा चरण	:	प्रतिवेदन से संबंधित विषय जैसे चित्र, आँकड़े और सूची इत्यादि एकत्रित करना।
चतुर्थ चरण	:	अनेक लोगों से मिलकर पक्ष–विपक्ष के विचारों को जानकर सूचना एकत्रित करना।
पंचम चरण	:	जाँच पड़ताल से प्राप्त किये गये सभी सूचनाओं को सारणीबद्ध करना।
छठा चरण	:	निष्कर्ष और सिफारिशों की रूपरेखा तैयार करना।
सातवाँ चरण	:	सभी प्रलेखों को शामिल करते हुए मुख्य प्रतिवेदन करके, समिति के सभी सदस्यों के हस्ताक्षर के साथ प्रस्तुत करना।

20.5 शोध प्रतिवेदन की सामग्री :

प्रतिवेदन में क्या–क्या बातें आनी चाहिए? इन बातों को किस तरह से संगठित किया जाय जिससे कि शोध द्वारा प्राप्त सभी जानकारियों को समूचे, सरल व स्पष्ट रूप में दूसरों तक पहुँचाया जा सकें?

विभिन्न प्रकार के शोध होते हैं, अतः विभिन्न प्रकार से प्रतिवेदन भी तैयार किये जा सकते हैं, फिर भी एक शोध प्रतिवेदन में जो विषय (सामग्री) होते हैं उनकी एक सामान्य रूपरेखा बनाई जा सकती है। ये सामग्री इस प्रकार हैं–

1. **शीर्षक (Heading)** : शोध प्रतिवेदन का आरंभ शीर्षक से होता है। प्रतिवेदन के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर शीर्षक दिया जाता है। प्रतिवेदन के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर शीर्षक दिया जाता है। शीर्षक शोध कार्य के विवरण की तरह हो सकता है, जैसे, ''ऊनी वस्त्रों के सम्बन्ध में उपभोक्ताओं की प्रवृत्तियों व व्यवहारों का सर्वेक्षण।'' कभी शोध का शीर्षक शोध के उद्देश्यों को बताते हुए होता हैं, ''जैसे– ''विक्रय योजनाओं (उपहार पुरस्कार आदि) के बारे में उपभोक्ता क्या सोचते हैं।'' प्रथम पृष्ठ पर शीर्षक के सीधे कम्पनी का नाम इत्यादि भी होता है।

2. **प्रस्तावना (Introduction)** : प्रस्तावना में अनुसंधान के विषय से पाठकों का परिचय कराया जाता है। इसमें शोध के विचार का उग्र तथा उसके महत्व को समझाया जाता है। प्रस्तावना में ही बहुत से उन व्यक्तियों संस्थाओं आदि को धन्यवाद दिया जाता है जिनसे किसी भी प्रकार की सहायता या परामर्श प्राप्त हुआ है। प्रस्तावना में अन्य मुख्य बातें ये दी जाती हैं–

(क). **अनुसंधान का उद्देश्य (Objectivs of Research)** : प्रतिवेदन का एक बहुत ही महत्वपूर्ण भाग होता है उन उद्देश्यों का विवरण देना जिनके कारण शोध कार्य किया गया है। किसी भी शोध कार्य के उद्देश्य पहले ही निर्धारित कर लिए जाते हैं और इस शोध के प्रतिवेदन में उनका उल्लेख किया जाना अति आवश्यक होता है।

(ख). **समस्याएँ (Problems)** : समस्या की पृष्ठभूमि तथा उसके विषय में अनुसंधान की आवश्यकता का वर्णन भी प्रतिवेदन के प्रारंभिक भाग में ही दिया जाना चाहिए। समस्या के प्रारंभिक भाग में ही दिया जाना चाहिए। समस्या कब से और कैसे उत्पन्न हुई, इसका चुनाव किस आधार पर किया गया तथा इस समस्या के अध्ययन से कौन से लाभ–होने की आशा है आदि बातों का विवरण समस्या के संदर्भ में दिया जाना चाहिए।

(ग). **अध्ययन क्षेत्र व सीमाएँ (Area and scope of Research)** : शोध के उद्देश्य तथा समस्या का स्पष्टीकरण करने के पश्चात् अध्ययन क्षेत्र के विषय में भी प्रतिवेदन के विषय में उल्लेख किया जाता है। इसके अन्तर्गत भौगोलिक क्षेत्र–उपभोक्ताओं के वर्ग, मध्यस्थ, वितरण के माध्यम, विज्ञापन के साधन आदि किसका कितना अध्ययन किया जायेगा इसका क्षेत्र व सीमाएँ स्पष्ट की जाती हैं। शोध कार्य को वैज्ञानिक एवं सही करने के लिए यह अति आवश्यक है कि अध्ययन क्षेत्र को स्पष्ट रूप से निर्धारित कर दिया जाए तथा उसकी सीमाएँ भी निर्धारित कर दिया जाए जिनके अंतर्गत कि अध्ययन कार्य किया जायेगा। प्रस्तावना में यह भी स्पष्ट कर दिया जाता है कि अध्ययन क्षेत्र को सीमित करने से क्या लाभ होने की आशा है।

(घ). **प्रयुक्त शोध अध्ययन पद्धतियाँ (Research Methodology)** : शोध प्रतिवेदन प्रस्तावना में इस बात का भी स्पष्ट विवरण दिया जाता है कि तथ्यों व सूचनाओं को किन पद्धतियों व प्रविधियों की सहायता से एकत्रिता किया गया है। समस्या को किस दृष्टिकोण से देखा गया है और उस दृष्टि से ये पद्धतियाँ ही क्यों चुनी गयीं। प्रस्तवना में यह भी स्पष्ट किया जाता है कि सभी प्राथमिक व द्वितीयक स्रोतों से जो तथ्य सूचनाएँ एकत्र किये गये उनको प्राप्त करने के लिए किन प्रविधियों को काम में लाया गया। इसी प्रकार प्रश्नावली, अनुसूची, साक्षात्कार प्रविधि साक्षात्कार मार्गदर्शक तथा मापक पैमानों का उपयोग किया जाये तो उनका विस्तृत वर्णन किया जाता है।

(ड़). **निदर्शन (Sampling)** : शोध प्रतिवेदन की प्रस्तावना में निदर्शन के चुनाव की विधि का उल्लेख भी किया जाता है। साथ में यह भी स्पष्ट किया जाता है कि निर्देशन की जो प्रणाली अपनाई गई वही सबसे उपयुक्त क्यों समझी गई है?

3. **अनुसंधान प्रतिवेदन के संगठन का विवरण (Organisation of Report)** : प्रतिवेदन के आरंभ में ही इस बात का विवरण दिया जाता है कि प्रतिवेदन को किस तरह से संगठित किया गया है? प्रतिवेदन के पाठक को प्रतिवेदन के संगठन व व्यवस्था के विवरण से उसको समझने में तथा दूसरों से उस पर विचार–विमर्श करने में सहायता मिलती है।

4. **विषय–सूची (Contents)** : प्रतिवेदन के संगठन के संक्षिप्त विवरण के अतिरिक्त एक विस्तृत विषय सूची भी दी जाती है, जिसमें कि प्रतिवेदन में प्रस्तुत किये गये प्रत्येक अध्याय का क्रमानुसार नाम, पृष्ठ संख्या आदि दिया जाता है। इससे प्रतिवेदन का पढ़ने वालों को कोई भी सूचना तथा विषय ढूँढ़ने में आसानी हो जाती है।

5. **प्रतिवेदन का मुख्य भाग (Main Body of Report)** : ऊपर दी हुई सभी बातों के बाद शोध प्रतिवेदन का सबसे महत्वपूर्ण भाग आता है। इस भाग में कई अध्यायों में बांटकर एकत्र की गई सूचनाओं व तथ्यों को व्यवस्थित ढ़ंग से प्रस्तुत किया जाता है। समूचे तथ्यों का वर्गीकरण सारणीयन, विश्लेषण एवं व्याख्या इन्ही अध्यायों में दी जाती है। तथ्यों को सारणियों के अतिरिक्त चित्रों, रेखाचित्रों आदि के माध्यम से भी प्रकट किया जाता है। तथ्यों को व्यवस्थिति ढ़ंग से प्रस्तुत करने के लिए अतिरिक्त उनका विश्लेषण एवं वर्णनात्मक व्याख्या भी दी जाती है। व्याख्या में उसके परिणामों व निष्कर्षों को प्रस्तुत किया जाता है।

6. **अनुसंधान निष्कर्ष एवं सुझाव (Findings and Suggestions)** : अंत में एक अलग अध्याय में संक्षेप में अनुसंधान के निष्कर्ष प्रस्तुत किये जाते हैं। निष्कर्ष शोध के अनुरूप ही होने चाहिए। निष्कर्ष के साथ ही सम्बन्धित निष्कर्षों के आधार पर दिये जाते हैं।

7. **परिशिष्ट (Appendix)** : देखा जाय तो निष्कर्षों व सुझावों के साथ ही अनुसंधान का मूल प्रतिवेदन समाप्त हो जाता है। परन्तु कुछ ऐसे प्रलेख विवरण, सरिणी, चित्र, रेखाचित्र आदि होते हैं जो कि अध्ययन की प्रमाणिकता को सिद्ध करने में सहायक होते हैं। इसलिए उन्हें प्रतिवेदन के अन्त में परिशिष्ट के रूप में प्रतिवेदन के साथ जोड़कर पाठकों के समक्ष प्रस्तुत किया जाता है। इसमें पुस्तक सूची (Bibliography) आदि को सम्मिलित किया जाता है।

20.6 शोध प्रतिवेदन की शैली :

शोधकर्ताओं से अपेक्षा की जाती है कि उसे लिखने तथा विवरणों के प्रस्तुतीकरण की शैली एवं कला का ज्ञान हो। शैली केवल निरंतर अभ्यास तथा अध्ययन द्वारा ही विकसित हो सकती है फिर भी किसी भी क्षेत्र में लेखक के लिए शुद्ध पाण्डुलिपि प्रयोग करते समय प्रत्येक शब्द तथा वाक्य के प्रयोग के प्रति ध्यान देना आवश्यक है। भाषा के प्रकाण्ड विद्वानों तथा अनुभवी लेखकों द्वारा इस विषय में सहायता लिया जा सकता है। शोध अध्ययन को लिखते समय निम्न का अनुसरण करना चाहिए :–

1. शोध प्रबंध तथा शोध विवरण उस भाषा में लिखा जाना चाहिए जिसे शोध संस्था मान्य की हो।

2. भाषा सरल, उचित तथा प्रभावशाली होना चाहिए।

3. शोध अध्ययन अभिव्यक्ति की शैली विद्वतापूर्ण, रनात्मक वस्तुनिष्ठ, संक्षिप्त तथा स्पष्ट होनी चाहिए।

4. विचारों का विकास तर्क–संगत तथा प्रस्तुतीकरण विधि पूर्वक होना चाहिए।

5. सामान्यतः भूतकाल में विवरण देना ही उत्तम होगा, जब तक कि कोई तथ्य वर्तमान परिस्थिति से सम्बन्धित न हों, अथवा उन तथ्यों के आधार पर कोई भविष्य संबंधी टिप्पणी न हो। काल से संबंधित क्रय का पूर्णतः ध्यान रखना चाहिए।

6. प्रतिवेदन में अध्ययन के दौरान आने वाली समस्याओं एवं कमियों का भी उल्लेख होना चाहिए ताकि भविष्य में अनुसंधान करने वालों का मार्गदर्शन हो सकें।

7. प्रतिवेदन में नवीन अवधारणाओं एवं सिद्धान्तों के प्रतिपादन का प्रयत्न होना चाहिए।

20.7 प्रतिवेदन के प्रकार :

प्रतिवेदन के तीन प्रकार होते हैं :–

1. व्यक्तिगत प्रतिवेदन
2. संगठनात्मक प्रतिवेदन; तथा
2. विवरणात्मक प्रतिवेदन

1. **व्यक्तिगत प्रतिवेदन :**

वह प्रतिवेदन जिसमें व्यक्ति अपने जीवन से संबंधित विभिन्न घटनाओं को क्रमवार, उल्लेखित करता है। उसे व्यक्तिगत प्रतिवेदन कहते हैं। यह कभी–कभी डायरी का रूप भी ले लेता है, अर्थात् यह प्रतिवेदन का श्रेष्ठतम रूप नहीं है।

2. **संगठनात्मक प्रतिवेदन :**

वह प्रतिवेदन जिसमें किसी संस्था के सभा, बैठक इत्यादि का विवरण दिया जाता है वह संगठनात्मक प्रतिवेदन कहलाता है। यहाँ प्रतिवेदन का लेखक संगठन के बारे में ही लिखता है अपने बारे में नहीं। जैसे किसी कंपनी का वार्षिक प्रतिवेदन।

3. **विवरणात्मक प्रतिवेदन :**

वह प्रतिवेदन जिसमें किसी यात्रा, मेले, सभा, रैली आदि का विवरण प्रस्तुत किया जाता हैं वह विवरणात्मक प्रतिवेदन कहलाता है, इसमें सत्यता और लेखक की निष्ठा का परीक्षा हो जाता है।

20.8 बोध प्रश्न :

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें –

1. एक प्रभावी प्रतिवेदन लेखन के........................ चरण होते हैं।
2. प्रतिवेदन का आरंभ.....................से होता है।
3. प्रतिवेदन एक प्रकार से............................शोध का एक लिखित विवरण होता है।
4. अध्ययन की प्रमाणिकता को सिद्ध करने के लिए...........................की आवश्यकता होती है।
5. प्रतिवेदन.......................... प्रकार के होते हैं।
6. प्रतिवेदन......................प्रकार के होते हैं।

सत्य एवं असत्य कथन छाँटिए–

1. शोध प्रतिवेदन जिसमें व्यक्ति अपने जीवन से संबंधित विभिन्न घटनाओं का क्रमवार उल्लेख करता है संगठनात्मक प्रतिवेदन कहलाता है।
2. वह प्रतिवेदन जिसमें व्यक्ति अपने जीवन से संबंधित विभिन्न घटनाओं का क्रमवार उल्लेख करता है संगठनात्मक प्रतिवेदन कहलाता है।
3. प्रतिवेदन में नवीन अवधारणाओं एवं सिद्धान्तों का प्रतिपादन होना चाहिए।
4. निर्देशन के लिए अपनायी गयी पद्धति का उल्लेख शोध प्रतिवेदन में नही होता है।
5. शोध प्रतिवेदन संचार का माध्यम ज्ञान के प्रसार का तथा एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी मे हस्तान्तरण का माध्यम है।

20.9 बोध प्रश्नों के उत्तर :

रिक्त स्तानों वाले प्रश्नों के उत्तर –

1. सात; 2. सम्पूर्ण; 3. शीर्षक; 4. परिशिष्ट; 5. तीन।

सत्य एवं असत्य वाले प्रश्नों के उत्तर –

1. सत्य; 2. असत्य; 3. सत्य; 4. असत्य; 5. सत्य।

20.10 स्व परख प्रश्न :

1. प्रतिवेदन का अर्थ एवं परिभाषा लिखिए।
2. प्रतिवेदन कितने चरणों ये पूर्ण होता है, व्याख्या कीजिए।
3. प्रतिवेदन की विषय सामग्री में भिन्न–भिन्न विषयों को सम्मिलित किया जाता है। स्पष्ट करें।
4. शोध प्रतिवेदन की शैली पर प्रकाश डालिए।
5. प्रतिवेदन की कितने प्रकार है उल्लेखित कीजिए।

/ / / /

संदर्भ ग्रन्थ सूची
(Bibliography)

1. Nakkiran, S, Nazer M and Germay F (2015), Business, Research Methods, New Delhi : Abhijeet Publication.
2. श्रीवास्तव प्रेम कुमार (2008), विपणन अनुसंधान, जयपुर : राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी।
3. गुप्ता एस0पी0 एवं गुप्ता अलका (2008); सांख्यिकीय विधियाँ, इलाहाबाद; शारदा पुस्तक भवन।
4. Sachdeva, S (2013-14), Quanitative Techniques, Agra : Lakshmi Narain Agrawal Educational Publisher.
5. Jain J.R. and S.C. (2013-14), Business statistics New Delhi, V K Global Pubication Pvt. Ltd.
6. राय पारसनाथ (1982), अनुसंधान परिचय : इलाहाबाद।
7. श्रीवास्तव डी0एन0 एवं श्रीवास्तव वी0एन0 (2010), अनुसंधान विधियाँ : साहित्य प्रकाशन आगरा।
8. शुक्ल एस0एम0 एवं सहाय एस0पी0 (2013), परिमाणात्मक तकनीकें एवं शोध पद्धतियाँ : साहित्य भवन पब्लिकेशन्स।
9. शर्मा आर0ए (2013), शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया, मेरठ : आर0 लाल बुक, डिपो।
10. Jain T.R. and other V.K. (2021-22), New Delhi, Economic statistics : V.K. Global Publications Pvt. Ltd.
11. बघेल डी0एस0 (2012–13), आगरा शोध पद्धतियाँ : एस0 बी0 पी0डी0 पब्लिशिंग हाउस, आगरा।
12. नागर कैलाश नाथ एवं मित्तल एस0ए0 (2012–13), सांख्यिकी के मूल तत्व, मेरठ : मीनाक्षी प्रकाशन मेरठ।
13. शर्मा श्याम गोपाल, जैन रवि के एवं पारिक गोविन्द (2011), नई दिल्ली शोध प्रणाली तथा सांख्यिकीय तकनीकें : आर0बी0डी0 पब्लिकेशन्स, (यूनिट ऑफ रमेश बुक डिपो), जयपुर : नई दिल्ली।
14. सिन्हा एवं गुप्ता (2013), व्यावसायिक सांख्यिकी : एस0बी0पी0, डी0 पब्लिकेशन्स आगरा।

MATHEMATICAL TABLES

CONTENTS

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	37
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969					3	7	11	14	18	21	25	28	32
							1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	12	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553							3	6	9	12	15	18	21	24	28
					1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903					3	6	9	11	14	17	20	23	26
							1931	1959	1987	2014	3	5	8	11	14	16	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	15	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430					3	5	8	10	13	15	18	20	23
							2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	19	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	1S
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

PRESENT VALUE TABLE

This table shows the discount factor for an amount at the end of *n* period at r%

Periods	Interest rates (r)									
(n)	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	.990	.980	.971	.962	.952	.943	.935	.926	.917	.909
2	.980	.961	.943	.925	.907	.890	.873	.857	.842	.826
3	.971	.942	.915	.889	.864	.840	.816	.794	.772	.751
4	.961	.924	.888	.855	.823	.792	.763	.735	.708	.683
5	.951	.906	.863	.822	.784	.747	.713	.681	.650	.621
6	.942	.888	.837	.790	.746	.705	.666	.630	.596	.564
7	.933	.871	.813	.760	.711	.665	.623	.583	.547	.513
8	.923	.853	.789	.731	.677	.627	.582	.540	.502	.467
9	.914	.837	.766	.703	.645	.592	.544	.500	.460	.424
10	.905	.820	.744	.676	.614	.558	.508	.463	.422	.386
11	.896	.804	.722	.650	.585	.527	.475	.429	.388	.350
12	.887	.788	.701	.625	.557	.497	.444	.397	.356	.319
13	.879	.773	.681	.601	.530	.469	.415	.368	.326	.290
14	.870	.758	.661	.577	.505	.442	.388	.340	.299	.263
15	.861	.743	.642	.555	.481	.417	.362	.315	.275	.239
16	.853	.728	.623	.534	.458	.394	.339	.292	.252	.218
17	.844	.714	.605	.513	.436	.371	.317	.270	.231	.198
18	.836	.700	.587	.494	.416	.350	.296	.250	.212	.180
19	.828	.686	.570	.475	.396	.331	.277	.232	.194	.164
20	.820	.673	.554	.456	.377	.312	.258	.215	.178	.149

Periods	Interest rates (r)									
(n)	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	.901	.893	.885	.877	.870	.862	.855	.847	.840	.833
2	.812	.797	.783	.769	.756	.743	.731	.718	.706	.694
3	.731	.712	.693	.675	.658	.641	.624	.609	.593	.579
4	.659	.636	.613	.592	.572	.552	.534	.516	.499	.482
5	.593	.567	.543	.519	.497	.476	.456	.437	.419	.402
6	.535	.507	.480	.456	.432	.410	.390	.370	.352	.335
7	.482	.452	.425	.400	.376	.354	.333	.314	.296	.279
8	.434	.404	.376	.351	.327	.305	.285	.266	.249	.233
9	.391	.361	.333	.308	.284	.263	.243	.225	.209	.194
10	.352	.322	.295	.270	.247	.227	.208	.191	.176	.162
11	.317	.287	.261	.237	.215	.195	.178	.162	.148	.135
12	.286	.257	.231	.208	.187	.168	.152	.137	.124	.112
13	.258	.229	.204	.182	.163	.145	.130	.116	.104	.093
14	.232	.205	.181	.160	.141	.125	.111	.099	.088	.078
15	.209	.183	.160	.140	.123	.108	.095	.084	.074	.065
16	.188	.163	.141	.123	.107	.093	.081	.071	.062	.054
17	.170	.146	.125	.108	.093	.080	.069	.060	.052	.045
18	.153	.130	.111	.095	.081	.069	.059	.051	.044	.038
19	.138	.116	.098	.083	.070	.060	.051	.043	.037	.031
20	.124	.104	.087	.073	.061	.051	.043	.037	.031	.026

CUMULATIVE PRESENT VALUE

This table shows the annuity factor for an amount at the end of each year for *n* years at r%.

Periods	Interest rates (r)									
(n)	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909
2	1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736
3	2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487
4	3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170
5	4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791
6	5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355
7	6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868
8	7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335
9	8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759
10	9.471	8.983	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145
11	10.368	9.787	9.253	8.760	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495
12	11.255	10.575	9.954	9.385	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814
13	12.134	11.348	10.635	9.986	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.103
14	13.004	12.106	11.296	10.563	9.899	9.295	8.745	8.244	7.786	7.367
15	13.865	12.849	11.938	11.118	10.380	9.712	9.108	8.559	8.061	7.606
16	14.718	13.578	12.561	11.652	10.838	10.106	9.447	8.851	8.313	7.824
17	15.562	14.292	13.166	12.166	11.274	10.477	9.763	9.122	8.544	8.022
18	16.398	14.992	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201
19	17.226	15.679	14.324	13.134	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365
20	18.046	16.351	14.878	13.590	12.462	11.470	10.594	9.818	9.129	8.514

Periods	Interest rates (r)									
(n)	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0.901	0.893	0.885	0.877	0.870	0.862	0.855	0.847	0.840	0.833
2	1.713	1.690	1.668	1.647	1.626	1.605	1.585	1.566	1.547	1.528
3	2.444	2.402	2.361	2.322	2.283	2.246	2.210	2.174	2.140	2.106
4	3.102	3.037	2.974	2.914	2.855	2.798	2.743	2.690	2.639	2.589
5	3.696	3.605	3.517	3.433	3.352	3.274	3.199	3.127	3.058	2.991
6	4.231	4.111	3.998	3.889	3.784	3.685	3.589	3.498	3.410	3.326
7	4.712	4.564	4.423	4.288	4.160	4.039	3.922	3.812	3.706	3.605
8	5.146	4.968	4.799	4.639	4.487	4.344	4.207	4.078	3.954	3.837
9	5.537	5.328	5.132	4.946	4.772	4.607	4.451	4.303	4.163	4.031
10	5.889	5.650	5.426	5.216	5.019	4.833	4.659	4.494	4.339	4.192
11	6.207	5.938	5.687	5.453	5.234	5.029	4.836	4.656	4.486	4.327
12	6.492	6.194	5.918	5.660	5.421	5.197	4.988	4.793	4.611	4.439
13	6.750	6.424	6.122	5.842	5.583	5.342	5.118	4.910	4.715	4.533
14	6.982	6.628	6.302	6.002	5.724	5.468	5.229	5.008	4.802	4.611
15	7.191	6.811	6.462	6.142	5.847	5.575	5.324	5.092	4.876	4.675
16	7.379	6.974	6.604	6.265	5.954	5.668	5.405	5.162	4.938	4.730
17	7.549	7.120	6.729	6.373	6.047	5.749	5.475	5.222	4.990	4.775
18	7.702	7.250	6.840	6.467	6.128	5.818	5.534	5.273	5.033	4.812
19	7.839	7.366	6.938	6.550	6.198	5.877	5.584	5.316	5.070	4.843
20	7.963	7.469	7.025	6.623	6.259	5.929	5.628	5.353	5.101	4.870

FUTURE VALUE TABLE

Future value of Re. 1 i.e. $(1 + r)^n$ where r = interest rate; n = number of periods until payment or receipt.

Periods (n)	Interest rates (r) 1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1.01000	1.02000	1.03000	1.04000	1.05000	1.06000	1.07000	1.08000
2	1.02010	1.04040	1.06090	1.08160	1.10250	1.12360	1.14490	1.16640
3	1.03030	1.06121	1.09273	1.12486	1.15763	1.19102	1.22504	1.25971
4	1.04060	1.08243	1.12551	1.16986	1.21551	1.26248	1.31080	1.36049
5	1.05101	1.10408	1.15927	1.21665	1.27628	1.33823	1.40255	1.46933
6	1.06152	1.12616	1.19405	1.26532	1.34010	1.41852	1.50073	1.58687
7	1.07214	1.14869	1.22987	1.31593	1.40710	1.50363	1.60578	1.71382
8	1.08286	1.17166	1.26677	1.36857	1.47746	1.59385	1.71819	1.85093
9	1.09369	1.19509	1.30477	1.42331	1.55133	1.68948	1.83846	1.99900
10	1.10462	1.21899	1.34392	1.48024	1.62889	1.79085	1.96715	2.15892
11	1.11567	1.24337	1.38423	1.53945	1.71034	1.89830	2.10485	2.33164
12	1.12683	1.26824	1.42576	1.60103	1.79586	2.01220	2.25219	2.51817
13	1.13809	1.29361	1.46853	1.66507	1.88565	2.13293	2.40985	2.71962
14	1.14947	1.31948	1.51259	1.73168	1.97993	2.26090	2.57853	2.93719
15	1.16097	1.34587	1.55797	1.80094	2.07893	2.39656	2.75903	3.17217
16	1.17258	1.37279	1.60471	1.87298	2.18287	2.54035	2.95216	3.42594
17	1.18430	1.40024	1.65285	1.94790	2.29202	2.69277	3.15882	3.70002
18	1.19615	1.42825	1.70243	2.02582	2.40662	2.85434	3.37993	3.99602
19	1.20811	1.45681	1.75351	2.10685	2.52695	3.02560	3.61653	4.31570
20	1.22019	1.48595	1.80611	2.19112	2.65330	3.20714	3.86968	4.66096
21	1.23239	1.51567	1.86029	2.27877	2.78596	3.39956	4.14056	5.03383
22	1.24472	1.54598	1.91610	2.36992	2.92526	3.60354	4.43040	5.43654
23	1.25716	1.57690	1.97359	2.46472	3.07152	3.81975	4.74053	5.87146
24	1.26973	1.60844	2.03279	2.56330	3.22510	4.04893	5.07237	6.34118
25	1.28243	1.64061	2.09378	2.66584	3.38635	4.29187	5.42743	6.84848
26	1.29526	1.67342	2.15659	2.77247	3.55567	4.54938	5.80735	7.39635
27	1.30821	1.70689	2.22129	2.88337	3.73346	4.82235	6.21387	7.98806
28	1.32129	1.74102	2.28793	2.99870	3.92013	5.11169	6.64884	8.62711
29	1.33450	1.77584	2.35657	3.11865	4.11614	5.41839	7.11426	9.31727
30	1.34785	1.81136	2.42726	3.24340	4.32194	5.74349	7.61226	10.06266
31	1.36133	1.84759	2.50008	3.37313	4.53804	6.08810	8.14511	10.86767
32	1.37494	1.88454	2.57508	3.50806	4.76494	6.45339	8.71527	11.73708
33	1.38869	1.92223	2.65234	3.64838	5.00319	6.84059	9.32534	12.67605
34	1.40258	1.96068	2.73191	3.79432	5.25335	7.25103	9.97811	13.69013
35	1.41660	1.99989	2.81386	3.94609	5.51602	7.68609	10.67658	14.78534
36	1.43077	2.03989	2.89828	4.10393	5.79182	8.14725	11.42394	15.96817
37	1.44508	2.08069	2.98523	4.26809	6.08141	8.63609	12.22362	17.24563
38	1.45953	2.12230	3.07478	4.43881	6.38548	9.15425	13.07927	18.62528
39	1.47412	2.16474	3.16703	4.61637	6.70475	9.70351	13.99482	20.11530
40	1.48886	2.20804	3.26204	4.80102	7.03999	10.28572	14.97446	21.72452

FUTURE VALUE OF RE. 1 PER PERIOD PAYMENT

Future value of Re. 1 i.e. $\left|(1+r)^n - 1\right| / r$ where r = interest rate; n = number of periods until payment or receipt.

Periods	Interest rates (r)							
(n)	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.01000	2.02000	2.03000	2.04000	2.05000	2.06000	2.07000	2.08000
3	3.03010	3.06040	3.09090	3.12160	3.15250	3.18360	3.21490	3.24640
4	4.06040	4.12161	4.18363	4.24646	4.31013	4.37462	4.43994	4.50611
5	5.10101	5.20404	5.30914	5.41632	5.52563	5.63709	5.75074	5.86660
6	6.15202	6.30812	6.46841	6.63298	6.80191	6.97532	7.15329	7.33593
7	7.21354	7.43428	7.66246	7.89829	8.14201	8.39384	8.65402	8.92280
8	8.28567	8.58297	8.89234	9.21423	9.54911	9.89747	10.25980	10.63663
9	9.36853	9.75463	10.15911	10.58280	11.02656	11.49132	11.97799	12.48756
10	10.46221	10.94972	11.46388	12.00611	12.57789	13.18079	13.81645	14.48656
11	11.56683	12.16872	12.80780	13.48635	14.20679	14.97164	15.78360	16.64549
12	12.68250	13.41209	14.19203	15.02581	15.91713	16.86994	17.88845	18.97713
13	13.80933	14.68033	15.61779	16.62684	17.71298	18.88214	20.14064	21.49530
14	14.94742	15.97394	17.08632	18.29191	19.59863	21.01507	22.55049	24.21492
15	16.09690	17.29342	18.59891	20.02359	21.57856	23.27597	25.12902	27.15211
16	17.25786	18.63929	20.15688	21.82453	23.65749	25.67253	27.88805	30.32428
17	18.43044	20.01207	21.76159	23.69751	25.84037	28.21288	30.84022	33.75023
18	19.61475	21.41231	23.41444	25.64541	28.13238	30.90565	33.99903	37.45024
19	20.81090	22.84056	25.11687	27.67123	30.53900	33.75999	37.37896	41.44626
20	22.01900	24.29737	26.87037	29.77808	33.06595	36.78559	40.99549	45.76196
21	23.23919	25.78332	28.67649	31.96920	35.71925	39.99273	44.86518	50.42292
22	24.47159	27.29898	30.53678	34.24797	38.50521	43.39229	49.00574	55.45676
23	25.71630	28.84496	32.45288	36.61789	41.43048	46.99583	53.43614	60.89330
24	26.97346	30.42186	34.42647	39.08260	44.50200	50.81558	58.17667	66.76476
25	28.24320	32.03030	36.45926	41.64591	47.72710	54.86451	63.24904	73.10594
26	29.52563	33.67091	38.55304	44.31174	51.11345	59.15638	68.67647	79.95442
27	30.82089	35.34432	40.70963	47.08421	54.66913	63.70577	74.48382	87.35077
28	32.12910	37.05121	42.93092	49.96758	58.40258	68.52811	80.69769	95.33883
29	33.45039	38.79223	45.21885	52.96629	62.32271	73.63980	87.34653	103.96594
30	34.78489	40.56808	47.57542	56.08494	66.43885	79.05819	94.46079	113.28321
31	36.13274	42.37944	50.00268	59.32834	70.76079	84.80168	102.07304	123.34587
32	37.49407	44.22703	52.50276	62.70147	75.29883	90.88978	110.21815	134.21354
33	38.86901	46.11157	55.07784	66.20953	80.06377	97.34316	118.93343	145.95062
34	40.25770	48.03380	57.73018	69.85791	85.06696	104.18375	128.25876	158.62667
35	41.66028	49.99448	60.46208	73.65222	90.32031	111.43478	138.23688	172.31680
36	43.07688	51.99437	63.27594	77.59831	95.83632	119.12087	148.91346	187.10215
37	44.50765	54.03425	66.17422	81.70225	101.62814	127.26812	160.33740	203.07032
38	45.95272	56.11494	69.15945	85.97034	107.70955	135.90421	172.56102	220.31595
39	47.41225	58.23724	72.23423	90.40915	114.09502	145.05846	185.64029	238.94122
40	48.88637	60.40198	75.40126	95.02552	120.79977	154.76197	199.63511	259.05652

POISSON DISTRIBUTION

$$P^{(x)} = \frac{e^{-h}\lambda^{x}}{x!}$$

For a given value of λ an entry indicates the probability of a specific value of x.

	λ									
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000
1	0.3679	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.1839	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.0613	0.1804	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0153	0.0902	0.1680	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0573	0.0337	0.0189
5	0.0031	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0005	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0001	0.0034	0.0216	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0000	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9		0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10		0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11			0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12			0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0263	0.0481	0.0728	0.0948
13			0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14				0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15				0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16					0.0000	0.0003	0.0014	0.0045	0.0109	0.0217
17						0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18						0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19							0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20							0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21								0.0001	0.0003	0.0009
22								0.0000	0.0001	0.0004
23									0.0000	0.0002
24										0.0001
25										0.0000

POISSON DISTRIBUTION

	λ									
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0037	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0102	0.0053	0.0027	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0224	0.0127	0.0070	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
6	0.0411	0.0255	0.0152	0.0087	0.0048	0.0026	0.0014	0.0007	0.0004	0.0002
7	0.0646	0.0437	0.0281	0.0174	0.0104	0.0060	0.0034	0.0019	0.0010	0.0005
8	0.0888	0.0655	0.0457	0.0304	0.0194	0.0120	0.0072	0.0042	0.0024	0.0013
9	0.1085	0.0874	0.0661	0.0473	0.0324	0.0213	0.0135	0.0083	0.0050	0.0029
10	0.1194	0.1048	0.0859	0.0663	0.0486	0.0341	0.0230	0.0150	0.0095	0.0058
11	0.1194	0.1144	0.1015	0.0844	0.0663	0.0496	0.0355	0.0245	0.0164	0.0106
12	0.1094	0.1144	0.1099	0.0984	0.0829	0.0661	0.0504	0.0368	0.0259	0.0176
13	0.0926	0.1056	0.1099	0.1060	0.0956	0.0814	0.0658	0.0509	0.0378	0.0271
14	0.0728	0.0905	0.1021	0.1060	0.1024	0.0930	0.0800	0.0655	0.0514	0.0387
15	0.0534	0.0724	0.0885	0.0989	0.1024	0.0992	0.0906	0.0786	0.0650	0.0516
16	0.0367	0.0543	0.0719	0.0866	0.0960	0.0992	0.0963	0.0884	0.0772	0.0646
17	0.0237	0.0383	0.0550	0.0713	0.0847	0.0934	0.0963	0.0936	0.0863	0.0760
18	0.0145	0.0255	0.0397	0.0554	0.0706	0.0830	0.0909	0.0936	0.0911	0.0844
19	0.0084	0.0161	0.0272	0.0409	0.0557	0.0699	0.0814	0.0887	0.0911	0.0888
20	0.0046	0.0097	0.0177	0.0286	0.0418	0.0559	0.0692	0.0798	0.0866	0.0888
21	0.0024	0.0055	0.0109	0.0191	0.0299	0.0426	0.0560	0.0684	0.0783	0.0846
22	0.0012	0.0030	0.0065	0.0121	0.0204	0.0310	0.0433	0.0560	0.0676	0.0769
23	0.0006	0.0016	0.0037	0.0074	0.0133	0.0216	0.0320	0.0438	0.0559	0.0669
24	0.0003	0.0008	0.0020	0.0043	0.0083	0.0144	0.0226	0.0328	0.0442	0.0557
25	0.0001	0.0004	0.0010	0.0024	0.0050	0.0092	0.0154	0.0237	0.0336	0.0446

CUMULATIVE POISSON DISTRIBUTION

For a given value of λ an entry indicates the probability of a equal to or less than the specific value of x

For example if λ = 5, the probability of x being equal to or less than 6 is 0.7622 (in bold below).

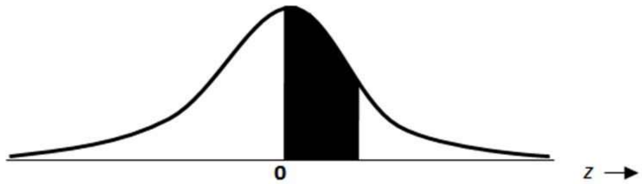
	λ									
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000
1	0.7358	0.4060	0.1991	0.0916	0.0404	0.0174	0.0073	0.0030	0.0012	0.0005
2	0.9197	0.6767	0.4232	0.2381	0.1247	0.0620	0.0296	0.0138	0.0062	0.0028
3	0.9810	0.8571	0.6472	0.4335	0.2650	0.1512	0.0818	0.0424	0.0212	0.0103
4	0.9963	0.9473	0.8153	0.6288	0.4405	0.2851	0.1730	0.0996	0.0550	0.0293
5	0.9994	0.9834	0.9161	0.7851	0.6160	0.4457	0.3007	0.1912	0.1157	0.0671
6	0.9999	0.9955	0.9665	0.8893	0.7622	0.6063	0.4497	0.3134	0.2068	0.1301
7	1.0000	0.9989	0.9881	0.9489	0.8666	0.7440	0.5987	0.4530	0.3239	0.2202
8		0.9998	0.9962	0.9786	0.9319	0.8472	0.7291	0.5925	0.4557	0.3328
9		1.0000	0.9989	0.9919	0.9682	0.9161	0.8305	0.7166	0.5874	0.4579
10			0.9997	0.9972	0.9863	0.9574	0.9015	0.8159	0.7060	0.5830
11			0.9999	0.9991	0.9945	0.9799	0.9467	0.8881	0.8030	0.6968
12			1.0000	0.9997	0.9980	0.9912	0.9730	0.9362	0.8758	0.7916
13				0.9999	0.9993	0.9964	0.9872	0.9658	0.9261	0.8645
14				1.0000	0.9998	0.9986	0.9943	0.9827	0.9585	0.9165
15					0.9999	0.9995	0.9976	0.9918	0.9780	0.9513
16					1.0000	0.9998	0.9990	0.9963	0.9889	0.9730
17						0.9999	0.9996	0.9984	0.9947	0.9857
18						1.0000	0.9999	0.9993	0.9976	0.9928
19							1.0000	0.9997	0.9989	0.9965
20								0.9999	0.9996	0.9984
21								1.0000	0.9998	0.9993
22									0.9999	0.9997
23									1.0000	0.9999
24										1.0000

CUMULATIVE POISSON DISTRIBUTION

	λ									
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867	0.2148	0.1565
16	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920	0.2211
17	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695	0.3814
19	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255	0.6437
22	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317	0.8933	0.8432
25	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269	0.8878

NORMAL DISTRIBUTION

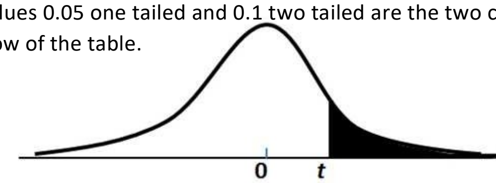
This table gives the area under the normal curve between the mean and a point Z standard deviations above the mean. The corresponding area for deviations below the mean can be found by symmetry.



$z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4762	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.49903	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.49931	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.49952	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.49966	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998

T DISTRIBUTION TABLE

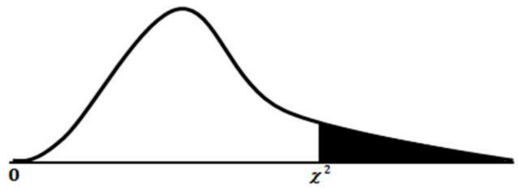
The critical values of t distribution are calculated according to the probabilities of two alpha values and the degrees of freedom. The Alpha(α) values 0.05 one tailed and 0.1 two tailed are the two columns to be compared with the degrees of freedom in the row of the table.



α (1 tail) α (2 tail) df	0.05 0.10	0.025 0.05	0.01 0.02	0.005 0.01	0.0025 0.005	0.001 0.002	0.0005 0.001
1	6.3138	12.7065	31.8193	63.6551	127.3447	318.4930	636.0450
2	2.9200	4.3026	6.9646	9.9247	14.0887	22.3276	31.5989
3	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408	7.4534	10.2145	12.9242
4	2.1319	2.7764	3.7470	4.6041	5.5976	7.1732	8.6103
5	2.0150	2.5706	3.3650	4.0322	4.7734	5.8934	6.8688
6	1.9432	2.4469	3.1426	3.7074	4.3168	5.2076	5.9589
7	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.0294	4.7852	5.4079
8	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	3.8325	4.5008	5.0414
9	1.8331	2.2621	2.8214	3.2498	3.6896	4.2969	4.7809
10	1.8124	2.2282	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869
11	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	3.4966	4.0247	4.4369
12	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.4284	3.9296	4.3178
13	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	3.8520	4.2208
14	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	3.7874	4.1404
15	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.7328	4.0728
16	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.2520	3.6861	4.0150
17	1.7396	2.1098	2.5669	2.8983	3.2224	3.6458	3.9651
18	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.1966	3.6105	3.9216
19	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834
20	1.7247	2.0860	2.5280	2.8454	3.1534	3.5518	3.8495
21	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.1352	3.5272	3.8193
22	1.7172	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.5050	3.7921
23	1.7139	2.0686	2.4998	2.8073	3.1040	3.4850	3.7676
24	1.7109	2.0639	2.4922	2.7970	3.0905	3.4668	3.7454
25	1.7081	2.0596	2.4851	2.7874	3.0782	3.4502	3.7251
26	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.0669	3.4350	3.7067
27	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.4211	3.6896
28	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.0469	3.4082	3.6739
29	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.0380	3.3962	3.6594
30	1.6973	2.0423	2.4572	2.7500	3.0298	3.3852	3.6459
31	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440	3.0221	3.3749	3.6334
32	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385	3.0150	3.3653	3.6218
33	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333	3.0082	3.3563	3.6109
34	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.0019	3.3479	3.6008
35	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	2.9961	3.3400	3.5912
36	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	2.9905	3.3326	3.5822
37	1.6871	2.0262	2.4315	2.7154	2.9853	3.3256	3.5737
38	1.6859	2.0244	2.4286	2.7115	2.9803	3.3190	3.5657
39	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079	2.9756	3.3128	3.5581
40	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	2.9712	3.3069	3.5510

CHI-SQUARE PROBABILITIES

The areas given across the top are the areas to the right of the critical value. To look up an area on the left, subtract it from one, and then look it up (i.e.: 0.05 on the left is 0.95 on the right)



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_{\alpha}$

df	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.050	0.025	0.01	0.005
1	---	---	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

BINOMIAL
COEFFICIENTS

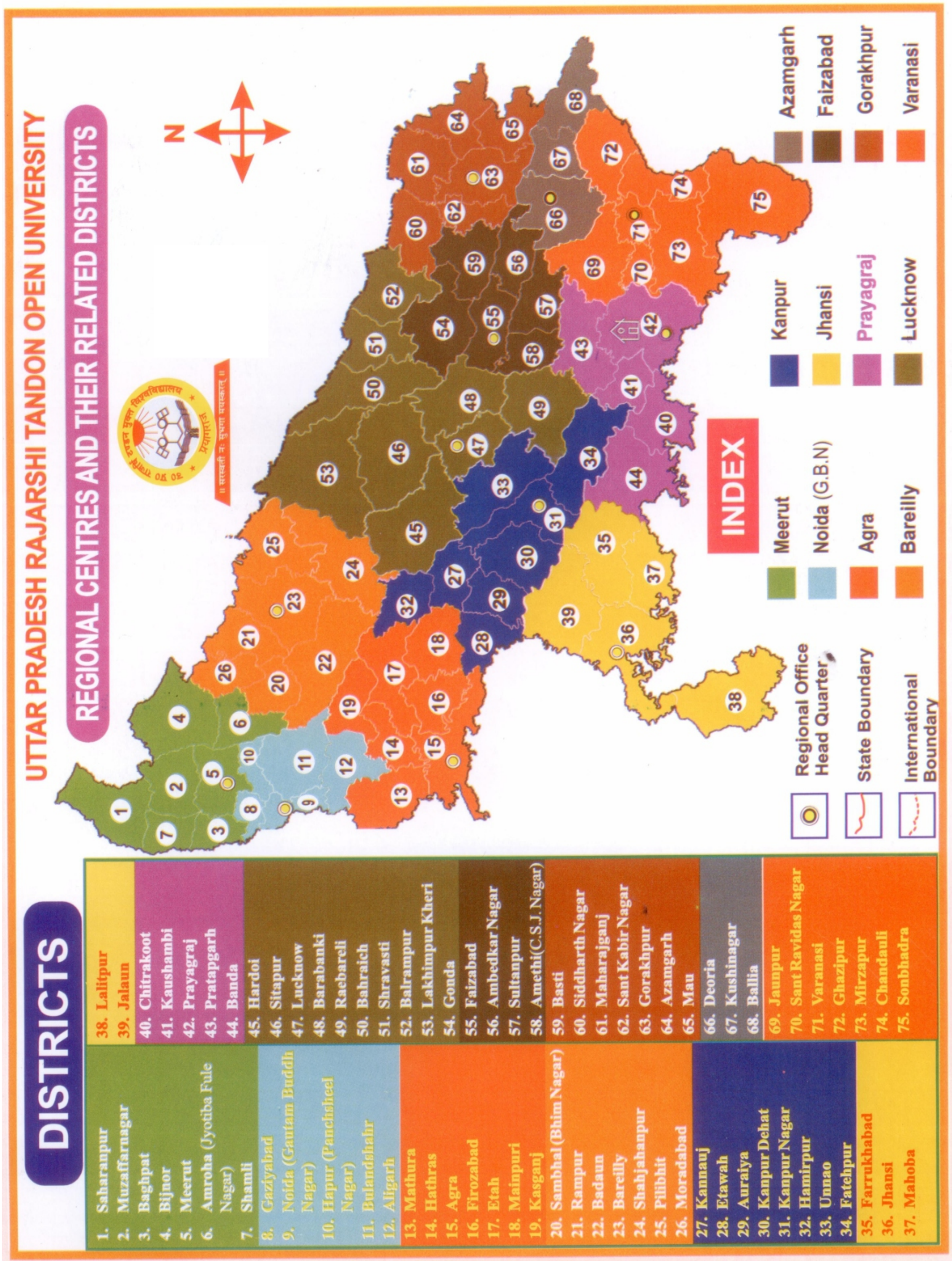
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n=1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

Example: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

NOTE

<u>NOTE</u>

NOTE



शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, प्रयागराज – 211013

"अपने भाइयों को मै सचेत करना चाहता हूँ कि मोम न बनें और आसानी से पिघल न जायें। छोटी-छोटी सी बातों के लिए ही हम अपनी भाषा को या संस्कृति को न बदलें।"

राजर्षि पुरूषोत्तमदास टंडन

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

प्रयागराज

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, प्रयागराज - 211013

www.uprtou.ac.in

टोल फ्री नम्बर- 1800-120-111-333