उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-01
कलन

खंड
3
समाकलन गणित

इकाई 10
निश्चित समाकल 5

इकाई 11
समाकलन की विधियाँ 29

इकाई 12
समानयन सूत्र 70

इकाई 13
परिमेय तथा अपरिमेय फलनों का समाकलन 86

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. जे. एन. कपूर *(अध्यक्ष)*
जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. इज़हार हुसन
गणित विभाग
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़

प्रो. डी.एन. मिश्र
वैज्ञानिक एवं औद्योगिक
अनुसंधान परिषद्,
नई दिल्ली

प्रो. एम. एस. नरसिंहम
टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च,
बम्बई

प्रो. (श्रीमती) ए.आर. सिंघल
गणित विभाग
मेरठ विश्वविद्यालय

प्रो. एम.पी. सिंह,
सेंटर फॉर एटमॉस्फिरिक साइंसेज
आई.आई.टी., दिल्ली

पाठ निर्माण दल

प्रो. जे.एन. कपूर *(संपादक)*
जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. वी. कण्णन
स्कूल ऑफ मैथेमैटिक्स एण्ड
सी.आर.एस. सेंट्रल यूनिवर्सिटी
हैदराबाद

प्रो. ए.आर. सिंघल
गणित विभाग
मेरठ विश्वविद्यालय

डॉ. माणिक पटवर्धन
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ. परवीन सिंक्लेयर
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

समन्वय समिति

प्रो. बी.एस. शर्मा
सम-कुलपति (शैक्षिक)
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो. शक्ति आर. अहमद
निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ. एस.एन. चतुर्वेदी
निदेशक, क्षेत्रीय सेवाएँ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो. जी. सांब शिव राव
भाषा संपादक,
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ. माणिक पटवर्धन (पाठ्यक्रम समन्वयकर्त्री)
विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ. ए. डब्ल्यू. खान
निदेशक, संचार प्रभाग
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो. बी.एन. कौल
निदेशक, शिक्षा विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

अनुवाद

डॉ. आशा माथुर
गणित विभाग
लेडी श्रीराम कॉलेज
दिल्ली

श्री एच.पी. सिन्हा
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली
आयोग,
नई दिल्ली

संकाय सदस्य
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ. माणिक पटवर्धन
प्रो. वी.रा. जगन्नाथन

सामग्री निर्माण

श्री बालकृष्ण सेल्वराज
कुलसचिव
मुद्रण एवं प्रकाशन प्रभाग
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

संशोधित संस्करण, नवम्बर 1991

© *इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय,* 1990

ISBN-81-7091-430-2

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस कार्य का कोई भी अंश इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के अनुमति से पुनः मुद्रित। उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से डॉ0 आर0 के0 पाण्डेय, कुलसचिव द्वारा पुनः मुद्रित एवं प्रकाशित, फरवरी 2017
मुद्रक : बी0 आर0 कम्प्यूटर्स, बैहराना, इलाहाबाद

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

खंड 3 प्रस्तावना

इस खंड में समाकलन के बारे में चर्चा की गई है। यदि आप कलन की किसी पुस्तक को देखें तो आप पाएंगे कि पुस्तक के पहले आधे भाग में अवकलन करने पर और बाद के आधे भाग में समाकलन पर चर्चा की गई होती है। इससे यह आभास होता है कि पहले अवकलन का और बाद में समाकलन का आविष्कार हुआ होगा। परंतु वास्तविकता ठीक इसकी उल्टी है। क्योंकि जहां गणित चौथी शताब्दी (ई.पू.) में ही समाकलन के किसी न किसी रूप से परिचित हो चुके थे वहां अवकलन का आविष्कार सत्रहवीं शताब्दी में हुआ था। कलन के मूलभूत प्रमेय को, जो अवकलन और समाकलन के प्रतिलोम संबंध को स्थापित करता है, सत्रहवीं शताब्दी के अंत में सिद्ध किया गया था। हम इस प्रमेय का अध्ययन इकाई 10 में करेंगे। इकाई 11, 12 और 13 में समाकलन की विधियों से आपको परिचित कराया जाएगा। आपको चाहिए कि इन इकाइयों को पढ़ने के साथ-साथ आप दिये हुए प्रश्न करते जाएं, क्योंकि "व्यवहार व्यक्ति को परिपूर्ण बनाता है"। यह कथन समाकलन के प्रश्नों पर अक्षरशः लागू होता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

संकेत

1	$L(P,f)$	निम्न गुणन योग
2	$\boldsymbol{P}$	एक दिये हुए अंतराल के सभी विभाजनों का समुच्चय
3	$U(P,f)$	उपरि गुणन योग
4	$\boldsymbol{u}$	$\{U(P,f) : P \in \boldsymbol{P}\}$
5	$\boldsymbol{u}$	$\{L(P,f) : P \in \boldsymbol{P}\}$
6	$\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx$	[a, b] में f का उपरि समाकल
7	$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$	[a, b] में f का निम्न समाकल
8	$\int_a^b f(x)\,dx$	a से b तक x के सापेक्ष f का समाकल
9	$\int f(x)\,dx$	x के सापेक्ष f का समाकल
10	$f(x)]_a^b$	$f(b) - f(a)$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इकाई 10 निश्चित समाकल

इकाई की रूपरेखा

10.1 प्रस्तावना उद्देश्य	5
10.2 प्रारंभिक जानकारी संवृत अंतराल के विभाजन उपरि और निम्न योगफल उपरि और निम्न समाकल	6
10.3 निश्चित समाकल	14
10.4 कलन का मूलभूत प्रमेय	20
10.5 सारांश	25
10.6 हल और उत्तर	26
10.7 शब्दावली	28

10.1 प्रस्तावना

खंड 1 की इकाई 3 में हम यह देख चुके हैं कि अवकलज की संकल्पना को प्रेरित करने वाली एक समस्या ज्यामितीय समस्या थी, अर्थात् वक्र के एक बिन्दु पर स्पर्शरेखा ज्ञात करने से संबंधित समस्या। समाकलन की संकल्पना को प्रेरित करने वाली समस्या भी एक ज्यामितीय समस्या थी, अर्थात् वक्रों से परिबद्ध समतल प्रदेशों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या। हाल ही में खोजी गई मिस्र की कुछ पांडुलिपियों को देखने से पता चलता है कि त्रिभुजों और आयतों के क्षेत्रफल ज्ञात करने से संबंधित सूत्रों की जानकारी 1800 ई. पू. में थी। इन सूत्रों की सहायता से सरल रेखा खंडों से परिबद्ध आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है। पर उस समय वक्रों से परिबद्ध आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने की कोई विधि नहीं थी। इन आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि की जानकारी बहुत बाद में चलकर हमें प्राप्त हुई।

तीसरी शताब्दी (ई. पू.) में आर्कमिडीज वृत्त के क्षेत्रफल से संबंधित सूत्र को स्थूल रूप में सिद्ध करने में सफल रहे। उनके हल में वर्तमान समाकलन गणित (integral calculus) के कुछ बीज मिलते हैं। परंतु सत्रहवीं शताब्दी में जाकर ही न्यूटन और लाइब्नीत्ज़, आर्कमिडीज की इस विधि को व्यापक रूप दे सके और अवकल गणित तथा समाकलन गणित के बीच संबंध स्थापित कर सके। इस इकाई में हम फलन के निश्चित समाकल की जो परिभाषा देंगे, उसे पहले पहल 1954 में रीमान ने प्रस्तुत किया था। हम अपनी अगली इकाई (इकाई 11) में समाकलन की विभिन्न विधियों से आपको परिचित कराएंगे।

संभव है कि आपने पहले भी समाकलन का अध्ययन किया होगा। परंतु इस इकाई में हम एक नये दृष्टिकोण से समाकलन का अध्ययन करेंगे। हमें विश्वास है कि इस इकाई का अध्ययन पूरा कर लेने पर आप समाकलन संबंधी अपने पिछले ज्ञान का मेल इस नये दृष्टिकोण के साथ कर सकेंगे।

उद्देश्य

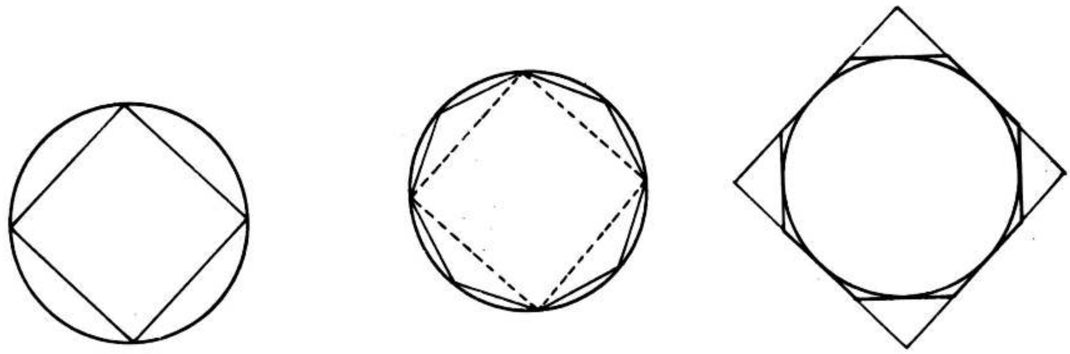
इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप

- $[a, b]$ पर परिभाषित कुछ सरल फलनों के उपरि और निम्न योगफलों को $[a, b]$ के एक विभाजन के संगत परिभाषित और परिकलित कर सकेंगे,
- किसी फलन के उपरि और निम्न समाकलनों को परिभाषित कर सकेंगे,
- एक दिए हुए फलन के निश्चित समाकल को परिभाषित कर सकेंगे और यह जांच कर सकेंगे कि दिया हुआ फलन समाकलनीय है कि नहीं,
- कलन के मूलभूत प्रमेय का कथन दे सकेंगे और उसे सिद्ध कर सकेंगे,
- समाकलनीय फलन का निश्चित समाकल परिकलित करने के लिए मूलभूत प्रमेय का प्रयोग कर सकेंगे।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

10.2 प्रारंभिक जानकारी

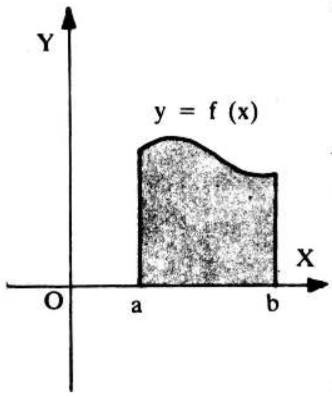
प्रस्तावना में हम इस बात का उल्लेख कर चुके हैं कि आर्कीमिडीज ने वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र मालूम कर लिया था। इसके लिए उसने वृत्त को एक अंतर्गत सम बहुभुज के सन्निकट माना (देखिए चित्र 1 (क))।



(क) (ख) (ग)

चित्र 1

चित्र 1 (ख) से हम यह देख सकते हैं कि बहुभुज की भुजाओं की संख्या में वृद्धि करने पर सन्निकट और अधिक उत्तम होता जाता है। आर्कीमिडीज ने अनेक परिगत बहुभुजों से वृत्त के क्षेत्रफल का सन्निकट मान ज्ञात करने का भी प्रयास किया था, जैसा कि चित्र 1 (ग) में दिखाया गया है। इस तरह हम देखते हैं कि वृत्त को अंतर्गत बहुभुज और परिगत बहुभुज के बीच दबाया गया था।



चित्र 2

चित्र 2 में दिखाए गए छायांकित प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम इसी प्रकार की प्रक्रिया अपनाएंगे। इसके लिए पहले हम विभाजन की संकल्पना से प्रारंभ करेंगे।

10.2.1 संवृत अंतराल के विभाजन

आइए हम संवृत अंतराल $[a, b] \subset \mathbf{R}$ को लें। $[a, b]$ के विभाजन की हम निम्नलिखित परिभाषा देते हैं।

परिभाषा 1 : मान लीजिए $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, $[a, b]$ में ऐसी संख्याएं हैं ताकि
$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.
तब क्रमित समुच्चय $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ को $[a, b]$ का **विभाजन** (partition) कहा जाता है।

क्रमित समुच्चय वह समुच्चय होता है जिसके अवयवों का क्रम सुनिश्चित होता है।

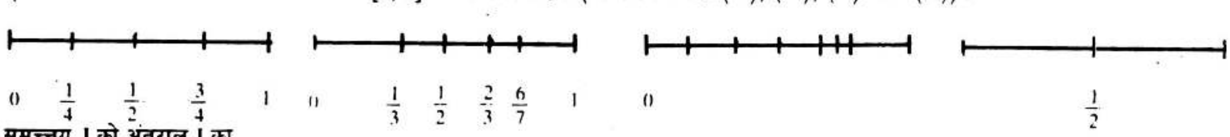
उदाहरण 1 : $P_1 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ और

$P_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}, 1\}$ दोनों ही $[0, 1]$ के विभाजन हैं और

$P_1 \cup P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1\}$ और

$P_1 \cap P_2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$,

भी $[0, 1]$ के विभाजन हैं। (देखिये चित्र 3 (क), (ख), (ग) और (घ))।



चित्र 3

समुच्चय J को अंतराल I का उप-अंतराल कहा जाता है यदि
i) J एक अंतराल हो, और
ii) $J \subseteq I$

$[a, b]$ का विभाजन $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $[a, b]$ को संवृत उप-अंतरालों (sub-intervals) $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ में विभाजित करता है। दिये हुए $n + 1$ विभाजन बिंदु इन उप-अंतरालों के सिरे के बिंदु होते हैं। अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ को विभाजन का i वां उप-अंतराल कहा

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

जाता है। i वें उप-अंतराल की लंबाई, जिसे Δx_i से प्रकट किया जाता है, यह होती है : $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. इसलिए

Δ को 'डेल्टा' पढ़ा जाता है।

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

यदि विभाजन P के प्रत्येक उप-अंतराल की लंबाई समान हो, तो P को **सम विभाजन**(regular partition) कहा जाता है। अर्थात् यदि P सम विभाजन है, तो

$x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_n - x_{n-1}$ सभी बराबर होते हैं। ऐसी स्थिति में [a, b] की लंबाई, अर्थात् b − a को n बराबर-बराबर भागों में बांटा जाता है, और

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}.$$

इस तरह [a, b] के सम विभाजन को $\{a, a+h, a+2h, ..., a+nh\}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहां $a + nh = b$.

हम इस विभाजन को $\{a + ih\}_{i=1}^{n}$ से प्रकट करेंगे।

$P = \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\}$ के लिए $\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. यदि आप Δx_3, Δx_4, Δx_5 और Δx_6 का परिकलन करें तो पाएंगे कि P, [1, 4] का एक समविभाजन है।

E E 1) उदाहरण 1 देखिये। P_1, P_2, $P_1 \cup P_2$ और $P_1 \cap P_2$ में कौन-कौन से सम विभाजन हैं? P_1 और P_2 में तीसरे उप-अंतरालों की लंबाइयां ज्ञात कीजिए।

E E 2) निम्नलिखित अंतरालों में से प्रत्येक का सम विभाजन लिखिये।

(क) [0, 2], 7 विभाजन बिंदुओं सहित

(ख) [2, 9], 11 विभाजन बिंदुओं सहित।

परिभाषा 2 : [a, b] के दो विभाजन P_1 और P_2 दिए हुए हों, तो हम कहते हैं कि P_2, P_1 का अधिशोधन (refinement) है **(या P_2, P_1 से अधिक अधिशोधित है)** यदि $P_2 \supset P_1$.

दूसरे शब्दों में P_2, P_1 का अधिशोधन होता है, यदि P_2 का प्रत्येक उप-अंतराल P_1 के किसी उप-अंतराल में आविष्ट हो।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित विभाजन लीजिये :

$$P_1 = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$$

$$P_2 = \{1, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{19}{10}, 2\}$$

$$P_3 = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\}$$

P_1 और P_2 दोनों ही P_3 से अधिक अधिशोधित हैं, क्योंकि $P_1 \supset P_3$ और $P_2 \supset P_3$. फिर भी, न तो P_1, P_2 का अधिशोधन है और न ही P_2, P_1 का अधिशोधन है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

यदि P_1 और P_2, $[a, b]$ के विभाजन हों तो परिभाषा 2 के अनुसार

i) $P_1 \cup P_2$, P_1 और P_2 दोनों का अधिशोधन है।

ii) P_1 और P_2 दोनों ही $P_1 \cap P_2$ से अधिक अधिशोधित हैं।

अब, मान लीजिए कि प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए हम P_n को निम्न रूप में परिभाषित करते हैं :

$$P_n = \left\{a + i \frac{b-a}{2^n}\right\}_{i=0}^{2^n}$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि P के $2^n + 1$ अवयव हैं। हम यह भी देख सकते हैं कि P एक सम विभाजन है, जिसके प्रत्येक उप-अंतराल की लंबाई $= \frac{b-a}{2^n}$. अब $\frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2^n}\right)$.

इसका अर्थ यह है कि P_{n+1} के संगत उप-अंतरालों की लंबाई P_n के संगत उप-अंतरालों की लंबाई की आधी होती है। हम यह भी देख सकते हैं कि $P_{n+1} \supset P_n$. दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि P_{n+1}, P_n से अधिक अधिशोधित है (E 3) भी देखिये)।

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$= a + i\frac{b-a}{2^n} - \left\{a + (i-1)\frac{b-a}{2^n}\right\}$

$= \frac{b-a}{2^n}$

इस तरह हमने $[a, b]$ के विभाजनों के अनुक्रम $\{P_n\}$ को परिभाषित किया है, जिससे कि सभी n के लिए P_{n+1}, P_n का एक अधिशोधन हो। ऐसे अनुक्रम $\{P_n\}$ को $[a, b]$ के **विभाजनों के अधिशोधनों का अनुक्रम** कहा जाता है।

E E 3) ऊपर परिभाषित किए गए विभाजनों के अनुक्रम $\{P_n\}$ में $P_1 = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$

(क) P_2 और P_3 ज्ञात कीजिए।

(ख) सत्यापित कीजिए कि $P_3 \supset P_2 \supset P_1$

(ग) इन विभाजनों में से प्रत्येक के उप-अंतरालों की लंबाइयां ज्ञात कीजिए।

E E 4) मान लीजिए $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $[a, b]$ का विभाजन-अनुक्रम है। मान लीजिए $P^*_1 = P_1, P^*_2 = P^*_1 \cup P_2, P^*_3 = P^*_2 \cup P_3$, और व्यापक रूप में $P^*_n = P_n \cup P^*_{n-1}$ दिखाइये कि $\{P^*_n\}_{n=1}^{\infty}$, $[a, b]$ के विभाजनों का अधिशोधन अनुक्रम है।

10.2.2 उपरि और निम्न गुणन योग

हम समझते हैं कि अब तक आप विभाजनों से अच्छी तरह से परिचित हो चुके होंगे। अब हम गुणन योग (product sum) की संकल्पना पर विचार करेंगे। इस की सहायता से हम अगले भाग में निश्चित समाकलन से संबंधित और अधिक जटिल संकल्पना की चर्चा कर सकेंगे।

मान लीजिए $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ एक परिबद्ध फलन है, और मान लीजिए $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, $[a, b]$ का एक विभाजन है।

अब किसी उप-अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ के लिए समुच्चय $S_i = \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ लीजिए। क्योंकि f

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

एक परिबद्ध फलन है, इसलिए S_i, **R** का एक परिबद्ध उप-समुच्चय होगा। इसका अर्थ यह हुआ कि इसका एक उच्चक (supremum) (या न्यूनतम उपरि परिबंध) और निम्नक (infimum) या महत्तम निम्न परिबंध है। इसे हम इस प्रकार लिखते हैं :

$M_i = \text{Sup } S_i = \text{Sup }\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ और

$m_i = \inf S_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

अब हम उपरि गुणन योग $U(P, f)$ और निम्न गुणन योग $L(P, f)$ को

$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, $L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ ... (1) से परिभाषित करते हैं। आप संकेत Σ से अवश्य परिचित हो चुके होंगे। आइए अब हम (1) को और स्पष्ट रूप में व्यक्त करें।

$U(P, f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + ... + M_n(x_n - x_{n-1})$ और
$L(P, f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(x_n - x_{n-1})$.

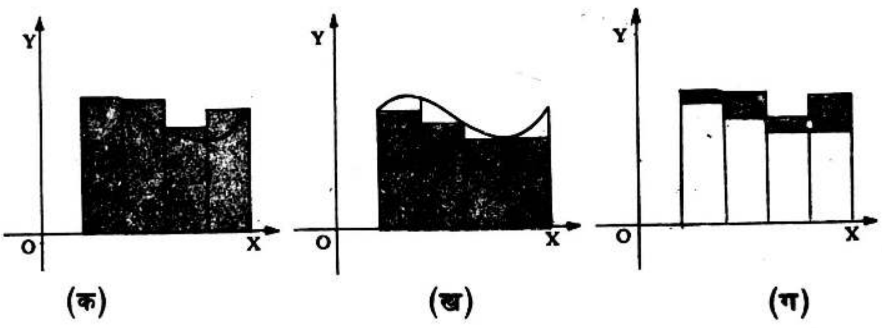
हम इकाई 1 में वास्तविक संख्याओं के परिबद्ध समुच्चय के न्यूनतम उपरि परिबंध (उच्चक) और महत्तम निम्न परिबंध (निम्नक) को परिभाषित कर चुके हैं।

इस तरह, $U(P, f)$को प्राप्त करने के लिए हमने प्रत्येक उप-अंतराल के उच्चक को उस उप-अंतराल की लंबाई से गुणा किया है, और इन सभी गुणनफलों का योग लिया है। इसी प्रकार, $L(P, f)$ प्राप्त करने के लिए हमने प्रत्येक उप-अंतराल के निम्नक को उस उप-अंतराल की लंबाई से गुणा करके इन सभी गुणनफलों का योग लिया है। $U(P, f)$ और $L(P, f)$ को गणितज्ञ जॉर्ज फ्रेड्रिक बर्नार्ड रीमान के नाम पर **रीमान योग** भी कहा जाता है। रीमान ने निश्चित समाकल की जो परिभाषा दी थी वह आज भी अति सुविधाजनक और उपयोगी जानी जाती है।

जी. एफ. बी. रीमान (1826-1866)

इस इकाई के प्रारंभ में हमने चित्र 2 के छायांकित प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात करने की बात कही थी। तब प्रश्न उठता है कि इस बीच में हम विभाजन, $U(P, f)$ और $L(P, f)$ की बात क्यों करने लगे। चित्र 4 को देखने से आपको पता चल जाएगा कि अपने लक्ष्य को प्राप्त करने के लिए हमने यह मार्ग क्यों चुना है।

चित्र 4 (क) और 4 (ख) में $M_i \Delta x_i$ और $m_i \Delta x_i$ को ज्यामितीय रूप से आधार Δx_i और ऊंचाई क्रमशः M_i और m_i वाले आयतों के क्षेत्रफल के रूप में दिखाया गया है।



(क) (ख) (ग)

चित्र 4

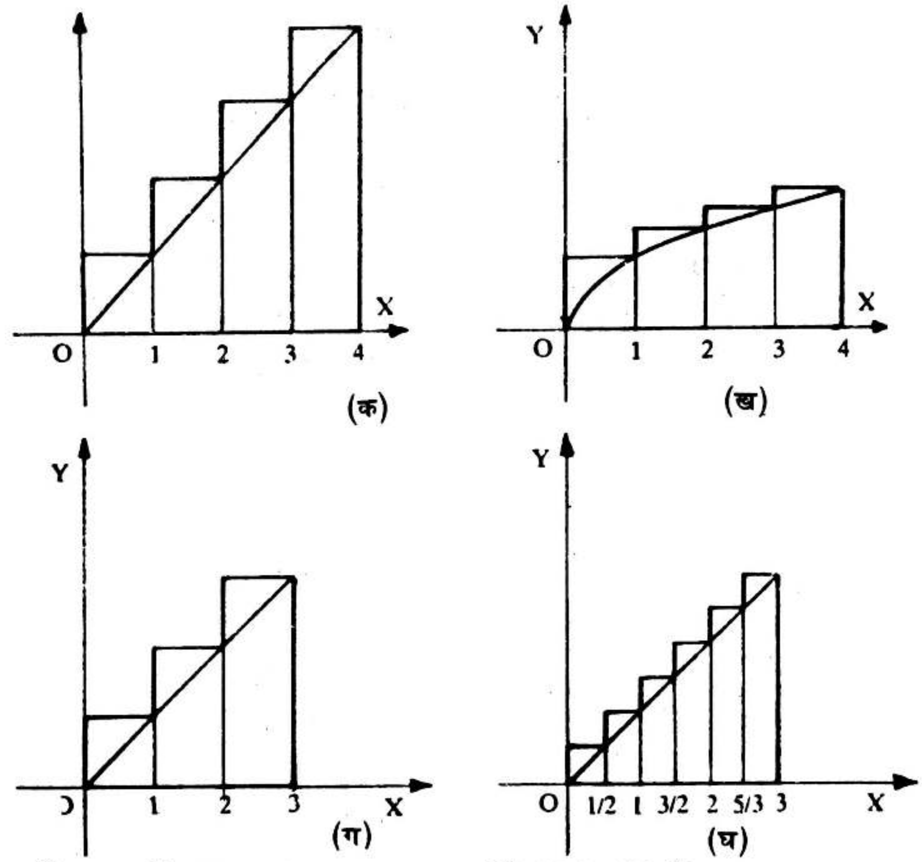
चित्र 4 (क) के छायांकित आयतों को बाह्य आयत (outer rectangle) और चित्र 4 (ख) के छायांकित आयतों को अंतः आयत (inner rectangle) कहा जाता है।

इस तरह, जब f एक ऋणेतर मानी फलन ($f(x) > 0 \ \forall \ x$) हो, तो $U(P, f)$ = चित्र 4 (क) में दिखाये गये बाह्य आयतों के क्षेत्रफलों का योग, और $L(P, f)$ = चित्र 4 (ख) में दिखाये गये अंतः आयतों के क्षेत्रफलों का योग। इसलिए $U(P, f) - L(P, f)$ = चित्र 4 (ग) में f के आलेख के अनुदिश छायांकित आयतों के क्षेत्रफलों का योग।

जैसा कि आप चित्र 5 में देख सकते हैं, $U(P, f)$ और $L(P, f)$ फलन $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ पर (देखिये चित्र 5 (क) और चित्र 5 (ख)) और [a, b] के विभाजन P पर (देखिये चित्र 5 (ग) और 5 (घ)) निर्भर करते हैं।

यदि हम वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष और रेखाओं $x = a$ और $x = b$ से परिबद्ध क्षेत्रफल (चित्र 2 में दिखाये गये छायांकित प्रदेश के क्षेत्रफल) को A से प्रकट करें तो चित्र 4 (क) और (ख) से यह बिल्कुल स्पष्ट है कि $L(P, f) \leq A \leq U(P, f)$.

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



चित्र 5 : (क) U(P, f) जहां y = x (ख) U(P, f) जहां $y^2 = x$

(ग) U(P, f) जबकि P= {0, 1, 2, 3} (घ) U(P, f) जबकि $P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$

ज्यामितीय चित्र से निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होता है :

प्रमेय 1 : मान लीजिए $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ एक परिबद्ध फलन (bounded function) है और P, [a, b] का एक विभाजन है। यदि [a, b] में M और m, f के क्रमशः उच्चक और निम्नक हों तो
$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$.

उपपत्ति : अब

$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ और

$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. इसलिए $M_i \leq M$.

यदि $X \subset Y$ तो $\sup X \leq \sup Y$ और $\inf X \geq \inf Y$.

और, $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, और

$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

इस तरह, $m \leq m_i$. इसका यह अर्थ है कि $i = 1, 2, ..., n$ के लिए $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ ... (2)

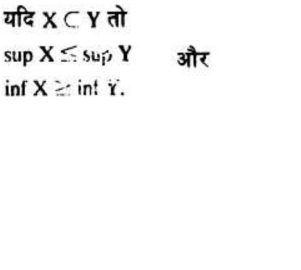
असमिकाएं (inequality) (2) प्राप्त हो जाने पर हम सरल चरणों में अपनी उपपत्ति पूरी कर सकते हैं। (2) से यह पता चलता है कि

$m \Delta x_i \leq m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \leq M \Delta x_i$,

इससे यह पता चलता है कि यदि हम $i = 1, 2, 3, ..., n$ पर योग लें तो हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$m \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$

$\Rightarrow m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$,



चित्र 6

क्योंकि $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ = सभी उप-अंतरालों की लंबाइयों का योग

= [a, b] की लंबाई

= b − a.

चित्र 6 की सहायता से आप इस प्रमेय को और अच्छी तरह से समझ सकते हैं।

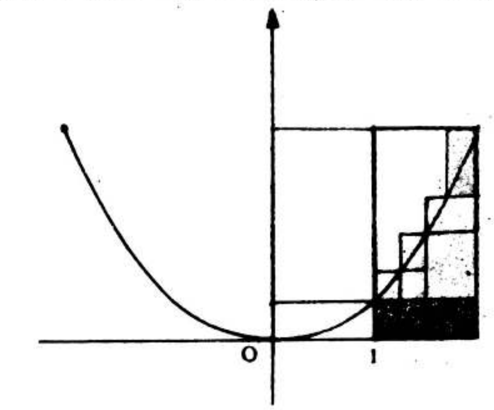
आइए अब हम एक दिए हुए फलन के लिए इस प्रमेय को सत्यापित करें।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

उदाहरण 3 : मान लीजिए $f : [1, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ से परिभाषित एक फलन है और मान लीजिए

$P = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2\}$, [1, 2] का एक विभाजन है। फलन f, [1, 2] पर एक परिबद्ध फलन है। वस्तुतः f का गोचर [1, 4] है, जो स्पष्टतः परिबद्ध है।

क्योंकि f प्रत्येक उप-अंतराल पर एक वर्धमान फलन है (देखिए चित्र 7), इसलिए $[x_{i-1}, x_i]$ में f का उच्चक x_i पर होगा और निम्नक x_{i-1} पर। अर्थात् $M_i = f(x_i)$ और $m_i = f(x_{i-1})$.



चित्र 7

इसलिए हम यह लिख सकते हैं कि

$$U(P, f) = \Sigma M_i \Delta x_i = \Sigma f(x_i) \Delta x_i = \Sigma x_i^2 (x_i - x_{i-1})$$
$$= x_1^2 (x_1 - x_0) + x_2^2 (x_2 - x_1) + x_3^2 (x_3 - x_2) + x_4^2 (x_4 - x_3)$$

$$U(P, f) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 2^2 \left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{25}{64} + \frac{9}{16} + \frac{25}{54} + \frac{4}{3}$$
$$= \frac{4751}{1728}$$

$$L(P, f) = \Sigma m_i \Delta x_i = \Sigma f(x_{i-1}) \Delta x_i$$

$$L(P, f) = (1) \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{25}{64} + \frac{9}{24} + \frac{25}{27}$$
$$= \frac{3652}{1728}$$

अब, क्योंकि [1, 2] में f(x) का उच्चक $= M = f(2) = 2^2 = 4$, और निम्नक $= m = f(1) = 1$, इसलिए

$M(b - a) = 4(2 - 1) = 4$ और $m(b - a) = 1(2 - 1) = 1$.

इस तरह $m(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b - a)$.

हम यह जानते हैं कि उपरि और निम्न रीमान योग दिए हुए अंतराल के विभाजन पर निर्भर करते हैं। अंतराल के दो विभाजनों के निम्न और उपरि योगों के संबंध को स्पष्ट करने वाला एक प्रमेय हम नीचे दे रहे हैं।

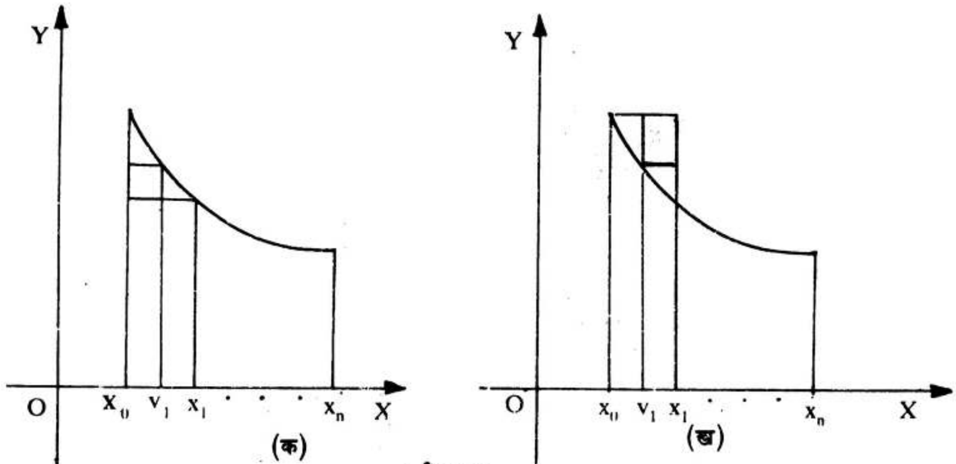
प्रमेय 2 : मान लीजिए $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ एक परिबद्ध फलन है और मान लीजिए P_1 और P_2, [a, b] के विभाजन हैं। यदि P_2, P_1 से अधिक अधिशोधित है, तो

$$L(P_1, f) \leq L(P_2, f) \leq U(P_2, f) \leq U(P_1, f).$$

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम चित्र 8 (क) और (ख) को लेते हैं। मान लीजिए
$P_1 = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ और
$P_2 = \{x_0, y_1, x_1, x_2, ..., x_n\}$, [a, b] के दो विभाजन हैं। P_2 में P_1 की अपेक्षा एक सदस्य, अर्थात् y_1 अधिक है। इसलिए, P_2, P_1 से अधिक अधिशोधित है। वस्तुतः P_2 को P_1 का सरल अधिशोधन कहा जा सकता है। पहले हम प्रमेय को इस सरल अधिशोधन के लिए सिद्ध करेंगे।

P_1, [a, b] को n उप-अंतरालों $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ में विभाजित करता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



चित्र 8

चित्र 8 (क) से यह स्पष्ट पता चलता है कि $L(P_1, f) \le L(P_2, f)$ (इनका अंतर होगा चित्र 8 (क) के छायांकित आयत के क्षेत्रफल से निरूपित मात्रा) इसी प्रकार चित्र 8 (ख) से यह पता चलता है कि $U(P_2, f) \le U(P_1, f)$ क्योंकि $L(P_2, f) \le U(P_2, f)$, इसलिए यहां पर प्रमेय का निष्कर्ष लागू होता है। अब, यदि P_2, P_1 का एक सरल अधिशोधन न हो तो मान लीजिए कि P_2 में P_1 की अपेक्षा m अवयव अधिक हैं। तब हम ऐसे $(m - 1)$ विभाजन $P_2^1, P_2^2, P_2^3, ..., P_2^{m-1}$ प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि $P_1 \subset P_2^1 \subset P_2^2 \subset ... \subset P_2^{m-1} \subset P_2$ और इस अनुक्रम का प्रत्येक विभाजन अपने पिछले विभाजन का एक सरल अधिशोधन हो।

तब प्रमेय 2 उत्तरोत्तर अधिशोधनों के प्रत्येक युग्म पर लागू होता है और हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$L(P_1, f) \le L(P_2^1, f) \le L(P_2^2, f) \le ... \le L(P_2^{m-1}, f) \le L(P_2, f)$ और

$U(P_2, f) \le U(P_2^{m-1}, f) \le ... \le U(P_2^2, f) \le U(P_2^1, f) \geq U(P_1, f)$

इस तरह $L(P_1, f) \le L(P_2, f) \le U(P_2, f) \le U(P_1, f)$.

प्रमेय 2 से हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकालते हैं :

मान लीजिए $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ एक संतत ऋणेतर मानी फलन है, और मान लीजिए $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, [a, b] का एक अधिशोधन अनुक्रम है। तब,

$L(P_1, f) \le L(P_2, f) \le ... \le L(P_n, f) \le ... \le A \le ... \le U(P_n, f) \le ... \le U(P_2, f) \le U(P_1, f)$, जहां A, वक्र x-अक्ष और $x = 0$ तथा $x = b$ रेखा से परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल है।

E E 5) विभाजन P के सापेक्ष फलन f का उपरि गुणन योग और निम्न गुणन योग ज्ञात कीजिए. जबकि

क) $f(x) = 1 + x^2, P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$

ख) $f(x) = \frac{1}{x}, P = \{1, 2, 3, 4\}$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E 6) फलन $f(x) = \frac{1}{x}$, $2 \leq x \leq 3$ और [2, 3] के विभाजनों $P_1 = \left\{2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ और $P_2 = \left\{2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, 3\right\}$ के लिए प्रमेय 2 को सत्यापित कीजिए।

इस अनुभाग में हमने यह देखा है कि चित्र 2 के क्षेत्रफल A का सन्निकट मान [a, b] के किसी विभाजन के संगत निम्न और उपरि योगफलों की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है। प्रमेय 2 से हमें इस बात का भी पता चलता है कि जैसे-जैसे हम अपने विभाजन का अधिशोधन करते जाते हैं, वैसे-वैसे निम्न और उपरि योगफल दोनों ओर से A के निकट आते जाते हैं। निम्न योगफल जहां A का अव-आकलन $(L(P, f) \leq A)$ करते हैं वहीं, उपरि-योगफल A का अधि-आकलन $(U(P, f) \geq A)$ करते हैं। आइए अब हम अगले अनुभाग में एक कदम और आगे चलें और निम्न तथा उपरि समाकलों को परिभाषित करें।

10.2.3 उपरि और निम्न समाकल

मान लीजिए $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ एक ऋणेतर परिबद्ध फलन है। तब [a, b] के प्रत्येक विभाजन P के संगत एक उपरि गुणन योग U(P, f) और एक निम्न गुणन योग L(P, f) होता है।

आपको याद होगा (इकाई-1) प्रत्येक समुच्चय, जो नीचे से परिबद्ध हो, का एक निम्नक होता है, और प्रत्येक समुच्चय जो उपरि परिबद्ध हो, का एक उच्चक होता है।

मान लीजिए $\boldsymbol{P}$, [a, b] के सभी विभाजनों का समुच्चय है। तब समुच्चय $\boldsymbol{u} = \{U(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\}$, $\mathbf{R}$ का एक समुच्चय होता है और नीचे से परिबद्ध होता है, क्योंकि $A \leq U(P, f)\ \forall\ P \in \boldsymbol{P}$ इस तरह $\boldsymbol{u}$ का निम्नक ज्ञात किया जा सकता है।

इसी प्रकार समुच्चय $\boldsymbol{u}' = \{L(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\}$ ऊपर से परिबद्ध होता है, क्योंकि $L(P, f) \leq A\ \forall\ P \in \boldsymbol{P}$. अतः हम $\boldsymbol{u}'$ का उच्चक ज्ञात कर सकते हैं।

$\boldsymbol{u}$ के निम्नक और $\boldsymbol{u}'$ के उच्चक को विशेष नाम दिया गया है जैसा कि आप नीचे दी गई परिभाषा में देखेंगे।

परिभाषा 3: यदि फलन f, [a, b] पर परिभाषित हो और यदि $\boldsymbol{P}$, [a, b] के सभी विभाजनों के समुच्चय को प्रकट करता हो, तो $\{U(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\}$ के निम्नक को [a, b] पर f का उपरि समाकल कहा जाता है और इसे $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ से प्रकट किया जाता है।

$\{L(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\}$ के उच्चक को [a, b] पर f का निम्न समाकल कहा जाता है और इसे $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ से प्रकट किया जाता है। प्रमेय 2 के अनुसार, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq A$ और $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq A$. इस तरह $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq A \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

उदाहरण 4 : आइए,

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ यदि } x \text{ परिमेय हो} \\ 1 \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय हो} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f के लिए $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx$ और $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx$ ज्ञात करें।

मान लीजिए $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, [0, 1] का एक विभाजन है। प्रत्येक उप-अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ में परिमेय और अपरिमेय संख्याएं दोनों ही आविष्ट हैं। इसका यह अर्थ है कि प्रत्येक i के लिए

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$M_i = 1$ और $m_i = 0$. इस तरह, $U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (1)(x_i - x_{i-1}) = 1 - 0 = 1$ और $L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (0)(x_i - x_{i-1}) = 0$ क्योंकि P, [0, 1] का एक स्वेच्छ विभाजन (arbitrary partition) था, इसलिए इससे यह अर्थ निकलता है कि $U(P, f) = 1$ और $L(P, f) = 0 \ \forall \ P \in \boldsymbol{P}$.

इस तरह $\boldsymbol{u} = \{U(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\} = \{1\}$

और $\boldsymbol{u}' = \{L(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\} = \{0\}$

अतः $\inf[u] = 1$ और $\sup \boldsymbol{u}' = 0$, अर्थात् $\overline{\int_0^1} f(x)dx = 1$ और $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए :

E 7) $f(x) = 2$ से परिभाषित फलन f के लिए $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx$ और $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx$ ज्ञात कीजिए।

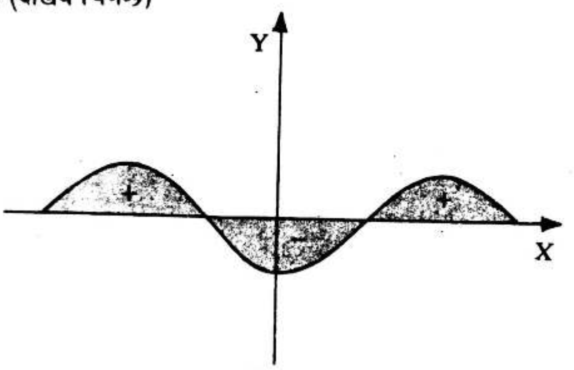
E 8) यदि फलन f और g, [a, b] में परिबद्ध ऋणेतर मानी फलन हैं और यदि [a, b] में $f(x) \le g(x)$, में तो सिद्ध कीजिए कि $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$ और $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$.

10.3 निश्चित समाकल

पिछले भाग में हमने अपनी चर्चा ऋणेतर मानी फलनों तक ही सीमित रखी थी। पर हम अपनी L(P, f), U(P, f) और निम्न तथा उपरि समाकलों की परिभाषाओं को सभी परिबद्ध फलनों पर भी सरलता से लागू कर सकते हैं। परंतु इन योगफलों का क्षेत्रफल के रूप में जिस प्रकार हम विवेचन करते हैं, उसमें हमें परिवर्तन करना होगा। इसके लिए यहां हम चिह्नित क्षेत्रफल (*signed area*)

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

की संकल्पना का समावेश कर रहे हैं। यदि R कोई प्रदेश हो, तो इसका चिह्नित क्षेत्रफल उसके x-अक्ष से ऊपर स्थित प्रदेश के क्षेत्रफल में से x-अक्ष से नीचे स्थित प्रदेश के क्षेत्रफल को घटा देने पर प्राप्त होता है। (देखिये चित्र-9)



चित्र 9

तब हम इस परिभाषा के अनुसार L(P, f) को दिए हुए प्रदेश के अंतर्गत खींचे गए बहुभुज का चिह्नित क्षेत्रफल और U(P, f) को प्रदेश के परिगत खींचे गए बहुभुज का चिह्नित क्षेत्रफल मान सकते हैं। इस तरह, संवृत अंतराल(closed interval)[a, b] पर किसी भी परिबद्ध फलन के लिए हम $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\}$ और $\overline{\int}^b f(x)\,dx = \inf\{U(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\}$ परिभाषित कर सकते हैं।

अब हम संवृत अंतराल पर परिबद्ध फलन के निश्चित समाकल के बारे में चर्चा कर सकते हैं। समाकल के पहले लगाये गए विशेषण 'निश्चित' से इस बात का आभास होता है कि बाद में हमें अनिश्चित समाकल (indefinite integral) का भी अध्ययन करना होगा।

परिभाषा 4 : मान लीजिए $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ एक परिबद्ध फलन है। f को [a, b] पर समाकलनीय कहा जाता है यदि और केवल यदि $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

इस सर्वनिष्ठ (common) मान को [a, b] पर f का निश्चित समाकल कहा जाता है और इसे $\int_a^b f(x)\,dx$ ... (1) से प्रकट किया जाता है।

[a, b] को समाकलन-अंतराल कहा जाता है।

निश्चित समाकल के संकेतन में f(x) को **समाकल्य** (integrand), a को **समाकलन की निम्न सीमा** (lower limit) और b को **समाकलन की उपरि सीमा** (upper limit) कहा जाता है।

f(x) के बाद आने वाला प्रतीक dx स्वतंत्र चर को प्रकट करता है। यहां x केवल एक मूक चर (dummy variable) है, और इसके स्थान पर t, v अथवा किसी भी अन्य अक्षर का प्रयोग किया जा सकता है। कहने का अर्थ है कि

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(v)\,dv$$

प्रतीक ∫ हमें S की याद दिलाता है जो कि उचित भी है, क्योंकि निश्चित समाकल को एक योगफल (sum) की सीमा माना जा सकता है। वस्तुत: यह निम्न समाकल और उपरि समाकल जो कि स्वयं निम्नक योगफल और उच्चक योगफल हैं, का सर्वनिष्ठ मान (यदि इसका अस्तित्व हो) होता है।

f(x) dx के प्रयोग से हमें इस बात का पता चलता है कि हम फलन मानों का योगफल नहीं लेते हैं, बल्कि ऐसे पदों का योगफल लेते हैं, जो एक उप-अंतराल में फलन के उच्चक अथवा निम्नक को उप-अंतराल की लंबाई से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

ऊपर दी गई निश्चित समाकल की परिभाषा केवल तभी लागू होती है जबकि $a < b$, परंतु $a = b$ तथा $a > b$ वाली स्थितियों पर भी विचार करना उपयुक्त होगा। इन स्थितियों में हम

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{... (2)}$$

$$\text{और } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{... (3)}$$

परिभाषित करते हैं, बशर्ते दायीं ओर के समाकल का अस्तित्व हो।

उदाहरण 4 में हमने यह देखा है कि यदि

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

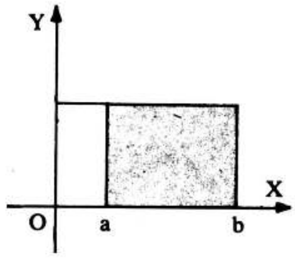
$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1 \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है,} \end{cases}$$

तो $\int_{0}^{1} f(x)\, dx = 0$ और $\overline{\int_{0}^{1}} f(x)\, dx = 1.$

क्योंकि इस फलन के निम्न समाकल और उपरि समाकल समान नहीं हैं इसलिए हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि यह फलन समाकलनीय नहीं है।

E E 9) क्या E 7) में दिया गया फलन समाकलनीय है?

यहां हम निश्चित समाकल के कुछ मूलभूत गुणधर्म दे रहे हैं।



चित्र 10

I) **अचर फलन $f(x) = c$ का समाकल**

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a)$$

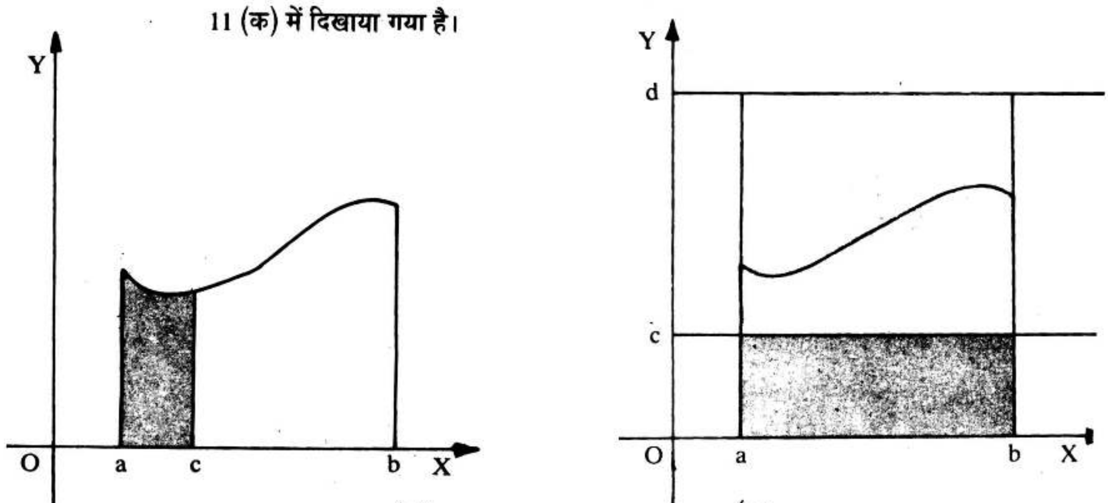
यह तो बिल्कुल स्पष्ट है क्योंकि इस समाकल द्वारा निरूपित क्षेत्र आधार $b - a$ और ऊंचाई c वाला एक आयत ही है। देखिए चित्र 10.

अब मान लीजिए f एक ऐसा फलन है जो [a, b] पर समाकलनीय है।

II) **अचर गुणन गुणधर्म** $\int_a^b k.f(x)\, dx =$

III) **अंतराल सम्मिलन गुणधर्म (interval union property)**

यदि $a < c < b$, तो $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$. इसके ज्यामितीय विवेचन को चित्र 11 (क) में दिखाया गया है।



(क) (ख)

चित्र 11

IV) **तुलन गुणधर्म (comparison property)**

यदि c और d ऐसे अचर हों जिससे कि [a, b] में सभी x के लिए $c \le f(x) \le d$, तो

$$c(b - a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le d\,(b - a).$$

चित्र 11 (ख) को देखने से यह स्पष्ट हो जाता है। ध्यान दीजिए कि यह आवश्यक नहीं है कि c और d, [a, b] पर f के निम्नतम और अधिकतम मान ही हों। c, निम्नतम मान से भी कम हो सकता है और d अधिकतम मान से भी अधिक हो सकता है।

अगले प्रमेय में किसी फलन का समाकलनीय होने का निकर्ष (criterion) दिया गया है।

प्रमेय 3 : एक परिबद्ध फलन f, [a, b] पर समाकलनीय होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए [a, b] के ऐसे विभाजन P का अस्तित्व होता हो जिससे कि $0 \le U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

उपपत्ति : हम जानते हैं कि [a, b] के किसी विभाजन P के लिए

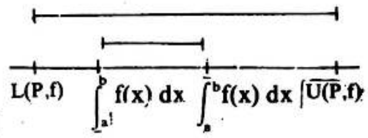
$$L(P, f) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le U(P, f)$$

यदि फलन f का यह गुणधर्म हो कि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए [a, b] के एक ऐसे विभाजन P का अस्तित्व हो जिससे कि $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$,

तो हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon.$$

इससे यह पता चलता है कि $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$ अतः f, [a, b] पर समाकलनीय है।



इसके विपरीत, यदि f, [a, b] पर समाकलनीय हो, तो

$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\} = \inf\{U(P, f) : P \in \boldsymbol{P}\}$ इस तरह प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए हम [a, b] के विभाजन P′ और P″ प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि

$$0 \le \int_a^b f(x)dx - L(P', f) < \varepsilon/2 \text{ और } 0 \le U(P'', f) - \int_a^b f(x)dx < \varepsilon/2$$

(देखिये इकाई-1 का भाग 2)

यदि P, P′ और P″ का अधिशोधन है, तो $\int_a^b f(x)dx - L(P, f) < \varepsilon/2$ और $U(P, f) - \int_a^b f(x)dx < \varepsilon/2$ इन दो असमिकाओं को जोड़ने पर $0 \le U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ प्राप्त होता है।

इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि वे कौन-कौन से फलन हैं जो ऊपर दिए गए निष्कर्ष को संतुष्ट करते हैं?

इस प्रश्न का उत्तर निम्नलिखित प्रमेयों से प्राप्त हो सकता है।

प्रमेय 4 : वह फलन जो [a, b] पर एकदिष्ट वर्धमान या ह्रासमान है, [a, b] पर समाकलनीय होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए फलन $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ वर्धमान फलन है तब, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$. प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए मान लीजिए

$$P_n = \{a, a + h, ..., a + nh = b\}$$

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$, [a, b] का एक सम विभाजन है। तब

$$U(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i h = h\sum_{i=1}^{n} f(a + ih) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + ih),$$

क्योंकि [a + (i − 1)h, a + ih] में f वर्धमान होने के कारण f(x) का उच्चक f(a + ih) है। इसी तरह

$$L(P_n, f) = h\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + (i-1)h). \text{ इसलिए,}$$

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{b-a}{n}\,[f(a+h) + f(a+2h) + ... + f(a+nh)$$
$$- f(a) - f(a+h) ..... f(a + (n-1)h)]$$
$$= \frac{b-a}{n}\,[f(a+nh) - f(a)]$$
$$= \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)] \qquad ...(1)$$

$n > \frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{\varepsilon}$

मान लीजिए $\varepsilon > 0$, क्या हम एक ऐसा n ले सकते हैं जिससे कि $U(P_n, f) - L(P_n, f) < \varepsilon$ हो?

$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

इसका उत्तर हां में है। मान लीजिए कोई $n > \frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{\varepsilon}$ है।

यदि हम n के इस मान को (1) में प्रतिस्थापित करें तो हमें

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$U(P_n, f) - L(P_n, f) < \frac{\varepsilon (b - a) [f(b) - f(a)]}{(b - a) [f(b) - f(a)]} = \varepsilon$ प्राप्त होता है।

इस तरह प्रमेय 3 लागू करके हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि f समाकलनीय है।

प्रमेय 4 से हमें निम्बलिखित उपयोगी परिणाम प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 1 : यदि [a, b] पर f वर्धमान अथवा ह्रासमान हो, तो

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} h[f(a) + f(a + h) + ... + f(a + (n - 1)h)]$$
$$= \lim_{h \to 0} h[f(a + h) + f(a + 2h) + ... + f(a + nh)] \text{ जहां } h = \frac{b - a}{n}.$$

हम उपप्रमेय 1 की उपयोगिता की जानकारी कुछ उदाहरणों की सहायता से देंगे। पर इससे पहले हम यहां पर एक अन्य प्रमेय का कथन दे रहे हैं, जिसमें एक और प्रकार के समाकलनीय फलनों के बारे में बताया गया है।

प्रमेय 5 : यदि फलन $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ संतत हो, तो f समाकलनीय होता है।

इस प्रमेय की उपपत्ति यहां देना संभव नहीं है। इसे हम बाद में वास्तविक विश्लेषण के पाठ्यक्रम में सिद्ध करेंगे। इकाई 3 के भाग 5 में हमने यह देखा है कि कोई भी अवकलनीय फलन संतत होता है। अब हम यह लिख सकते हैं कि
अवकलनीयता $\Longrightarrow$ सांतत्य $\Longrightarrow$ समाकलनीयता

आइए अब हम उपप्रमेय 1 की सहायता से कुछ निश्चित समाकलों के मान ज्ञात करें।

उदाहरण 5 : $\int_a^b \cos x\, dx$, $0 \le a \le b \le \pi/2$ का मान ज्ञात करते समय हम प्रथम यह नोट करते हैं कि $f : x \to \cos x$, [a, b] पर ह्रासमान फलन है। अतः उपप्रमेय 1 के अनुसार

$$\int_a^b \cos x\, dx = \lim_{h \to 0} h[\cos (a + h) + \cos (a + 2h) + ... + \cos (a + nh)],\ a + nh = b.$$

अब $2 \sin (h/2) [\cos (a + h) + \cos (a + 2h) + ... + \cos (a + nh)]$

$$= 2\sin (h/2) \cos (a + h) + 2 \sin (h/2) \cos (a + 2h) + ... + 2 \sin (h/2) \cos (a + nh).$$
$$= [\sin (a + \frac{3h}{2}) - \sin (a + \frac{h}{2}) + [\sin (a + \frac{5h}{2} - \sin (a + \frac{3h}{2})] +$$
$$... + [\sin (a + (\frac{2n + 1}{2})h) - \sin (a + (\frac{2n - 1}{2})h)]$$
$$= \sin (a + \frac{(2n + 1)h}{2}) - \sin (a + \frac{h}{2})$$
$$= \sin (b + \frac{h}{2}) - \sin (a + \frac{h}{2}), \text{ क्योंकि } a + nh = b$$
$$\Longrightarrow \cos (a + h) + \cos (a + 2h) + ... + \cos (a + nh) = \frac{\sin (b + h/2) - \sin (a + h/2)}{2 \sin h/2}$$

इस तरह

$$\int_a^b \cos x\, dx = \lim_{h \to 0} [\sin (b + \frac{h}{2}) - \sin (a + \frac{h}{2})] \frac{h/2}{\sin (h/2)}$$
$$= \sin b - \sin a$$

उदाहरण 6 : मान लीजिए हम $\int_1^2 (x + x^2)dx$ का मान ज्ञात ... $f : x \to x + x^2$, [1, 2] पर एक वर्धमान फलन है। इसलिए

आपको याद होगा कि

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n + 1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1) (2n + 1)}{6}.$$

$$\int_1^2 (x + x^2)dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(1 + ih),\ h = 1/n$$
$$= \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} [(1 + ih) + (1 + ih)^2]$$
$$= \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} (2 + 3hi + h^2 i^2)$$
$$= \lim_{h \to 0} [2h \sum_{i=1}^{n} 1 + 3h^2 \sum_{i=1}^{n} i + h^3 \sum_{i=1}^{n} i^2]$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= \lim_{h \to 0} [2nh + \frac{3}{2} h^2 n (n + 1) + \frac{1}{6} h^3 n (n + 1) (2n + 1)]$$

$$= \lim_{h \to 0} [2 + \frac{3}{2} (1 + h) + \frac{1}{6} (1 + h) (2 + h)], \quad \text{क्योंकि } nh = 1.$$

$$= 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{23}{6}$$

इस भाग में हमने यह देखा है कि संतत फलन समाकलनीय होता है। हमने यह भी सिद्ध किया है कि एकदिष्ट फलन समाकलनीय होता है। उपप्रमेय 1 से हमें एकदिष्ट फलन का समाकल ज्ञात करने की विधि प्राप्त हुई है। एक अंतराल में किसी फलन की समाकलनीयता का एक अति आवश्यक प्रतिबंध उस अंतराल में फलन की परिबद्धता है। यदि फलन अपरिबद्ध है तो वह समाकलनीय नहीं होगा। वस्तुत: यदि फलन परिबद्ध न हो तो हम M_i अथवा m_i की बात नहीं कर सकते और इस तरह उपरि अथवा निम्न गुणन योग प्राप्त नहीं कर सकते। इस भाग में उल्लेख किए गए निष्कर्षों के आधार पर आप निम्नलिखित प्रश्न को हल कर सकते हैं।

E E 10) बताइए कि दिए हुए अंतराल में निम्नलिखित फलनों में से कौन-सा फलन समाकलनीय है और कौन-सा फलन समाकलनीय नहीं है। प्रत्येक का उत्तर कारण सहित दीजिए।

क) $[-1, 5]$ में $f(x) = x^2 - 2x + 2$

ख) $[1, a]$ में $f(x) = \sqrt{x}$

ग) $[-1, 1]$ में $f(x) = \frac{1}{x}$

घ) $[0, 4]$ में $f(x) = [x]$

ङ) $[0, 3]$ में $f(x) = |x - 1|$

च) $[-4, 0]$ में $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$

छ) $[-1, 1]$ में $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ यदि } x < 0 \\ 1 - x, \text{ यदि } x \geq 0 \end{cases}$

ज) $[0, 3]$ में $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ यदि } x < 1 \\ 2x + 1, \text{ यदि } x \geq 1 \end{cases}$

E E 11) उपप्रमेय 1 की सहायता से निम्नलिखित निश्चित समाकल का मान ज्ञात कीजिए :

$$\int (1 + x)dx$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

10.4 कलन का मूलभूत प्रमेय

इस इकाई की प्रस्तावना में आप यह जान चुके हैं कि 2000 वर्ष पहले यूनानियों ने, मुख्यत: आर्कमिडीज (287-212 ई. पू.) ने निश्चित समाकलन की मूलभूत संकल्पनाओं का प्रयोग किया था। कलन का आविष्कार होने के बहुत पहले की यह बात है। पर सत्रहवीं शताब्दी में न्यूटन और लाइब्नीत्झ ने प्रति-अवकलन द्वारा निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने की एक प्रक्रिया विकसित की। इस प्रक्रिया को कलन के मूलभूत प्रमेय के रूप में साकार किया गया है।

इस प्रमेय का कथन देने से पहले हम आपको फलन के औसत मान और फलन के प्रति-अवकलज **(antiderivative)** की संकल्पना से परिचित करा देना चाहते हैं।

परिभाषा 5 : मान लीजिए f, [a, b] पर समाकलनीय है। [a, b] पर $y = f(x)$ का औसत मान $\bar{y}$ यह होता है :

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

नीचे दिए गए प्रमेय में यह बताया गया है कि संवृत अंतराल पर परिभाषित प्रत्येक संतत फलन अंतराल के किसी न किसी बिन्दु पर अपना औसत मान अवश्य प्राप्त करता है। इस प्रमेय की उपपत्ति हम यहां नहीं दे रहे हैं।

प्रमेय 6 : **(औसत मान प्रमेय)** : यदि $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ संतत हो, तो एक $\bar{x} \in [a, b]$ ऐसा होता है, जिसके लिए

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

अब हम फलन के प्रति-अवकलज को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 6 : मान लीजिए $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ और $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ऐसे दो फलन हैं कि प्रत्येक $x \in]a, b[$ के लिए $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$. तो F(x) को f(x) का प्रति-अवकलज (या प्रतिलोम अवकलज) कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, $\frac{x^3}{3}$, x^2 का प्रति-अवकलज है, क्योंकि $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2$.

$-\cos x$, $\sin x$ का प्रति-अवकलज है क्योंकि $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$.

क्या $\frac{x^4}{4} - x^2$, $x^3 - 2x$ का प्रति-अवकलज है?

यहाँ हमारी चर्चा वह अंतराल [a, b] निहित है जिस पर f और उसका प्रतिअवकलज F परिभाषित है ताकि $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

दो फलन $f(x) = x^2$ और $g(x) = x^2 + 5$ लीजिए। ये दोनों ही फलन $h(x) = 2x$ के प्रति-अवकलज हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि किसी फलन का प्रति-अवकलज अद्वितीय नहीं होता। वस्तुत: यदि F(x), f(x) का प्रति-अवकलज है तो $F(x) + c$ भी f(x) का प्रति-अवकलज होता है। ऐसा होने का कारण यह है कि

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}(F(x) + c) = f(x).$$

दूसरे शब्दों में हम यह भी कह सकते हैं कि किसी फलन के दो प्रति-अवकलजों में केवल एक अचर का अंतर होता है। क्योंकि, यदि F(x) और G(x), f(x) के दो प्रति-अवकलज हों, तो

$$F'(x) = G'(x) = f(x).$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अर्थात् $[F(x) - G(x)]' = 0$

इकाई 7 में हमने यह देखा है कि यदि एक अंतराल पर किसी फलन का अवकलज शून्य है तो वह फलन अचर होता है। इस तरह

$F(x) - G(x) = c.$

अब औसत मान और प्रति अवकलज को परिभाषित कर लेने के बाद हम इस स्थिति में आ गए हैं कि हम कलन के मूलभूत प्रमेय का कथन दे सकते हैं। इस प्रमेय का कथन हम दो भागों में देंगे।

प्रमेय 7 (कलन का मूलभूत प्रमेय) : मान लीजिए $f : [a, b] \to \mathbf{R}$

भाग 1 : यदि फलन F, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ... (1)

से परिभाषित है तो F, f का एक प्रति-अवकलज है, अर्थात्]a, b[में सभी x के लिए $F'(x) = f(x)$.

भाग 2 : यदि]a, b[में G, f का एक प्रति-अवकलज है, तो $\int_a^b f(x)\,dx = G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$.

भाग 1 की उपपत्ति :

अवकलज की परिभाषा से

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$ **(निश्चित समाकलों के अंतराल सम्मिलन गुणधर्म से)**

पर औसत मान प्रमेय (प्रमेय 6) से किसी $\bar{t} \in [x, x+h]$ के लिए $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\bar{t})$ होगा।

इसलिए $F'(x) = \lim_{h\to 0} f(\bar{t})$. हम जानते हैं कि $\bar{t} \in [x, x+h]$. इसका अर्थ है कि $h \to 0$ होने पर $\bar{t} \to x$. इसलिए $F'(x) = \lim_{\bar{t}\to x} f(\bar{t}) = f(x)$, क्योंकि f एक संतत फलन है। अतः (1) से परिभाषित F, f का एक प्रति-अवकलज है।

भाग 2 की उपपत्ति

]a, b[में G, f का एक अवकलज है। और जैसा कि भाग 1 में दिखाया जा चुका है (1) से परिभाषित F,]a, b[में f का एक प्रति-अवकलज है। इसलिए किसी अचर c के लिए]a, b[पर
$G(x) = F(x) + c.$

c का मान ज्ञात करने के लिए $x = a$ प्रतिस्थापित कीजिए

तब $c = G(a) - F(a) = G(a) - 0 = G(a).$

अतः $G(x) = F(x) + G(a)$ या
$F(x) = G(x) - G(a).$

$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

यदि हम $x = b$ प्रतिस्थापित करें तो हमें

$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ प्राप्त होता है।

कलन के मूलभूत प्रमेय से यह पता चलता है कि अवकलन और समाकलन प्रतिलोम प्रक्रियाएं हैं, क्योंकि भाग 1 को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)\,dt) = f(x)$, जबकि f संतत हो। अर्थात् यदि हम पहले चर x को समाकलन की उपरि सीमा मानकर संतत फलन f को समाकलित करें, और तब इस परिणाम को x के सापेक्ष अवकलित करें तो हमें फलन f पुनः प्राप्त होता है। इसलिए हम यह पाते हैं कि अवकलन, समाकलन के प्रभाव को व्यर्थ कर देता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इसके विपरीत यदि हम यह मान लें कि b′ संतत है, तो कलन के मूलभूत प्रमेय के भाग 2 को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\int_a^x G'(t)\,dt = G(x) - G(a)$$

यहां हम यह कह सकते हैं कि यदि हम फलन G को पहले अवकलित करें और फिर प्राप्त परिणाम को a से x तक की सीमा में समाकलित करें तो इस तरह प्राप्त हुए परिणाम और मूल फलन G में केवल अचर G(a) का अंतर हो सकता है। यदि a ऐसा लिया गया हो कि $G(a) = 0$, तो समाकलन अवकलन के प्रभाव को व्यर्थ कर देता है।

अभी तक हमने पहले निम्न और उपरि योगफल प्राप्त करके और फिर उनके क्रमशः उच्चक और निम्नक ले करके कुछ फलनों के समाकलों के मान ज्ञात किये हैं। यह एक क्लिष्ट प्रक्रिया है और इसे हम सभी फलनों पर सरलता से लागू नहीं कर सकते। पर अब हमें कलन के मूलभूत प्रमेय से निश्चित समाकलों के मान ज्ञात करने की एक सरल विधि प्राप्त हो गई है। हम इस विधि के प्रयोग को कुछ उदाहरण लेकर प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 7 : मान लीजिए हम $\int_2^3 (ax^2 + bx + c)\,dx$ का मान ज्ञात करना चाहते हैं।

क्योंकि [2, 3] पर $f(x) = ax^2 + bx + c$ संतत है, इसलिए यह [2, 3] पर समाकलनीय है।

$G(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx$, f(x) का एक प्रति-अवकलज है। अतः, कलन के मूलभूत प्रमेय (भाग 2) के अनुसार

$$\begin{aligned}\int_2^3 (ax^2 + bx + c)\,dx &= G(x)\Big]_2^3 \\ &= G(3) - G(2) \\ &= (9a + 9b/2 + 3c) - (8a/3 + 2b + 2c) \\ &= 19a/3 + 5b/2 + c\end{aligned}$$

उदाहरण 8 : अब हम $\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx$ का मान ज्ञात करेंगे।

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx &= \frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\sin \pi/2}{2} - \frac{\sin 0}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

उदाहरण 9 : $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t\,dt$ का मान ज्ञात करने के लिए $x^2 = u$ लीजिए।

तब $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^u \sin t\,dt$

$$= \frac{d}{du}\left(\int_0^u \sin t\,dt\right) \cdot \frac{du}{dx}$$

अब, $\frac{du}{dx} = 2x$.

कलन के मूलभूत प्रमेय (भाग 2) को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$\frac{d}{du}\int_0^u \sin t\,dt = \sin u = \sin x^2$.

इस तरह, $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t\,dt = 2x . \sin x$

उदाहरण 9 से निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x)).g'(x).$$

यदि आपने इन उदाहरणों को अच्छी तरह से समझ लिया है तो आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं। ध्यान रहे कि निश्चित समाकल का मान ज्ञात करते समय मुख्य कार्य दिए हुए फलन का प्रति-अवकलज ज्ञात करना होता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E 12) नीचे दी गई तालिका के दूसरे स्तंभ में, पहले स्तंभ में दिए गए फलनों के प्रति-अवकलज हैं। उचित संख्याओं का युग्म बनाकर फलन का उसके प्रति-अवकलज के साथ जोड़ा बनाइये।

उदाहरण के लिए, हम x^n का $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ के साथ जोड़ा बना सकते हैं क्योंकि $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, x^n का प्रति-अवकलज है। इसे हम iii) → viii) से प्रकट करेंगे।

फलन		प्रति अवकलज	
i)	$\sin x$	i)	$\ln \cos x$
ii)	$\cos x$	ii)	$\ln \cosh x$
iii)	x^n	iii)	$\text{sech}\, x$
iv)	e^{ax}	iv)	$-\cos x$
v)	$\tan x$	v)	$\sin x$
vi)	a	vi)	$\frac{1}{a} e^{ax}$
vii)	$\tanh x$	vii)	ax
viii)	$\text{sech}\, x \tanh x$	viii)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

E E 13) कलन के मूलभूत प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित समकलों का मान ज्ञात कीजिए।

क) $\int_1^3 2x^3\, dx$ ख) $\int_1^3 (2x^2 + 2x + 1)\, dx$

ग) $\int_1^2 x(x+1)^2\, dx$ घ) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$

ङ) $\int_0^2 x(x^2+1)^2\, dx$ च) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x + \sin x)\, dx$

छ) $\int_0^{\pi} (x - \cos x)\, dx$ ज) $\int_0^4 e^x\, dx$

झ) $\int^1 \sinh x \cdot \cosh x\, dx$ ञ) $\int^1 (\sinh x - \cosh x)\, dx$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 14) $\frac{d}{dx}[F(x)]$ ज्ञात कीजिए जबकि F(x) निम्नलिखित निश्चित समाकलों से परिभाषित हो।

क) $\int_a^x \sqrt{1+t^2}\, dt$

घ) $\int_x^{x^2} \cos t^2\, dt$

ख) $\int_0^{x^2} \sqrt{\sin t + \cos t}\, dt$

ङ) $\int_{\sqrt{x}}^{x^2} t\sqrt{1-t^2}\, dt$

ग) $\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (t^3 - 2t + 1)\, dt$

10.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1) संवृत अंतराल [a, b] का विभाजन P एक समुच्चय $\{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ होता है जबकि $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$

2) [a, b] का विभाजन P_1, विभाजन P_2 से अधिक अधिशोधित होता है जबकि $P_1 \supseteq P_2$.

3) यदि M और m, [a, b] में परिबद्ध फलन f के उच्चक और निम्नक हों, तो [a, b] के किसी दिए हुए विभाजन P के लिए

$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

4) किसी परिबद्ध फलन का निम्न समाकल उसके उपरि समाकल से कम अथवा उसके बराबर होता है।

5) एक परिबद्ध फलन f, [a, b] पर समाकलनीय होता है यदि और केवल यदि इसके निम्न समाकल और उपरि समाकल समान हों। ऐसी स्थिति में निम्न (या उपरि) समाकल को [a, b] पर f का निश्चित समाकल कहा जाता है। और इसे $\int_a^b f(x)\,dx$ से प्रकट किया जाता है।

6) यदि [a, b] पर f एकदिष्ट अथवा संतत हो, तो f, [a, b] पर समाकलनीय होता है।

7) यदि f, [a, b] पर संतत हो, तो ज्यामितीय रूप में $\int_0^b f(x)\,dx$ वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष और $x = a$ तथा $x = b$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र के चिह्नित क्षेत्रफल को प्रकट करता है।

8) यदि f, [a, b] पर एकदिष्ट हो तो $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih) = \lim_{h\to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(a + (i - 1)h)$ जहां $h = \frac{b - a}{n}$

9) कलन का मूलभूत प्रमेय :

i) यदि f, [a, b] पर संतत हों, तो $x \in [a, b]$ के लिए $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$

ii) यदि f, [a, b] पर संतत हो और $x \in]a, b[$ के लिए $F'(x) = f(x)$, तो

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$

10.6 हल और उत्तर

E 1) $P_1, P_1 \cap P_2$ सम विभाजन हैं।

P_1 में $\Delta x_3 = 1/4$, P_2 में $\Delta x_3 = \frac{1}{6}$

E 2) क) $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 2\}$

ख) $\{2, 2\frac{7}{10}, 3\frac{2}{5}, 4\frac{1}{10}, 4\frac{4}{5}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{5}, 6\frac{9}{10}, 7\frac{3}{5}, 8\frac{3}{10}, 9\}$

E 3) a) $P_2 = \{a, \frac{3a + b}{4}, \frac{a + b}{2}, \frac{a + 3b}{4}, b\}$

b) $P_3 = \{a, \frac{7a + b}{8}, \frac{3a + b}{4}, \frac{5a + 3b}{8}, \dots, b\}$

c) P_2 में $\Delta x = \frac{b-a}{4}$ P_3 में $\Delta x = \frac{b - a}{8}$.

E 4) $P^*_{n+1} = P_{n+1} \cup P^*_n \implies P^*_n \subset P^*_{n+1} \implies P^*_{n+1}, P^*_n$ का अधिशोधन है. $\forall n$.

E 5) क) [0,2] पर f(x) वर्धमान है। इसलिए

$$L(P, f) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

और $U(P, f) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2}$

ख) [1, 4] पर f ह्रासमान है। इसलिए

$$L(P, f) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1$$

$$U(P, f) = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1$$

E 6) $L(P_1, f) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{30}$

$U(P_1, f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{20}$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$L(P_2, f) = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{11}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2289}{5940}$$

$$U(P_2, f) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{11}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1691}{3960}$$

$$L(P_1, f) \le L(P_2, f) \le U(P_2, f) \le U(P_1, f).$$

E 7) यदि $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $[0, 1]$ का एक विभाजन है, तो

$$L(P, f) = U(P, f) = \Sigma m_i \Delta x_i = \Sigma 2\Delta x_i = 2\Sigma\Delta x_i = 2.1 = 2$$

अतः $\int_0^1 f(x)\, dx = \overline{\int_0^1} f(x)\, dx = 2$

E 8) यदि $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$, $[a, b]$ का कोई विभाजन हो, तो

$L(P, f) = \Sigma m_{i,f}\, \Delta x_i \le \Sigma m_{i,g}\, \Delta x_i = L(P, g)$,
जहाँ $m_{i,f} = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ और

$m_{i,g} = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

और $m_{i,f} \le m_{i,g}$ क्योंकि $f(x) \le g(x)\ \forall\ x$.

$\therefore\ U(P, f) \le U(P, g)\ \forall\ P$. इस तरह परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E 9) $f(x) = 2$ समाकलनीय है।

E 10) क), ख), ङ) और छ) समाकलनीय हैं, क्योंकि ये संतत हैं।
ग), च) समाकलनीय नहीं हैं, क्योंकि ये परिबद्ध नहीं हैं।
घ), ज) समाकलनीय हैं क्योंकि ये वर्धमान फलन हैं।

E 11) $\int_1^2 (1 + x)\, dx = \lim_{h\to 0} [2 + 2 + \frac{1}{n} + 2 + \frac{2}{n} + 2 + \frac{3}{n} + \ldots + 2 + \frac{n-1}{n}]$,

$h = \frac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, [2n + \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + (n-1))]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [2 + \frac{n(n-1)}{2n^2}] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

E 12) i) → iv)
ii) → v)
iii) → viii)
iv) → vi)
v) → i)
vi) → vii)
vii) → ii)
viii) → iii)

E 13) क) $\frac{x^4}{2}$, $2x^3$ का एक प्रति-अवकलज है। अतः

$$\int_1^3 2x^3 dx = \left.\frac{x^4}{2}\right]_1^3 = \frac{81}{2} - \frac{1}{2} = 40$$

ख) $$\int_1^3 (2x^2 + 2x + 1)\, dx = \left.\frac{2x^3}{3} + x^2 + x\right]_1^3$$

$$= 18 + 9 + 3 - \left(\frac{2}{3} + 1 + 1\right) = 27\frac{1}{3}.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

ग) $\frac{119}{12}$ घ) 1 ङ) $\frac{62}{3}$

च) 0 छ) $\frac{\pi^2}{2}$ ज) $\frac{1}{2}(e^8 - 1)$

झ) $\left.\frac{\sinh^2 x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{8}(e^2 + e^{-2} - 2)$ ञ) $e^{-1} - e$

E 14 क) $\sqrt{1 + x^2}$

ख) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{\sin t + \cos t}\, dt = \frac{d}{dx^2}\int_0^{x^2} \sqrt{\sin t + \cos t}\, dt \cdot \frac{dx^2}{dx}$

$= \sqrt{\sin x^2 + \cos x^2} \cdot 2x$

ग) $\frac{d}{dx}\int_0^{1-x^2} (t^3 - 2t + 1)\, dt = ((\sqrt{1 - x^2})^3 - 2\sqrt{1 - x^2} + 1) \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{1 - x^2}$

$= x\left(1 + x^2 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

घ) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \cos t^2\, dt = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2} \cos t^2\, dt - \int_0^x \cos t^2\, dt\right]$

$= 2x \cos x^4 - \cos x^2$

ङ) $\frac{d}{dx}\left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} t\sqrt{1 - t^2}\, dt\right) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2} t\sqrt{1 - t^2}\, dt - \int_0^{\sqrt{x}} t\sqrt{1 - t^2}\, dt\right]$

$= 2x^3 \sqrt{1 - x^4} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x}$

10.7 शब्दावली

अधिशोधन	refinement
अनिश्चित समाकल	indefinite integral
अनुक्रम	sequence
असमिका	inequality
उप-अंतराल	sub-interval
निश्चित समाकल	definite integral
परिबद्ध फलन	bounded function
प्रति-अवकलज	antiderivative
मूक चर	dummy variable
विभाजन	partition
सम विभाजन	regular partition
समाकलनीयता	integrability
समाकल्य	integrand

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इकाई 11 समाकलन की विधियाँ

इकाई की रूपरेखा

11.1 प्रस्तावना	29
उद्देश्य	
11.2 आधारभूत परिभाषाएँ	29
मानक समाकल	
समाकलों का बीजगणित	
11.3 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन	35
प्रतिस्थापन-विधि	
त्रिकोणमितीय सूत्रों की सहायता से समाकलन	
त्रिकोणमितीय तथा अतिपरवलयिक प्रतिस्थापन	
निश्चित समाकल के दो गुणधर्म	
11.4 खंडश: समाकलन	49
दो फलनों के गुणनफल का समाकल	
$\int e^{ax}\sin bx\,dx$ और $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ का परिकलन	
$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ और $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ का परिकलन	
$\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ जैसे समाकल	
11.5 साराश	61
11.6 हल और उत्तर	62
11.7 शब्दावली	69

11.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने यह देखा है कि निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष और रेखाओं $x = a$ तथा $x = b$ से परिबद्ध चिह्नित क्षेत्रफल को निरूपित करता है। पहले दिए हुए फलन का प्रति अवकलज (यदि उसका अस्तित्व हो तो) प्राप्त करके इस प्रकार के समाकल का मान ज्ञात करने की एक सरल विधि कलन के मूलभूत प्रमेय से प्राप्त हो जाती है। इस इकाई से हम समाकलन की विभिन्न विधियों और तकनीकों का अध्ययन प्रारंभ कर रहे हैं। इस इकाई में हम दो मुख्य विधियों, अर्थात् प्रतिस्थापन विधि और खंडश: समाकलन विधि पर विचार करेंगे। अगली दो इकाइयों में कुछ विशेष प्रकार के समाकलों का उल्लेख करेंगे जिनका परिकलन इन दो विधियों का प्रयोग करके किया जा सकता है।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप :

- फलन के अनिश्चित समाकल को परिभाषित कर सकेंगे,
- समाकल्यों के प्रति-अवकलज प्राप्त करके कुछ मानक समाकलों का मान ज्ञात कर सकेंगे,
- कुछ समाकलों को सरल करने और उनके मान ज्ञात करने के लिए प्रतिस्थापन-विधि का प्रयोग कर सकेंगे,
- दो फलनों के गुणनफल का खंडश: समाकलन कर सकेंगे।

11.2 आधारभूत परिभाषाएं

इकाई 10 में हम यह देख चुके हैं कि किसी फलन का प्रति अवकलज अद्वितीय नहीं होता। अधिक परिशुद्ध रूप में हमने यह देखा है कि यदि कोई फलन F किसी फलन f का प्रति अवकलज हो तो F + c भी f का प्रति-अवकलज होता है, जहां c एक स्वेच्छ अचर है। यहां हम एक और संकेत का प्रयोग करेंगे। हम प्रतीक $\int f(x)\,dx$ का प्रयोग f के सभी प्रति-अवकलजों के समूह को प्रकट करने के लिए करेंगे। इसे हम f का अनिश्चित (indefinite integral) या केवल समाकल कहते हैं।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि यहां भी हम उसी प्रतीक $\int$ का प्रयोग कर रहे हैं जिसका प्रयोग हमने इकाई 10 में निश्चित समाकलों के लिए किया है। इस तरह, यदि F(x), f(x) का एक प्रति-अवकलज हो तो हम $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ लिख सकते हैं। इस c को समाकलन-अचर कहा जाता है। निश्चित समाकलन की तरह यहां f(x) को समाकल्य कहा जाता है और dx यह सूचित करता है कि f(x) को चर x के सापेक्ष समाकलित किया गया है। उदाहरण के लिए समीकरण :

$$\int (av + b)^4\,dv = \frac{(av + b)^5}{5a} + c$$

में $(av + b)^4$ समाकल्य है, v समाकलन का चर है और $\frac{(av + b)^5}{5a} + c$, समाकल्य $(av + b)^4$ का समाकल है।

आप इस बात से भी सहमत होंगे कि cos x का अनिश्चित समाकल sin x + c होता है, क्योंकि हम जानते हैं कि sin x, cos x का एक प्रति-अवकलज है। इसी प्रकार e^{2x} का अनिश्चित समाकल

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

है और $x^3 + 1$ का अनिश्चित समाकल

$$\int (x^3 + 1)\,dx = \frac{x^4}{4} + x + c \text{ है।}$$

हम इकाई 10 में यह देख चुके हैं कि $\int_a^b f(x)\,dx$ एक अद्वितीयतः परिभाषित वास्तविक संख्या है जिसका मान a, b और फलन f पर निर्भर करता है।

इसके विपरीत, अनिश्चित समाकल $\int f(x)\,dx$ उन फलनों का एक समूह है जिनमें केवल अचरों का अंतर होता है। क्योंकि यह एक निश्चित संख्या नहीं होती और क्योंकि यह एक निश्चित फलन भी नहीं होता, इसलिए हम यह कहते हैं कि अनिश्चित समाकल एक स्वेच्छ अचर तक अद्वितीय होता है।

जहां निश्चित समाकल a, b और f निर्भर करता है, वहाँ अनिश्चित समाकल केवल f पर निर्भर करता है।

निश्चित समाकल के संकेत $\int_a^b f(x)\,dx$ के सभी प्रतीकों का अपना एक अर्थ होता है। प्रतीक $\int$ हमें **संकलन** (summation) **की याद दिलाता है, a और b समाकलन में x की सीमाएं होती हैं, और** f(x) dx से यह पता चलता है कि हम न केवल फलन मानों के योगफल पर विचार कर रहे हैं बल्कि हम फलन मानों के x की लघु वृद्धियों से गुणनफलों के योगफल पर विचार कर रहे हैं।

परन्तु अनिश्चित समाकल के साथ संकेत $\int f(x)\,dx$ का इस प्रकार का कोई विवेचन नहीं होता। अनिश्चित समाकल के लिए इस संकेत की प्रेरणा कलन के मूलभूत प्रमेय से **प्राप्त होती है।**

इस तरह अनिश्चित समाकल को परिभाषित कर लेने के बाद आइए अब हम समाकलों के परिकलन की विभिन्न विधियों से परिचित हो लें।

11.2.1 मानक समाकल

यदि समाकल सूत्रों की एक ऐसी सूची अथवा एक ऐसी समाकल तालिका उपलब्ध हो जिसमें हम उन सभी समाकलों को देख सकें जिनका परिकलन हम करना चाहते है, तो समाकलन की विधि एक अतिसरल विधि बन जाएगी। परंतु वास्तव में समाकलन इतने भिन्न-भिन्न प्रकार के होते हैं कि इस प्रकार की तालिका बनाना केवल असंभव है। इस समस्या का एक हल यह है कि प्राथमिक फलनों के समाकलों की एक लघु-तालिका बनायी जाए और उन विधियों से परिचित हुआ जाए जिनसे हम इस लघु-तालिका के अनुप्रयोगों का परास बढ़ा सकें। इस तथ्य को ध्यान में रखकर हमने मानक प्रकार के समाकल-सूत्रों की तालिका बनायी है। (तालिका 1)। इसके लिए हमने अवकलजों के उन सूत्रों का प्रतिलोमन किया है, जिनका अध्ययन आप खंड 1 में कर चुके हैं।

जांच कीजिए कि तालिका में दिए गए प्रत्येक समाकल का अवकलज, दिया हुआ संगत फलन ही है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

तालिका 1

क्र. संख्या	फलन	समाकल
1.	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq 1$
2.	$\sin x$	$-\cos x + c$
3.	$\cos x$	$\sin x + c$
4.	$\sec^2 x$	$\tan x + c$
5.	$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\cot x + c$
6	$\sec x \tan x$	$\sec x + c$
7.	$\operatorname{cosec} x \cot x$	$-\operatorname{cosec} x + c$
8.	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x + c$, or $-\cos^{-1} x + c$
9.	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x + c$ or $-\cot^{-1} x + c$
10.	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\sec^{-1} x + c$ or $-\operatorname{cosec}^{-1} x + c$
11.	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
12.	e^x	$e^x + c$
13.	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
14.	$\sinh x$	$\cosh x + c$
15.	$\cosh x$	$\sinh x + c$
16.	$\operatorname{sech}^2 x$	$\tanh x + c$
17.	$\operatorname{cosech}^2 x$	$-\coth x + c$
18.	$\operatorname{sech} x \tanh x$	$-\operatorname{sech} x + c$
19.	$\operatorname{cosech} x \coth x$	$-\operatorname{cosech} x + c$

आइए अब हम तालिका 1 में दिए गए फलनों के रैखिक संयोजन से प्राप्त फलनों के मान निकालने की विधि पर विचार करें।

11.2.2 समाकलों का बीजगणित

आप निम्नलिखित अवकलन-नियम से परिचित हैं।

$$\frac{d}{dx}[a\,f(x) + b\,g(x)] = a\frac{d}{dx}[f(x)] + b\frac{d}{dx}[g(x)].$$

ठीक इसी प्रकार का एक नियम समाकलन के लिए भी है।

नियम 1 : $\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

यह नियम निम्नलिखित दो प्रमेयों से प्राप्त होता है।

प्रमेय 1 : यदि f एक समाकलनीय फलन हो, तो kf(x) भी समाकलनीय फलन होता है और

$\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

उपपत्ति : मान लीजिए $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

तब, परिभाषा के अनुसार

$$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[k\{F(x) + c\}\right] = k\,f(x)$$

और, फिर परिभाषा के अनुसार,

$\int k f(x)\,dx = k[F(x) + c] = k\int f(x)\,dx$

प्रमेय 2 : यदि f और g दो समाकलनीय फलन हों, तो f + g समाकलनीय होता है और
$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

उपपत्ति : मान लीजिए $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $\int g(x)\,dx = G(x) + c$.

तब, $\frac{d}{dx}\left[\{F(x) + c\} + \{G(x) + c\}\right] = f(x) + g(x)$

इस तरह,

$\int [f(x) + g(x)]\,dx = [F(x) + c] + [G(x) + c] = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

नियम 1 को परिमित संख्या में लिए गए फलनों पर भी लागू किया जा सकता है। अर्थात् हम यह लिख सकते हैं कि

नियम 2 : $\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)]\,dx$

$= k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + \cdots + k_n\int f_n(x)\,dx$

हम इस नियम का प्रयोग कुछ और समाकलों के मान निकालने में करते हैं जिन्हें तालिका 1 में नहीं दिया गया है।

उदाहरण 1 : $\int (x + \frac{1}{x})^3\,dx$ का मान ज्ञात करें।

हम जानते हैं कि

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ इसलिए

$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx = \int \left(x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) dx$

$= \int x^3\,dx + 3\int x\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx$, नियम 2 से।

तालिका 1 के समाकल-सूत्रों 1 और 11 का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx = \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) + 3\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 3(\ln|x| + C_3) + \left(\frac{x^{-2}}{-2} + C_4\right)$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 + 3\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + (C_1 + 3C_2 + 3C_3 + C_4)$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 3\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$$

ध्यान दीजिए कि $C_1 + 3C_2 + 3C_3 + C_4$ के स्थान पर एक स्वेच्छ अचर C का प्रयोग किया गया है।

उदाहरण 2 : मान लीजिए हम $\int (2 + 3\sin x + 4e^x)\,dx$ का मान निकालना चाहते हैं। समाकल को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$2\int dx + 3\int \sin x\,dx + 4\int e^x dx$

$= 2x - 3\cos x + 4e^x + C$

ध्यान दीजिए कि

$\int dx = \int 1\,dx = \int x^0 dx = x + C$

उदाहरण 3 : निश्चित समाकल $\int_0^1 (x + 2x^2)^2\,dx$ का मान निकालने के लिए पहले हम अनिश्चित समाकल $\int (x + 2x^2)^2\,dx$ का परिकलन करते हैं। इस तरह,

$\int (x + 2x^2)^2\,dx = \int (x^2 + 4x^3 + 4x^4)\,dx$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$= \int x^2dx + 4\int x^3dx + 4\int x^4dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + x^4 + \frac{4}{5}x^5 + C$

अनिश्चित समाकल की हमारी परिभाषा के अनुसार, C के एक दिए हुए मान के लिए $(x + 2x^2)^2$ का एक प्रति-अवकलज प्राप्त होता है। कलन के मूलभूत प्रमेय का प्रयोग करके अब हम निश्चित सभाकल का मान ज्ञात कर सकते हैं।

$\int_0^1 (x + 2x^2)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + x^4 + \frac{4}{5}x^5 + C \Big]_0^1$

$= \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{5} + C\right) - C = \frac{32}{15}.$

कलन के मूलभूत प्रमेय के अनुसार यदि G(x), f(x) का एक प्रतिअवकलज हो, तो

$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)]_a^b$
$= G(b) - G(a).$

ध्यान दीजिए कि निश्चित समाकल का मान निकालने के लिए हम $C = 0$ के संगत प्रति-अवकलज, अर्थात् $\frac{1}{3}x^3 + x^4 + \frac{4}{5}x^5$ ले सकते हैं, क्योंकि अचर का तो निरसन हो जाता है।

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E E 1) तालिका 1 और नियम 2 का प्रयोग करके निम्नलिखित फलनों के समाकल लिखिए।

क) (i) x^4 (ii) $x^{-3/2}$ (iii) $4x^{-2}$ (iv) 3

ख) (i) $1 - 2x + x^2$ (ii) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ (iii) $(1 + x)^3$

ग) (i) $e^x + e^{-x} + 4$ (ii) $4\cos x - 3\sin x + e^x + x$

(iii) $4\,\mathrm{sech}^2 x + e^x - 8x$

घ) (i) $\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{5}{x}$ (ii) $\frac{2x^2 + 5}{x^2 + 1}$

ङ) (i) $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (ii) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

च) (i) $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ (ii) $(2 + x)(3 - \sqrt{x})$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E 2) निम्नलिखित निश्चित समाकलों के मान निकालिए।

क) (i) $\int_{5}^{6} x^4 \, dx$ (ii) $\int_{1}^{2} \frac{1 + x}{x^2} \, dx$

ख) (i) $\int^{4} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ (ii) $\int_{0}^{1} (x + 1)^3 dx$

आप यह जानते हैं कि निमय 2 की सहायता से हम अनेक समाकलों के मान निकाल सकते हैं। पर $\int \sin 2x\, dx$ जैसे अनेक समाकल हैं जिनका मान नियम 2 की सहायता से नहीं निकाला जा सकता। इस तरह के समाकल के मान निकालने में प्रतिस्थापन-विधि (method of substitution) जिसका उल्लेख हम अगले भाग में करने जा रहे हैं, काफ़ी सहायक होती हैं।

11.3 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन

इस इकाई में हम जिन मुख्य समाकलन विधियों का अध्ययन करने जा रहे हैं, उनमें से पहली विधि, प्रतिस्थापन-विधि की चर्चा हम इस भाग में करेंगे। समाकलों का परिकलन करने में इस विधि का प्रयोग काफ़ी किया जाता है। कुछ उदाहरण लेकर हम इस विधि को समझाने का प्रयास करेंगे।

11.3.1 प्रतिस्थापन-विधि

यह विधि हमें निम्नलिखित प्रमेय से प्राप्त हो जाती है।

प्रमेय 3 : यदि $\int f(v)\, dv = F(v) + C$, तो v के स्थान पर g(x) प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$\int f\{g(x)\}\, g'(x)\, dx = \int f(v)\, dv$$

प्राप्त होता है।

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम अवकलनों के शृंखला-नियम (इकाई 3) का प्रयोग करेंगे। क्योंकि $\int f(v)\, dv = F(v) + c$, इसलिए हम $\frac{dF(v)}{dv} = f(v)$ लिख सकते हैं। अब, यदि हम v को x के एक फलन, मान लीजिए $v = g(x)$ के रूप में लिखें, तो

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = \frac{dF[g(x)]}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \text{ शृंखला नियम से}$$

$$= f[g(x)] \cdot \frac{dg(x)}{dx}, \text{ क्योंकि } v = g(x)$$

$$= f[g(x)] \cdot g'(x).$$

इससे पता चलता है कि F [g(x)], f [g(x)] g′(x) का x के सापेक्ष एक प्रति-अवकलज है। अर्थात्

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx = F[g(x)] + c = F(v) + c = \int f(v)\, dv.$$

संभवतः इस प्रमेय का कथन आपके लिए अधिक उपयोगी नहीं जान पड़ता हो पर यह प्रमेय समाकलों का मान निकालने की प्रक्रिया को काफ़ी सरल बना देता है। उदाहरण के लिए, $\int \sin 2x\, dx$ का मान निकालने के लिए हम $v = g(x) = 2x$ ले सकते हैं और

$$\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x\, (2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin v\, dv \quad \text{(प्रमेय 3 से क्योंकि } g(x) = 2x \text{ और } g'(x) = 2.)$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= -\frac{-\cos v}{2} + c$$

$$= \frac{\cos 2x}{2} + c$$

हम यहां प्रमेय 3 से संबंधित निम्नलिखित तीन स्थितियों का विशेष उल्लेख करना चाहते हैं।

स्थिति i) : यदि $f(v) = v^n, n \neq -1$ और $v = g(x)$, तो तालिका 1 के सूत्र 1 के अनुसार

$$\int [g(x)]^n g'(x)\, dx = \int \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

स्थिति ii) : यदि $f(v) = \frac{1}{v}$ और $v = g(x)$, तो तालिका 1 के सूत्र 11 के अनुसार

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln |g(x)| + c$$

स्थिति iii) : यदि $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, तो

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(v)\, dv, \text{ जहां } v = g(x)$$

$$= F(v)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

क्योंकि $x = a \Rightarrow v = g(x) = g(a)$, और
$x = b \Rightarrow v = g(x) = g(b)$.

इन तीनों स्थितियों का प्रयोग हम बार-बार करेंगे। नीचे दिए गए उदाहरणों से इनकी उपयोगिता का पता चलता है।

उदाहरण 4 : आइए $(2x + 1)(x^2 + x + 1)^5$ का समाकलन करें।

हम जानते हैं कि $\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) = 2x + 1$.

इस तरह, $\int(2x + 1)(x^2 + x + 1)^5 dx$, $\int[g(x)]^n g'(x)\, dx$ के रूप का है। अतः स्थिति i) की तरह इसका मान निकाला जा सकता है।

इसलिए $\int(2x + 1)(x^2 + x + 1)^5 dx = \frac{1}{6}(x^2 + x + 1)^6 + c$.

वैकल्पिक विधि : $\int(2x + 1)(x^2 + x + 1)^5 dx$ का परिकलन करने के लिए हम $x^2 + x + 1$ के स्थान पर u प्रतिस्थापित कर सकते हैं। इसका यह अर्थ निकलता है कि

$$\frac{du}{dx} = 2x + 1$$

इसलिए $\int(2x + 1)(x^2 + x + 1)^5 dx = \int u^5\, du$ (प्रमेय 3 के अनुसार)

$= \frac{1}{6} u^6 + c$ (तालिका 1 के सूत्र 1 के अनुसार)

$= \frac{1}{6}(x^2 + x + 1)^6 + c$

उदाहरण 5 : $\int(ax + b)^n dx$ का परिकलन करने के लिए हम लिखते हैं

$$\int(ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \int a(ax + b)^n dx$$

$$= \frac{1}{a}\int(ax + b)^n \frac{d}{dx}(ax + b).\, dx$$

इसलिए, यदि $n \neq -1$, तो

$$\int(ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

और यदि $n = -1$, तो

$$\int(ax + b)^n dx = \int\frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

उदाहरण 6 : मान लीजिए हम निश्चित समाकल $\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$

का मान निकालना चाहते हैं।

यहा $x^2+2x+3 = u$ लीजिए। अंतः $\frac{du}{dx} = 2(2x+1)$. और, जब $x = 0$ तो $u = 3$. तथा जब $x = 2$ तो $u = 11$. इस तरह $\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{u}\frac{du}{dx}dx = \frac{1}{2}\int_3^{11}\frac{du}{u}$

$$= \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_3^{11}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 11 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{3}$$

उदाहरण 7 : $\int xe^{2x^2}dx$ का परिकलन करने के लिए हम $2x^2 = u$ लेते हैं। क्योंकि $\frac{du}{dx} = 4x$,

इसलिए हम यह लिख सकते हैं कि

$$\int xe^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{2x^2}4x\,dx = \frac{1}{4}\int e^u\frac{du}{dx}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u + c$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x^2} + c.$$

इस भाग में बताए गए नियमों की सहायता से आप निम्नलिखित प्रश्न को हल कर सकते हैं।

E E 3) निम्नलिखित को परिकलित कीजिए :

क) $\int\sqrt{5x-3}\,dx$ ख) $\int(2x+1)^6\,dx$

ग) $\int\frac{dx}{4+5x}$ घ) $\int\frac{5dx}{10x+7}$

ङ) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+7}dx$ च) $\int_2^3\frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x-8}$

छ) $\int x^{1/3}\sqrt{x^{4/3}-1}\,dx$ ज) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2}}$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अब हम कुछ त्रिकोणमितीय फलनों का समाकलन करने के लिए प्रतिस्थापन-विधि का प्रयोग करेंगे। आइए sin ax से आरंभ करें।

उदाहरण 8 : $\int \sin ax\, dx$ का मान निकालने के लिए हम ठीक वही प्रक्रिया लागू करेंगे जो कि हमने $\int \sin 2x\, dx$ का मान निकालने में लागू की थी। इसके लिए हम $ax = u$ लेते हैं। इससे $\frac{du}{dx} = a$ प्राप्त होता है। इस तरह,

$$\int \sin ax\, dx = \frac{1}{a}\int \sin u . \frac{du}{dx} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \sin u\, du = \frac{-\cos u}{a} + c$$

$$= -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

E 4) ठीक उदाहरण 8 की प्रक्रिया लागू करके नीचे दी गई तालिका में खाली स्थानों को भरिए।

क्र. संख्या	f(x)	$\int f(x)\, dx$
1.	sin ax	$-\frac{1}{a}\cos ax + c$
2.	cos ax	$\frac{1}{a}\sin ax + c$
3.	$\sec^2 ax$	______
4.	$\text{cosec}^2 ax$	______
5.	sec ax tan ax	______
6.	cosec ax cot ax	______
7.	e^{ax}	______
8.	a^{mx}	______

उदाहरण 9 : मान लीजिए हम

(i) $\int \cot x\, dx$, (ii) $\int \tan x\, dx$ और (iii) $\int \text{cosec}\, 2x\, dx$

के मान निकालना चाहते हैं।

i) हम यह लिख सकते हैं कि

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

अब, क्योंकि $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$,

इसलिए यह समाकल पहले उल्लेख की गई स्थिति (ii) के अंतर्गत आता है। अत:
$\int \cot x\, dx = \ln |\sin x| + c.$

ii) $\int \tan x\, dx$ का मान निकालने के लिए हम यह लिखते हैं कि

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sec x \tan x}{\sec x} dx$$

$$= \ln|\sec x| + c, \text{ क्योंकि } \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x.$$

iii) cosec 2x का समाकलन करने के लिए हम

$$\int \text{cosec}\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\,\text{cosec}\, 2x\,(\text{cosec}\, 2x - \cot 2x)}{\text{cosec}\, 2x - \cot 2x} dx$$ लिखते हैं।

यहां, $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\, 2x - \cot 2x) = 2\,\text{cosec}\, 2x\,(\text{cosec}\, 2x - \cot 2x)$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अर्थात् $\int \text{cosec } 2x \, dx = \frac{1}{2} \ln |\text{cosec } 2x - \cot 2x| + c.$

इस उदाहरण में हमने समाकल्य को मानक रूप में लाने के लिए एक चाल चली है। विभिन्न प्रकार के उदाहरणों का अध्ययन कर लेने और अनेक प्रश्नों को हल कर लेने के बाद आप खुद जान जाएंगे कि कहां पर कौन-सा विशेष प्रतिस्थापन करना चाहिए अथवा कौन-सी विशेष चालाकी चलनी चाहिए, जिससे कि दिया हुआ समाकल्य ज्ञात रूप का समाकल्य हो जाए। आइए इस संबंध में अब हम अगला उदाहरण लें।

उदाहरण 10 : हम $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x \, dx$ का मान ज्ञात करें।

यदि हम $\sin^2 x = u$ लें, तो $\frac{du}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$

इसलिए
$$\int e^{\sin^2 x} \sin 2x \, dx = \int e^u du$$
$$= e^u + c$$
$$= e^{\sin^2 x} + c.$$

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E E 5) निम्नलिखित समाकलों का परिकलन कीजिए :

क) $\int \sec x \, dx$

ख) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$

ग) $\int e^{\tan x} \sec^2 x \, dx$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

11.3.2 त्रिकोणमितीय सूत्रों की सहायता से समाकलन

इस भाग में हम निम्नलिखित त्रिकोणमितीय सूत्रों की सहायता से समाकलों के मान निकालेंगे।

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin (m + n) x + \sin (m - n) x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos (m + n) x + \cos (m - n) x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos (m - n) x - \cos (m + n) x]$$

इन सूत्रों में आप यह देख रहे होंगे कि प्रत्येक का वाम पक्ष (left hand side) या तो त्रिकोणमितीय फलन की घात है या दो त्रिकोणमितीय फलनों का गुणनफल है। और दायां पक्ष दो त्रिकोणमितीय फलनों का योग (या अंतर) है। आप यह भी देखेंगे कि उचित प्रतिस्थापन करके दाएं पक्ष का समाकलन सरलता से किया जा सकता है।

नीचे दिए गए उदाहरणों से आपको पता चल जाएगा कि किस प्रकार ऊपर दिए गए सूत्रों की सहायता से कुछ समाकलों के मान निकाले जा सकते हैं।

उदाहरण 11 : $\int \cos^3 ax\, dx$ का मान निकालने के लिए हम यह लिखते हैं :

$$\int \cos^3 ax\, dx = \int \left(\frac{3}{4}\cos ax + \frac{1}{4}\cos 3ax\right) dx$$

$$= \frac{3}{4}\int \cos ax\, dx + \frac{1}{4}\int \cos 3ax\, dx$$

$$= \frac{3}{4a}\sin ax + \frac{1}{12a}\sin 3ax + c. \qquad \text{(देखिए E 4)}$$

उदाहरण 12 : आइए अब हम i) $\int \sin 3x \cos 4x\, dx$ और ii) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$ के मान ज्ञात करें।

यहां समाकल्य त्रिकोणमितीय फलनों के गुणनफल के रूप में हैं। इन्हें हम त्रिकोणमितीय फलनों के योगफल के रूप में लिखेंगे जिससे कि इन्हें सरलता से समाकलित किया जा सके।

i) $$\int \sin 3x \cos 4x\, dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + c.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

ii) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$ का मान निकालने के लिए भी हम गुणनफल $\sin x \sin 2x \sin 3x$ को त्रिकोणमितीय फलनों के योग के रूप में व्यक्त करते हैं।

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin x (\cos x - \cos 5x)$$

$$= \frac{1}{2} \sin x \cos x - \frac{1}{2} \sin x \cos 5x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} (\sin 6x - \sin 4x)$$

इसलिए $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$

$$= \frac{1}{4} \int \sin 2x\, dx + \frac{1}{4} \sin 4x\, dx - \frac{1}{4} \int \sin 6x\, dx$$

$$= -\frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x + c.$$

अब आप कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए, आप इन्हें या तो इस भाग के प्रारंभ में उल्लेख किए गए त्रिकोणमितीय सूत्रों को लागू करके, या प्रतिस्थापन-विधि का प्रयोग करके हल कर सकते हैं। समाकलों की संख्या को देखकर आप डरिए मत! आप जितने अधिक समाकलों के मान निकालेंगे उतने ही अधिक निपुण होते जाएंगे। एक दिए हुए समाकल का मान निकालने के लिए कौन-सी विधि उत्तम होगी, इसका निर्णय लेने के योग्य बनने के लिए आपको काफ़ी अभ्यास करना होगा।

E 6) निम्नलिखित समाकलों में प्रत्येक को परिकलित कीजिए :

क) i) $\int \sin^5 x \cos x\, dx$ ii) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

iii) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot 2x \operatorname{cosec}^2 2x\, dx$ iv) $\int \sin 2\theta\, e^{\cos 2\theta}\, d\theta$

v) $\int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 + \cos^4 \theta)\, d\theta$

ख) i) $\int (1 + \cos \theta)^4 \sin \theta\, d\theta$ ii) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sec^2 \theta}{(1 - 5 \tan \theta)^3} d\theta$

iii) $\int_0^{\pi/4} \sec \theta \tan \theta (1 + \sec \theta)^3\, d\theta$

ग) i) $\int \sin^4 \theta\, d\theta$ ii) $\int \sin 3\theta \cos \theta\, d\theta$

iii) $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \cos \theta\, d\theta$ iv) $\int_0^{\pi/2} \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta\, d\theta$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E 7) एक ट्रांजिस्टर का मूल्य रु. 700 है। इसके मूल्य में सूत्र $\frac{dv}{dt} = \frac{-500}{1+t^2}$ के अनुसार कमी आती जाती है, जहां v ट्रांजिस्टर के खरीदने के t साल के बाद का इसका मूल्य है। खरीदने के 3 साल के बाद इस ट्रांजिस्टर का मूल्य क्या होगा? (हल करते समय समाकलन-अचर को मत भूलिए। दी हुई सूचना के आधार पर इस समाकलन अचर को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।)

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

11.3.3 त्रिकोणमितीय तथा अतिपरवलयिक प्रतिस्थापन

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$ आदि, जैसी विभिन्न सर्दसमिकाएं (identities) कुछ समाकलों का मान निकालने में काफ़ी उपयोगी सिद्ध होती हैं। इस भाग में हम यह देखेंगे कि ये सर्वसमिकाएं किस प्रकार हमारे काम आती हैं।

सामान्यत: त्रिकोणमितीय या अतिपरवलयिक प्रतिस्थापन का प्रयोग $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ या $a^2 + x^2$ से संबंधित व्यंजकों का समाकलन करने मे किया जाता है। इसके लिए हम निम्नलिखित प्रतिस्थापनों का प्रयोग करने का सुझाव देते हैं।

निम्नलिखित से संबंधित व्यंजक	प्रतिस्थापन
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan\theta$ या $a \sinh\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec\theta$ या $a \cosh\theta$
$a^2 + x^2$	$x = a \tan\theta$

इस तरह $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ का मान निकालने के लिए $x = a \sin\theta$ लीजिए। तब हम यह जानते हैं कि $\frac{dx}{d\theta} = a \cos\theta$.

अत: हम यह लिख सकते हैं कि

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}}$$

$$= \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + c$$

$$= \sin^{-1}(x/a) + c.$$

इसी प्रकार $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ का मान निकालने के लिए हम $x = a\tan\theta$ लेते हैं। क्योंकि

$\frac{dx}{d\theta} = a\sec^2\theta\, d\theta$, इसलिए

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2 + a^2\tan^2\theta}$$

$$= \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{\theta}{a} + c$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}(x/a) + c.$$

$x = a\tan\theta$ प्रतिस्थापित करके हम $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ का भी मान निकाल सकते हैं। इससे

$\frac{dx}{d\theta} = a\sec^2\theta$ प्राप्त होता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इस तरह, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2+a^2+\tan^2\theta}} = \int \sec\theta\, d\theta$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right| + c.$$

हम $x = a\sinh\theta$ प्रतिस्थापित करके भी इस समाकल का मान निकाल सकते हैं। इस प्रतिस्थापन से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}(x/a) + c.$$

और हम जानते हैं कि $\sinh^{-1}(x/a) = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ (देखिए इकाई 5)

इसी प्रकार, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}(x/a) + c$

$$= \ln \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + c$$

और $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}(x/a) + c.$

आइए अब हम इन परिणामों को एक तालिका के रूप में प्रस्तुत करें।

तालिका 3

क्र. संख्या	f(x)	∫f(x) dx
1	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\sin^{-1}(x/a) + c$
2	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\tan^{-1}(x/a) + c$
3	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$	$\frac{1}{a}\sec^{-1}(x/a) + c$
4	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln\left\|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right\| + c$ or $\sinh^{-1}(x/a) + c$
5	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left\|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right\| + C$ or $\cosh^{-1}(x/a) + c$

कभी-कभी समाकल ऐसे होते हैं जो तालिका 3 में दिए गए समाकल्यों में से किसी से भी मेल नहीं खाते। पर इन समाकल्यों में कुछ ऐसा परिवर्तन किया जा सकता है अथवा इन्हें कुछ ऐसे रूप में रखा जा सकता है जिससे कि वे ऊपर दिए गए समाकल्यों में से किसी न किसी रूप के हो जाएं। हम इस प्रक्रिया को कुछ उदाहरणों की सहायता से प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 13 : मान लीजिए हम $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ का मान निकालना चाहते हैं।

आइए हम $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ को ऐसे रूप में व्यक्त करने का प्रयास करें जो हमारे लिए उपयोगी हो।

आप देखेंगे कि $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

यदि हम $x-1 = v$ लें तो $\frac{dv}{dx} = 1$ और $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

ध्यान दीजिए कि समाकलन सीमाओं में परिवर्तन किया गया है। अंत में हमें समाकल्य उस रूप में प्राप्त हो गया है, जिस रूप में हम चाहते हैं और तब तालिका 3 के प्रथम सूत्र का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \sin^{-1} v\Big]_0^1 = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

उदाहरण 14 : $\int \frac{x^2}{1 + x^6}\, dx$ का समाकल्य तालिका 3 में उल्लेख किए गए प्रकारों में से किसी भी प्रकार से मेल नहीं खाता। आइए देखें कि ऐसी स्थिति में हम क्या कर सकते हैं।

यदि हम $x^2 = u$ लें, तो $\frac{du}{dx} = 3x^2$. इस तरह,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^6}\, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{1 + x^6}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{1 + u^2}\, du \qquad \text{(प्रमेय 3 से)}$$

$x = 0 \Rightarrow u = x^3 = 0$ और
$x = 1 \Rightarrow u = x^3 = 1$

यहां समाकल्य $\frac{1}{1 + u^2}$ का मान तालिका के सूत्र 2 का प्रयोग करके निकाला जा सकता है। इस तरह, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{1 + x^6}\, dx = \frac{1}{3} \tan^{-1} u\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

यदि आपने ऊपर की गई चर्चा को अच्छी तरह से समझ लिया है तो आप नीचे दिए गए प्रश्न को अवश्य हल कर लेंगे।

E E 8) निम्नलिखित में से प्रत्येक का संगत चर के सापेक्ष समाकलन कीजिए :

क) i) $\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{u^2 - 4}}$

iii) $\frac{1}{1 + 4x^2}$ iv) $\frac{dx}{2x^2 + 5}$

ख) i) $\frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}}$ ii) $\frac{t^2}{t^6 + 16}$ iii) $\frac{u^2}{\sqrt{4 - u^6}}$

ग) i) $\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{1 + x + x^2}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{y^2 + 6y + 5}}$

iv) $\frac{x^2}{1 + x^2}$ (संकेत : $\frac{x^2}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2}$)

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

11.3.4 निश्चित समाकल के दो गुणधर्म

हम इकाई 10 में निश्चित समाकल के कुछ गुणधर्म व्युत्पन्न कर चुके हैं, जो निम्नलिखित हैं

i) अचर फलन गुणधर्म $\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$

ii) अचर गुणन गुणधर्म $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

iii) अंतराल सम्मिलन गुणधर्म $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

iv) तुलन गुणधर्म यदि $c \le f(x) \le d \;\forall\; x \in [a, b]$, तो

$$c\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le d\,(b-a)$$

अब हम प्रतिस्थापन-विधि का प्रयोग करके दो और गुणधर्म व्युत्पन्न करेंगे। आइए इन्हें हम एक-एक करके लें।

v) किसी समाकलनीय फलन f के लिए

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{a/2} f(x)\,dx + \int_0^{a/2} f(a-x)\,dx.$$

हम जानते हैं कि $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{a/2} f(x)\,dx + \int_{a/2}^a f(x)\,dx$

यदि हम दाएं पक्ष के दूसरे समाकल में $x = a - y$ लें, तो क्योंकि $\frac{dy}{dx} = -1$, इसलिए

$\int_{a/2}^a f(x)\,dx = -\int_{a/2}^0 f(a-y)\,dy = \int_0^{a/2} f(a-y)\,dy = \int_0^{a/2} f(a-x)\,dx$ क्योंकि x एक मूक चर है।

इस तरह, $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{a/2} f(x)\,dx + \int_0^{a/2} f(a-x)\,dx.$

नीचे दिए गए उदाहरण से आपको इस गुणधर्म की उपयोगिता अच्छी तरह से समझ में आ जाएगी।

उदाहरण 15 : आइए हम i) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^5 x\,dx$ और ii) $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\,dx$ के मान निकालें।

गुणधर्म v) का प्रयोग करने पर

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^5 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x\,dx + \int_0^{\pi/2} \sin^4 (\pi - $$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x\,dx + \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,(-\,co$$

$$= \int \sin^4 x \cos^5 x\,dx - \int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$$

$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$

ii) $$\int_0^{2\pi} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^3 x\,dx + \int_0^{\pi} \cos^3 (2\pi - x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \cos^3 x\,dx + \int_0^{\pi} \cos^3 x\,dx$$

$\cos(2\pi - x) = \cos x$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos^3 x\,dx$$

$$= 2\left[\int^{\pi/2} \cos^3 x\,dx + \int^{\pi/2} \cos^3(\pi - x)\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx - \int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx\right] = 0$$

अगला गुणधर्म कुछ समाकलों को काफ़ी सरल बना देता है जबकि समाकल्य सम अथवा विषम फलन हो।

vi) यदि, f, x का एक सम फलन हो, तो

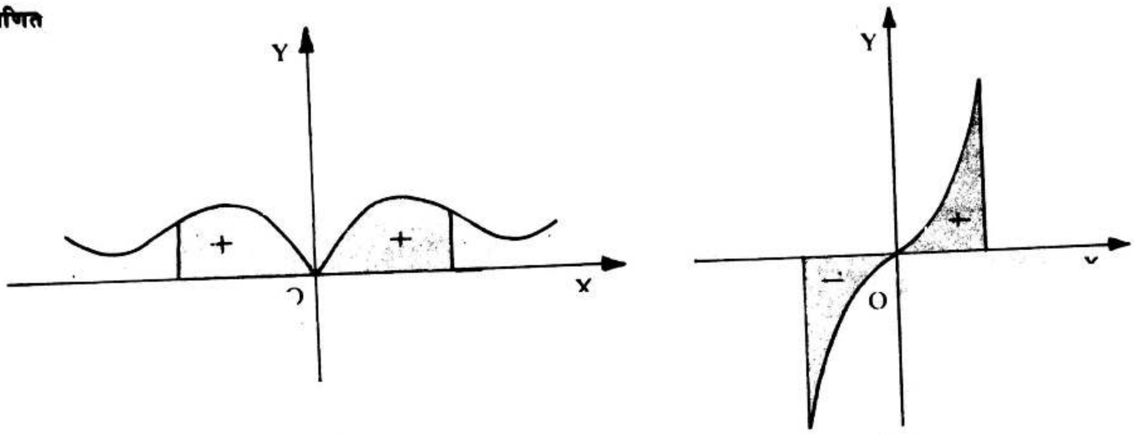
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

और f यदि एक विषम फलन हो, तो

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

यही बात चित्र 1 (क) और (ख) मे भी स्पष्ट है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



(क) (ख)

चित्र 1

हम सम फलन वाले परिणाम को सिद्ध करेंगे। इसकी उपपत्ति को ध्यान में रखकर विषम फलन वाले परिणाम को सरलता से सिद्ध किया जा सकता है। अतः इसे एक प्रश्न के रूप में आपको हल करने के लिए छोड़ दिया जाता है (देखिए E 9 (ग))।

मान लीजिए f, $[-a, a]$ में x का एक सम फलन है, अर्थात् $f(-x) = f(x) \; \forall \; x \in [-a, a]$.

तब, $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$

यदि हम दाएं पक्ष के प्रथम समाकल में $x = -y$ लें, तो

$\int_{a}^{0} f(x)\, dx = -\int_{a}^{0} f(-y)\, dy = \int_{0}^{a} f(y)\, dy = \int_{0}^{a} f(x)\, dx$

इस तरह, $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$

इस गुणधर्म का प्रयोग करके हम यह सीधे कह सकते हैं कि

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, dx = 0, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2 \sin x]_{0}^{\pi/2} = 2.$$

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E E 9) क) $\int_{0}^{\pi} \sin^5 x \cos^3 x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

ख) दिखाइए कि $\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x \ln (\tan x)\, dx = 0$

ग) सिद्ध कीजिए कि यदि f, x का एक विषम फलन है, तो $\int_{a} f(x)\, dx = 0$.

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इस अनुभाग में हमने देखा है कि किस प्रकार प्रतिस्थापन विधि की सहायता से हम समाकलनीय फलनों की सूची में बढ़ोतरी कर सकते हैं। यहां समाकलनीय फलन का अर्थ उस फलन से है जिसे **हम** समाकलित कर सकते हैं! हम अगले भाग में एक अन्य विधि पर विचार करेंगे।

11.4 खंडश: समाकलन

इस भाग में हम $\int u(x)\, v(x)\, dx$ प्रकार के समाकलों का, जिसका समाकल्य दो फलनों का गुणनफल है, परिकलन करने की विधि विकसित करेंगे। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि पहले हम

$$\frac{d}{dx}[u(x)\, v(x)] = u(x)\frac{d}{dx}(v(x)) + v(x)\frac{d}{dx}(u(x))$$

के अनुरूप समाकलों के नियम को विकसित करेंगे और तब इस परिणाम का प्रयोग कुछ मानक समाकलों के मान निकालने में करेंगे।

11.4.1 दो फलनों के गुणनफल के समाकल

हम सूत्र

$$\frac{d}{dx}[u(x)\, v(x)] = u(x)\frac{d}{dx}(v(x)) + v(x)\frac{d}{dx}(u(x))$$

से दो फलनों के गुणनफल का अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। इस सूत्र को हम निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं।

$$u(x)\frac{d}{dx}(v(x)) = \frac{d}{dx}[u(x)\, v(x)] - v(x)\frac{d}{dx}(u(x))$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर :

$$\int u(x)\frac{d}{dx}(v(x))\, dx = \int \frac{d}{dx}[u(x)\, v(x)]\, dx - \int v(x)\frac{d}{dx}(u(x))\, dx \quad \text{या}$$

$$= u(x)\, v(x) - \int v(x)\frac{d}{dx}(u(x))\, dx \qquad \ldots\ldots (1)$$

इसे और अधिक ससमित रूप में व्यक्त करने के लिए हम $u(x)$ के स्थान पर $f(x)$ लिखते हैं और

$\frac{d}{dx}(v(x)) = g(x)$ लेते हैं। अर्थात् $v(x) = \int g(x)\, dx$

इस प्रतिस्थापन से (1) निम्न रूप का हो जाता है।

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x)\int g(x)\, dx - \int \{f'(x)\int g(x)\, dx\}\, dx$$

इस सूत्र का कथन यह हो सकता है :

दो फलनों के गुणनफल का समाकल = पहला गुणनखंड $\times$ दूसरे गुणनखंड का समाकल − {पहले गुणनखंड का अवकलज $\times$ दूसरे गुणनखंड का समाकल} का समाकल।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इस सूत्र को **खंडशः समाकलन सूत्र** कहा जाता है। देखने में तो यह सूत्र आपको कुछ जटिल लग सकता है। परन्तु इस विधि की सफलता इस बात पर निर्भर करती है कि पहले गुणनखंड का चुनाव इस तरह किया जाए कि दाएं पक्ष के दूसरे पद का समाकलन सरलता से किया जा सके।

नीचे दिए गए उदाहरणों से आपको यह पता चल जाएगा कि इस विधि की सहायता से कितने भिन्न-भिन्न प्रकार के समाकलों के मान निकाले जा सकते हैं। आप इस बात पर विशेष रूप से ध्यान दीजिए कि इस विधि का प्रयोग करते समय हमने किसको पहला फलन और किसको दूसरा फलन माना है। आप हमारे द्वारा चुने गए पहले फलन को दूसरा फलन और दूसरे फलन को पहला फलन मान कर समाकल का मान ज्ञात करने का प्रयास कर सकते हैं। ऐसा करने से आप यह अच्छी तरह से समझ जाएंगे कि हमने पहले और दूसरे फलन का चुनाव ऐसा क्यों किया था।

उदाहरण 16 : आइए हम खंडशः समाकलन विधि से $\int xe^x dx$ का मान निकालें।

समाकल्य xe^x में हम x को पहला गुणनखंड और e^x को दूसरा गुणनखंड लेते हैं। इस तरह

$$\int xe^x dx = x\int e^x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x\, dx\}\, dx$$

$$= xe^x - \int e^x\, dx$$

$$= xe^x - e^x + c$$

उदाहरण 17 : $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$ का मान निकालने के लिए हम x^2 को पहला गुणनखंड और $\cos x$ को दूसरा गुणनखंड लेते हैं। आइए पहले हम संगत अनिश्चित समाकल का मान निकालें।

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \int \cos x\, dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int \cos x\, dx\}\, dx$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx$$

$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx$$

$x \sin x\, dx$ का मान निकालने के लिए हम पुनः खंडशः समाकलन सूत्र का प्रयोग करेंगे। इस तरह

$$\int x \sin x\, dx = x(-\cos x) - \int (1)(-\cos x)\, dx \cdot (f(x) = x, g(x) = \sin x)$$

$$= -\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + c$$

अतः,

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

ध्यान दीजिए कि हमने स्वेच्छ अचर c लिखा है न कि 2c.

अब $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx = (x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c)]_0^{\pi/2}$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

उदाहरण 18 : आइए अब हम $\int x \ln|x|\, dx$ का मान निकालें। यहां हम $\ln|x|$ को पहला गुणनखंड लेते हैं, क्योंकि इसे आसानी से अवकलित तो किया जा सकता है पर आसानी से समाकलित नहीं किया जा सकता। हम x को दूसरा गुणनखंड मानेंगे।

$$\int x \ln|x|\, dx = \int(\ln|x|)\, x\, dx$$

$$= \ln|x| \frac{x^2}{2} - \int (\frac{1}{x})(\frac{x^2}{2})\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \frac{1}{4} x^2 + c.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$\ln|x|$ को पहला गुणनखंड मानते समय हमने यह बताया था कि इसका समाकलन आसानी से नहीं किया जा सकता। हम खंडशः समाकलन विधि की सहायता से . $\ln x$ का समाकलन भी कर सकते हैं।

उदाहरण 19 : $\ln x$ को पहला गुणनखंड और 1 को दूसरा गुणनखंड लेकर हम $\int \ln x \, dx$ का समाकलन कर सकते हैं। इस तरह,

$$\int \ln x \, dx = \int (\ln x)\,(1)\, dx$$

$$= \ln x \int 1 \, dx - \int \left(\frac{1}{x} \int 1 \, dx\right) dx$$

$$= (\ln x)\,(x) - \int \frac{1}{x}\,(x)\, dx$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$= x \ln x - x \ln e + c \text{ क्योंकि } \ln e = 1$$

$$= x \ln (x/e) + c$$

उदाहरण 19 में चली गई चालाकी यह थी कि हमने 1 को दूसरा गुणनखंड मान लिया था। ऐसा करने से ऐसे अनेक समाकलों के मान ज्ञात किए जा सकते हैं जिनका मान पहले नहीं निकाला जा सकता था।

अब आप खंडशः समाकलन विधि की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E E 10) परिकलित कीजिए :

क) $\int x^2 \ln x \, dx$ — $f(x) = \ln x$ और $g(x) = x^2$ लीजिए.

ख) $\int (1 + x)\, e^x \, dx$ — $f(x) = 1 + x$ और $g(x) = e^x$ लीजिए.

ग) $\int (1 + x^2)\, e^x \, dx$

घ) $\int x^2 \sin x \cos x \, dx$ — $f(x) = x^2$ और $g(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 11) 1 को दूसरा गुणनखंड मान कर निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए।

क) $\int \sin^{-1}x \, dx$

ख) $\int_0^1 \tan^{-1}x \, dx$

ग) $\int \cot^{-1}x \, dx$

E 12 क) $\int x \sin^{-1}x \, dx$ ख) $\int \ln(1 + x^2) \, dx$

को x के सापेक्ष समाकलित कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

11.4.2 $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ और $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ का परिकलन

$\int e^{ax} \sin bx\, dx$ और $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ का मान निकालने के लिए हम खंडश: समाकलन सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = (e^{ax}) \left(-\frac{1}{a} \cos bx\right) - \int (a e^{ax}) \left(-\frac{1}{b} \cos bx\right) dx$$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left[(e^{ax}) \left(\frac{1}{b} \sin bx\right) - \int \left(e^{ax} \frac{a}{b} \sin bx\right) dx\right]$$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

यहां आप यह ध्यान दीजिए कि दाएं पक्ष का अंतिम समाकल वही है जो कि वाम पक्ष का समाकल है। अत: दाएं पक्ष के तीसरे पद को बाएं पक्ष में स्थानांतरित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin bx\, dx = e^{ax} \left(\frac{a}{b^2} \sin bx - \frac{1}{b} \cos bx\right)$$

अर्थात्

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + c$$

इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + c$$

इनमें $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ रखने पर

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{ax} \sin (bx - \theta) + c$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e^{ax}\cos(bx-\theta) + c,$$

जहां $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 20 : इस अनभाग में उल्लेख किए गए सूत्रों का प्रयोग करके हम यह आसानी से जाँच कर सकते हैं कि

i) $\int e^{x}\sin x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + c$ और

ii) $\int e^{x}\cos\sqrt{3x}\, dx = \frac{1}{2} e^{x}\cos\left(\sqrt{3}\,x-\frac{\pi}{3}\right) + c$

उदाहरण 21 : $\int e^{2x}\sin x\cos 2x\, dx$ का मान निकालने के लिए पहले हम

$\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$ लिखते हैं, जैसा कि भाग 3 में दिखाया जा चुका है।

इसलिए,

$$\int e^{2x}\sin x\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 3x\, dx - \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\, dx.$$

अब दाएं पक्ष के दो समाकलों के मान निकाले जा सकते हैं। हम जानते हैं कि

$$\int e^{2x}\sin 3x\, dx = \frac{1}{\sqrt{13}}\, e^{2x}\sin\left(3x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) + c$$

और $\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\, e^{2x}\sin\left(x - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right) + c$

अत: $\int e^{2x}\sin x\cos 2x\, dx = \frac{1}{2} e^{2x}\left[\frac{1}{\sqrt{13}}\sin\left(3x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(x - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right] + c$

उदाहरण 22 : मान लीजिए हम $\int x^3\sin(a\ln x)\, dx$ का मान निकालना चाहते हैं।

मान लीजिए $\ln x = u$. तब $x = e^{u}$ और $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$.

और $\int x^3\sin(a\ln x)\, dx = \int x^4\sin(a\ln x)(1/x)\, dx$

$$= \int e^{4u}\sin au\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(16+a^2)}}\, e^{4u}\sin(au - \tan^{-1}(a/4)) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(16+a^2)}}\, x^4\sin(a\ln x - \tan^{-1}(a/4)) + c$$

अब आप स्वयं कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E E 13) निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए

क) $\int e^{2x}\cos 4x\, dx$ ख) $\int e^{3x}\sin 3x\, dx$

ग) $\int e^{4x}\cos x\cos 2x\, dx$ घ) $\int e^{2x}\cos^2 x\, dx$

ङ) $\int \cosh ax\sin bx\, dx$ ($\cosh ax$ को चरघातांकी फलन के रूप में लीजिए।)

च) $\int xe^{ax}\sin bx\, dx$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

11.4.3 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$, और $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ का परिकलन

इस अनुभाग में हम यह देखेंगे कि $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$ और $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$, के मान भी खंडशः समाकलन सूत्र और तालिका 3 की सहायता से निकाले जा सकते हैं :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,(1)\, dx$$

$$= \sqrt{a^2 - x^2} \times x - \int \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \times x \right) dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

दाएं पक्ष के अंतिम पद को बाएं पक्ष में लाने पर हमें

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

प्राप्त होता है।

सूत्र $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ का प्रयोग करने पर

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

प्राप्त होता है। इसी प्रकार,

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} + c$$

और

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + c$$

उदाहरण 23 : आइए हम $\int_0^1 \sqrt{x + x^2}\, dx$ का मान ज्ञात करें।

अब $\int_0^1 \sqrt{x + x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{(x + 1/2)^2 - 1/4}\, dx$

मान लीजिए $x + \frac{1}{2} = u$. तब

$$\int_0^1 \sqrt{x + x^2}\, dx = \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{u^2 - 1/4}\, du$$

$$= \left(\frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - 1/4} - \frac{1}{8} \ln \frac{u + \sqrt{u^2 - 1/4}}{1/2}\right)\Bigg]_{1/2}^{3/2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8} \ln (3 + 2\sqrt{2})$$

अब आप निश्चय ही निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E E 14) सत्यापित कीजिए कि

क) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x\, \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} + c$

ख) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x\, \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + c$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अगले भाग में हम एक अन्य प्रकार के समाकल पर विचार करेंगे जिसका गणित में प्रयोग प्रायः होता रहता है।

11.4.4 $\int e^x[f(x) + f'(x)]\,dx$ जैसे समाकल

पहले हम सूत्र

$$\int e^x\,[f(x) + f'(x)]\,dx = e^x f(x) + c$$

को सिद्ध करेंगे और देखेंगे कि कुछ फलनों के समाकलन में इसका प्रयोग कैसे किया जा सकता है।

खंडशः समाकलन सूत्र के अनुसार

$$\int e^x f(x)\,dx = \int f(x)\,e^x\,dx$$
$$= f(x)\,e^x - \int f'(x)\,e^x\,dx + c$$

अर्थात्

$$\int e^x\,[f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x) + c.$$

उदाहरण 24 : आइए निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात करें

i) $\int \frac{1 + x}{(2 + x)^2}\,e^x\,dx$ ii) $\int \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{1 + \cos x}\,e^{-x/2}\,dx$

पहले हम i) पर विचार करेंगे।

i) $$\int \frac{1+x}{(2+x)^2}\,e^x dx = \int \frac{(2+x) - 1}{(2+x)^2}\,e^x\,dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2+x} - \frac{1}{(2+x)^2}\right] e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{2+x}\,e^x + c,$$ **क्योंकि** $\frac{-1}{(2+x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right)$

अब हम ii) का मान निकालेंगे।

ii) $$\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x}\,e^{-x/2}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,e^{-x/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\frac{x}{2}\,e^{-x/2}\,dx - \frac{1}{2}\int \tan\frac{x}{2}\sec\frac{x}{2}\,e^{-x/2}\,dx$$

अब

$$\int \sec\frac{x}{2}\,e^{-x/2}\,dx = (\sec\frac{x}{2})\,(-2e^{-x/2}) - \int (\frac{1}{2}\sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2})\,(-2e^{-x/2})\,dx$$

$$= -2\sec\frac{x}{2}\,e^{-x/2} + \int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,e^{-x/2}\,dx$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इस तरह

$$\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x}\, e^{-x/2}\, dx$$

$$= -\sec\frac{x}{2}\, e^{-x/2} + \frac{1}{2}\int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\, e^{-x/2} dx$$

$$= -\sec\frac{x}{2}\, e^{-x/2} + c$$

इस इकाई में हमने आपको विभिन्न समाकलन विधियों से परिचित कराया है। इन दिधियों को लागू करने का अभ्यास भी आपने काफ़ी किया है।

अब हम आपको कुछ और प्रश्न देने जा रहे हैं। आप इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं। इन्हें हल करने से पहले आपको उस विधि को मालूम करना होगा जो कि समाकल्य विशेष के लिए सबसे उपयुक्त हो। विधि का चुनाव एक निर्णायक चरण होता है। इसके बाद का चरण, जो कि उत्तर प्राप्त करने के लिए चुनी गई विधि को लागू करने से संबंधित है, कुछ सरल होता है। यदि आपने इस इकाई का अध्ययन अच्छी तरह से किया है तो इन चरणों में से किसी को भी लागू करने में आपको कोई कठिनाई नहीं होनी चाहिए। अतः हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं।

E E 15) निम्नलिखित समाकलों के मान निकालिए :

क) $\int (2x^3+2x+3)\, dx$ ख) $\int \frac{x^2+2}{x}\, dx$

ग) $\int \sinh(x/2)\cosh(x/2)\, dx$ घ) $\int (e^x - e^{-x})^2\, dx$

ङ) $\int_2^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$ च) $\int \frac{x}{(x^2+2)^r}\, dx$

छ) $\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$ ज) $\int \frac{1}{1+9x^2}\, dx$

झ) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)^3}\, dx$ ञ) $\int (x^2+2)^6 x^3\, dx$

ट) $\int x\sqrt{x^4+2x^2+2}\, dx$ ठ) $\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx$

ड) $\int \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx$ ढ) $\int e^x (\ln \sin x + \cot x)\, dx$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E16) सिद्ध कीजिए कि

$$\int u\frac{d^2v}{dx^2}\,dx = u\,\frac{dv}{dx} - v\,\frac{du}{dx} + \int v\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx.$$

और इसका प्रयोग $\int x^3 \sin x\, dx$ का मान निकालने में कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इस इकाई को समाप्त करने से पहले हम समाकलों के अस्तित्व के बारे में यहां कुछ व्यापक टिप्पणियाँ दे रहे हैं।

परिणाम $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

जहां F(x), f(x) का प्रति-अवकलज है, की सार्थकता केवल तभी होती है जबकि अंतराल के प्रत्येक बिन्दु पर f(x) का अस्तित्व हो, इसलिए हमें इस परिणाम का प्रयोग करने में काफ़ी सावधानी बरतनी होती है। इस तरह

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big]_a^b = \ln\left|\frac{b}{a}\right|$$

परंतु $\frac{1}{x}$, $x = 0$ परिभाषित नहीं है और $\ln|x|$ भी $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। अतः ऐसी स्थिति में हमें परिणाम का प्रयोग केवल तभी करना चाहिए जबकि अंतराल [a, b] में $x = 0$ शामिल न हो। इस तरह,

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{|2|}{|-1|} = \ln 2 \text{ मान्य नहीं है।}$$

परन्तु

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{|-1|}{|-2|} = \ln\frac{1}{2} \text{ मान्य है।}$$

अब,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\sin^{-1}x]_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ लीजिए।}$$

हमने इसका प्रयोग उदाहरण 3 में किया है। फिर भी, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ का $x = 1$ पर अस्तित्व नहीं है और $\sin^{-1}x$, $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है। $L(\sin^{-1}x)'$ का $x = 1$ पर अस्तित्व है परन्तु $R(\sin^{-1}x)'$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $x > 1$ पर स्वयं $\sin^{-1}x$ का अस्तित्व नहीं होता।

फिर भी ऊपर दिया गया परिणाम एक अन्य अर्थ में सही होता है। यह अर्थ आपको विश्लेषण के पाठ्यक्रम का अध्ययन करने के दौरान स्पष्ट होगा।

यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक फलन के प्रति-अवकलज का अस्तित्व हो, अर्थात् यह आवश्यक नहीं है कि वह ऐसा फलन हो जिससे कि हम परिचित हों। उदाहरण के लिए हमें ऐसा कोई फलन ज्ञात नहीं है जिसका अवकलज e^{x^2} हो। फिर भी, प्रत्येक फलन के निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ **का मान, जहां f अंतराल [a b] पर संतत है, संख्यात्मक विधियों से कुछ सन्निकट मान तक प्राप्त किया जा सकता है। संख्यात्मक विश्लेषण (numerical analysis) के पाठ्यक्रम में आप इन विधियों का अध्ययन कर सकते हैं। इस तरह, हम e^{x^2} का प्रति-अवकलज तो नहीं प्राप्त कर सकते, फिर भी**

हम a और b के सभी वास्तविक मानों के लिए $\int_a^b e^{x^2}\,dx$ का सन्निकट मान ज्ञात कर सकते हैं। वस्तुतः इस समाकल का प्रायिकता सिद्धांत (Probability theory) में काफ़ी महत्व है और यदि आप प्रायिकता और सांख्यिकी का पाठ्यक्रम पढ़ें तो इस समाकल का प्रयोग आपको बार-बार करना पड़ेगा।

यहीं हमारी यह इकाई समाप्त होती है। अभी तक इस इकाई में हमने जो कुछ अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण यहां हम दे रहे हैं।

11.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है।

1) यदि F(x), f(x) का प्रति-अवकलज हो तो f(x) का अनिश्चित समाकल (या केवल समाकल) यह होता है
$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ जहां c स्वेच्छ अचर है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

2) $\int [k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + \ldots\ldots + k_nf_n(x)]\, dx =$

$k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx + \ldots\ldots + k_n \int f_n(x)dx$

3) प्रतिस्थापन विधि से निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du, \text{ यदि } u = g(x).$$

विशेष रूप से

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1, \text{ और}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^{a/2} f(x)\, dx + \int_0^{a/2} f(a-x)\, dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\, dx, & \text{यदि } f \text{ सम हो} \\ 0, & \text{यदि } f \text{ विषम हो} \end{cases}$$

4) मानक सूत्र

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln \frac{x + \sqrt{a^2+x^2}}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \frac{x + \sqrt{x^2-a^2}}{a} + c$$

5) दो फलनों के गुणनफल का समाकलन (खंडशः समाकलन) ;

$$\int u(x)v(x)dx = u(x) \int v(x)dx - \int \{u'(x) \int v(x)dx\}\, dx$$

इससे निम्नलिखित प्राप्त होते हैं

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{a^2+x^2}}{a} + c$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2-a^2}}{a} + c$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e^{ax} \sin (bx - \tan^{-1} \frac{b}{a}) + c$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e^{ax} \cos (bx - \tan^{-1} \frac{b}{a}) + c$$

$$\int e^{x} [f(x) + f'(x)]\, dx = e^{x} f(x) + c$$

11.6 हल और उत्तर

E 1) क) i) $\frac{x^5}{5} + c$ ii) $-2x^{-1/2} + c$ iii) $-4x^{-1} + c$ iv) $3x + c$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

ख) i) $x - x^2 + \frac{x^3}{3} + c$ ii) $\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c$

iii) $x + \frac{3x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{4} + c$

ग) i) $e^x - e^{-x} + 4x + c$ ii) $4 \sin x + 3 \cos x + e^x + \frac{x^2}{2} + c$

iii) $4 \tanh x + e^x - 4x^2 + c$

घ) i) $2\sin^{-1}x + 5 \ln|x| + c$

ii) $\int \frac{2(x^2+1)+3}{x^2+1} dx = 2\int dx + 3\int \frac{1}{x^2+1} dx$

$= 2x + 3 \tan^{-1}x + c$

ङ) i) $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx + c$ ii) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$

च) i) $\int \frac{\sin^4x + \cos^4x}{\sin^2x \cos^2x} dx$

$= \int \frac{(\sin^2x+\cos^2x)^2 - 2\sin^2x \cos^2x}{\sin^2x \cos^2x} dx$

$= \int \frac{1}{\sin^2x} dx + \int \frac{1}{\cos^2x} dx - 2\int dx$

$= -\cot x + \tan x - 2x + c$

iii) $6x + \frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + c$

E 2) क) i) $\frac{6^5}{5} - 5^4$ ii) $\frac{1}{2} + 1n2$

ख) i) $\frac{275}{12}$ ii) $\frac{15}{4}$

E 3) क) $\int (5x-3)^{1/2} dx = \frac{1}{5}\int 5(5x-3)^{1/2} dx$ अगर $5x-3 = u, \frac{du}{dx} = 5$

$= \frac{1}{5}\int u^{1/2} du = \frac{1}{5} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{15}(5x-3)^{3/2} + c$

ख) $\frac{1}{14}(2x+1)^7 + c$ ग) $\frac{1}{5} \ln \frac{19}{9}$ घ) $\frac{1}{2} \ln|10x+7| + c$

ङ) $\frac{1}{2} \ln|x^2+2x+7| + c$ च) $\ln|x^3+x^2+x-8|\Big]_2^3 = \ln \frac{31}{6}$

छ) $\frac{(3/4)\ (x^{4/3}-1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{2}(x^{4/3}-1)^{3/2} + c$ ज) $-\frac{1}{3}\sqrt{1-3x^2} + c$

E 4)

क्र. सं.	f(x)	$\int f(x)\,dx$
1.	sin ax	$-\frac{1}{a}\cos ax + c$
2.	cos ax	$\frac{1}{a}\sin ax + c$
3.	$\sec^2 ax$	$\frac{1}{a}\tan ax + c$
4.	$\operatorname{cosec}^2 ax$	$-\frac{1}{a}\cot ax + c$
5.	sec ax tan ax	$\frac{1}{a}\sec ax + c$
6.	cosec ax cot ax	$-\frac{1}{a}\operatorname{cosec} ax + c$
7.	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax} + c$
8.	a^{mx}	$\frac{1}{m}\frac{a^{mx}}{\ln a} + c$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 5) क) $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x} dx = \ln|\sec x+\tan x| + c$

ख) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$

ग) यदि $u = \tan x, \frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\Rightarrow \int e^{\tan x} \sec^2 x\, dx = \int e^u\, du = e^u + c = e^{\tan x} + c$

E 6) क) i) $\frac{\sin^6 x}{6} + c$ ii) $\frac{-2}{\sin^2 x} + c$

iii) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot 2x \operatorname{cosec}^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot 2x\, (2\operatorname{cosec}^2 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\cot^2 2x}{2}\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = 0$

iv) $\cos 2\theta = u$ रखिए। तब $\frac{du}{dx} = -2\sin 2\theta$

$\int \sin 2\theta\, e^{\cos 2\theta}\, d\theta = -\frac{1}{2} e^u\, du = -\frac{1}{2} e^u + c,$

$= -\frac{1}{2} e^{\cos 2\theta} + c$

v) $\int_0^{\pi/2} \sin\theta(1+\cos^4\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta + \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos^4\theta\, d\theta$

$= -\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} - \frac{\cos^5\theta}{5}\Big]_0^{\pi/2}$

$= 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

ख) i) $-\frac{(1+\cos\theta)^5}{5} + c$

ii) $\frac{1}{10}\frac{1}{(1-5\tan\theta)^2}\Big]_0^{\pi/3}$

$= \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}-15}{(1-5\sqrt{3})^2}$

iii) $\frac{(1+\sec\theta)^4}{4}\Big]_0^{\pi/4} = \frac{(1+\sqrt{2})^4 - 2^4}{4} = \frac{1+12\sqrt{2}}{4}$

ग) i) $\int \sin^4\theta\, d\theta = \int \sin^3\theta \sin\theta\, d\theta$

$= \int (\frac{3}{4}\sin^2\theta - \frac{1}{4}\sin\theta \sin 3\theta)\, d\theta$

$= \frac{3}{8}\int \{1-(1-2\sin^2\theta)\}\, d\theta - \frac{1}{8}\int (\cos 2\theta - \cos 4\theta)\, d\theta$

$= \frac{3}{8}\int d\theta - \frac{3}{8}\int \cos 2\theta\, d\theta - \frac{1}{8}\int \cos 2\theta\, d\theta + \frac{1}{8}\int \cos 4\theta\, d\theta$

$= \frac{3}{8}\theta - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{1}{8}\frac{\sin 4\theta}{4} + c$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}\theta - \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta) + c$

ii) $\int \sin 3\theta \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{2}[\int \sin 4\theta\, d\theta + \int \sin 2\theta\, d\theta]$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-\cos 4\theta}{2} - \cos 2\theta + c\right]$$

iii) $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \cos\theta \, d\theta = \left.\frac{\sin 4\theta}{8} - \frac{\sin 6\theta}{12}\right]_0^{\pi/2} = 0$

iv) $\int_0^{\pi/2} \cos\theta \cos 2\theta \cos 4\theta \, d\theta = \frac{19}{105}$

E 7) $v = \int \frac{dv}{dt}\, dt = \int \frac{-500}{1+t^2}\, dt = -500 \int \frac{dt}{1+t^2}$

$$= -500 \tan^{-1} t + c$$
$$v(0) = 700 \Rightarrow -500 \tan^{-1} 0 + c = c = 700$$
$$\Rightarrow c = 700$$
$$v(3) = 700 - 500 \tan^{-1} 3$$

E 8) क) i) $\sin^{-1}(x/3) + c$

ii) $\cosh^{-1}(u/2) + c$

iii) $\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$ if $u = 2x$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1} u = \frac{1}{2}\tan^{-1} 2x$$

iv) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{\sqrt{10}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2}{5}}\, x + c$

ख) i) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 - 1}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$ if $u = x^2, \frac{du}{dx} = 2x$

$$= \frac{1}{2}\cosh^{-1} u + c = \frac{1}{2}\cosh^{-1} x^2 + c$$

ii) $\frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{t^3}{4} + c$ ($t^3 = u$ रखिए)

iii) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{u^3}{2} + c$

ग) i) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1) + c$

ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3/4)+(x+1/2)^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x+(1/2)}{\sqrt{3}/2}\right) + c$

या $\ln\left|\frac{(x+1/2) + \sqrt{3/4 + (x+1/2)^2}}{\sqrt{3}/2}\right| + c$

$$= \ln\left|\frac{(x+1/2) + \sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}/2}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}}\right| + c$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

iii) $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+6y+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(y+3)^2-4}} = \cosh^{-1}\left(\frac{y+3}{2}\right) + c$

iv) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= x - \tan^{-1}x + c$

E 9) क) $\int_0^{\pi} \sin^5x \cos^3x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^5x \cos^3x\,dx + \int_0^{\pi/2} \sin^5(\pi-x) \cos^3(\pi-x)\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^5x \cos^3x\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin^5x \cos^3x\,dx$

$= 0$

ख) $\int_0^{\pi/2} \sin2x \ln\tan x\,dx = \int_0^{\pi/4} \sin2x \ln\tan x\,dx$

$+ \int_0^{\pi/4} \sin2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ln\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$

$= \int_0^{\pi/4} \sin2x \ln\tan x\,dx + \int_0^{\pi/4} \sin2x \ln\cot x\,dx$

$= \int_0^{\pi/4} \sin2x \ln(\tan x\cdot\cot x)\,dx$

$= \int_0^{\pi/4} \sin2x \ln\cdot 1\,dx = 0$

ग) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ में $x = -y$ रखिए। तब

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$

E 10) क) $\int x^2 \ln x\,dx = \ln x \int x^2\,dx - \int \left(\frac{1}{x}\int x^2\,dx\right) dx$

$= \ln x\cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$

ख) $xe^x + c$

ग) $\int (1+x^2)\,e^x\,dx = (1+x^2)\,e^x - 2\int xe^x\,dx = (1+x^2)\,e^x - 2[xe^x - \int e^x\,dx]$

$= (1+x^2)\,e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

$= e^x\,(x^2-2x+3) + c$

घ) $\frac{1}{4}\left[-x^2\cos2x + x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right] + c$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 11) क) $\int \sin^{-1}x\, dx = \sin^{-1}x \cdot x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, x\, dx$

$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

ख) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

ग) $x\cot^{-1}x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$

E 12) क) $\int x\sin^{-1}x\, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1}x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

यदि $x = \sin u$ रखें, तो $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{\sin^2 u}{\cos u} \cos u\, du$

$= \int \sin^2 u\, du = \int \frac{1-\cos 2u}{2}\, du$

$= \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u + c = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \sin u \cos u + c$

$= \frac{1}{2} [\sin^{-1}x - x\cos(\sin^{-1}x)] + c$

$\therefore \int x\sin^{-1}x\, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1}x - \frac{1}{4} [\sin^{-1} x - x\sqrt{1-x^2}] + c$

ख) $\int \ln(1+x^2)\, dx = \int 1 \cdot \ln (1+x^2)\, dx$

$= x\ln (1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx$

$= x\ln (1+x^2) - \int 2[1 - \frac{1}{1+x^2}]\, dx$

$= x\ln (1+x^2) - 2[x - \tan^{-1}x] + c$

E 13) क) $\frac{1}{20} e^{2x}(2 \cos 4x + 4 \cos 4x) + c$

ख) $\frac{1}{18} e^{3x}(3 \sin 3x - 3 \cos 3x) + c$

ग) $\int e^{4x} \cos x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int e^{4x} (\cos 3x + \cos x)\, dx$

$= \frac{1}{2} [\int e^{4x} \cos 3x\, dx + \int e^{4x} \cos x\, dx]$

$= \frac{1}{2} [\frac{1}{25} e^{4x} (4\cos 3x + 3\sin 3x)$
$+ \frac{1}{17} e^{4x} (4\cos x + \sin x)] + c$

घ) $\int e^{2x} \cos^2 x\, dx = \int e^{2x} (\frac{\cos 2x+1}{2})\, dx$

$= \frac{1}{2} [\int e^{2x} \cos 2x\, dx + \int e^{2x}\, dx]$

$= \frac{1}{2} [\frac{1}{8} e^{2x} (2\cos 2x + 2\sin 2x) + \frac{1}{2} e^{2x}] + c$

ङ) $\int \cosh ax \sin bx\, dx = \int (\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}) \sin bx\, dx$

$= \frac{1}{2} [\int e^{ax} \sin bx\, dx + \int e^{-ax} \sin bx\, dx]$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{(a^2+b^2)} [e^{ax} (a\sin bx - b\cos bx) + e^{-ax} (-a\sin bx - b\cos bx)] + c$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

च) $\int xe^{ax}\sin bx\,dx = x\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$-\int \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)\,dx$$

$$=\frac{x}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$-\frac{1}{a^2+b^2}[ae^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) - be^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)] + c$$

E 14) क) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + c$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a} + c$$

ख) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$\therefore \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + c$$

E 15) क) $\frac{x^4}{2} + x^2 + 3x + c$ ख) $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + c$

ग) $\frac{1}{2}\cosh x + c$ घ) $\frac{e^{2x}}{2} - 2x - \frac{e^{-2x}}{2} + c$

ङ) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}\Big]_2^4 = \frac{2}{3}(\sqrt{65} - \sqrt{9})$

च) $\frac{-1}{2}\frac{(x^2+2)^{-7}}{7} + c$ छ) $-e^{\cos x} + c$

ज) $\frac{1}{3}\tan^{-1}(3x) + c$

झ) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)^3}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^3}\,dt$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} - \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^3}$$

$$= \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{8}$$

ञ) $\int (x^2+2)^6 x^3\,dx = \frac{1}{2}\int t^6(t-2)\,dt$

$$= \frac{1}{2}\left[\int t^7\,dt - 2\int t^6\,dt\right]$$

$$= \frac{t^8}{16} - \frac{t^7}{7} + c$$

$$= \frac{(x^2+2)^8}{16} - \frac{(x^2+2)^7}{7} + c$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

ट) $\int x\sqrt{x^4+2x^2+2}\,dx = \int x\sqrt{(x^2+1)^2+1}\,dx = \int \sqrt{t^2+1}\,dt$

$= \frac{1}{2} t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1}t + c$

$= \frac{1}{2}(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2+2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1}(x^2+1) + c$

ठ) $\int \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \int \theta\sin\theta\,d\theta$, यदि $x = \tan\theta$

$= -\theta\cos\theta + \int \cos\theta\,d\theta$ (खंडश: समाकलन)

$= -\theta\cos\theta + \sin\theta + c$

ड) $\int \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)dx$ में $x = \tan\theta$ लीजिए।

उत्तर $= 2[\theta\tan\theta + \ln|\cos\theta|] + c$

ढ) $\int e^x(\ln\sin x + \cot x)\,dx = \int e^x \ln\sin x\,dx + \int e^x\cot x\,dx$

$= \ln\sin x\, e^x - \int \cot x\, e^x\,dx + \int e^x\cot x\,dx$

$= e^x\ln\sin x.$

E 16) $\int u\frac{d^2v}{dx^2}\,dx = u\frac{dv}{dx} - \int \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}\,dx$

$= u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx} + \int v\frac{d^2v}{dx^2}\,dx$

$\int x^3\sin x\,dx = \int x^3\frac{d^2}{dx^2}(-\sin x)\,dx$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\sin x\,dx$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6[-x\cos x + \int\cos x\,dx]$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6(x\cos x - \sin x) + c$

11.7 शब्दावली

खंडश: समाकलन — integration by parts

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इकाई 12 समानयन सूत्र

इकाई की रूपरेखा

12.1	प्रस्तावना	70
	उद्देश्य	
12.2	समानयन सूत्र	70
12.3	त्रिकोणमितीय फलन से संबंधित समाकल	72
	$\int \sin^n x\, dx$ और $\int \cos^n x\, dx$ के समानयन सूत्र	
	$\int \tan^n x\, dx$ और $\int \sec^n x\, dx$ के समानयन सूत्र	
12.4	त्रिकोणमितीय फलनों के गुणनफलों से संबंधित समाकल्य	76
	$\sin^m x \cos^n x$ के प्रकार का समाकल्य	
	$e^{ax} \sin^n x$ के प्रकार का समाकल्य	
12.5	अतिपरवलयिक फलनों से संबंधित समाकल	81
12.6	सारांश	82
12.7	हल और उत्तर	83
12.8	शब्दावली	85

12.1 प्रस्तावना

इस खंड की प्रथम दो इकाइयों में हम निश्चित समाकल की संकल्पना से परिचित हुए हैं और हमने कुछ मानक रूपों के समाकलों के मान प्राप्त किए हैं। हमने समाकल के मान ज्ञात करने की दो महत्वपूर्ण विधियों, अर्थात् प्रतिस्थापन विधि और खंडशः समाकलन विधि, का भी अध्ययन किया है। अनेक भौतिक अथवा इंजीनियरी समस्याओं के हल में हमें त्रिकोणमितीय फलन के घातों अथवा गुणनफलों से संबंधित कुछ समाकल्यों का समाकलन करना होता है। इस इकाई में हम इन समाकलों का मान तुरंत ज्ञात करने की विधि का उल्लेख करेंगे। हम कुछ मानक रूप के समाकल्यों को एक-एक करके लेंगे और उन्हें समाकलित करने के लिए सूत्रों को व्युत्पन्न करेंगे। यहां पर उल्लेख किए जाने वाले सभी समाकल्यों में एक बात उभयनिष्ठ है। ये सभी एक पूर्णांक प्राचल पर निर्भर करते हैं। खंडशः समाकलन विधि का प्रयोग करके हम इस समाकल को इस प्रकार के एक अन्य समाकल के रूप में व्यक्त करने का प्रयास करेंगे जो कि एक निम्नतर मान के प्राचल वाला हो। आप देखेंगे कि इस तकनीक का बार-बार प्रयोग करने पर हम दिए हुए समाकल का मान ज्ञात कर सकते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप निम्नलिखित समाकलों के लिए समानयन सूत्र व्युत्पन्न कर सकेंगे और उन्हें लागू कर सकेंगे:

- $\int x^n e^x dx$
- $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx, \int \tan^n x dx$, आदि
- $\int \sin^m x \cos^n x dx$
- $\int e^{ax} \sin^n x dx$
- $\int \sinh^n x dx, \int \cosh^n x dx$

12.2 समानयन सूत्र

कभी-कभी समाकल्य (integrand) न केवल स्वतंत्र चर का फलन होता है, बल्कि संख्या n (जो प्रायः पूर्णांक होता है) पर भी निर्भर करता है। उदाहरण के लिए $\int \sin^n x dx$ में समाकल्य $\sin^n x$, x और n पर निर्भर करता है। इसी प्रकार $\int e^x \cos mx dx$ में समाकल्य $e^x \cos mx$, x और m पर निर्भर करता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इन दो उदाहरणों में संख्याओं n और m को, प्राचल (parameter) कहा जाता है। हम यहां केवल पूर्णांक प्राचलों की चर्चा करेंगे।

खंडशः समाकलन (integration by parts) करने पर हमें कभी-कभी दिए हुए समाकल का मान उसी प्रकार के एक अन्य समाकल के रूप में प्राप्त होता है, जिसमें प्राचल का मान पहले से कम होता है। इस तरह, अनेक चरणों को लागू करने के बाद हमें एक ऐसा समाकल्य प्राप्त हो सकता है जिसका मान तुरंत ज्ञात किया जा सकता हो।

इस प्रकार की प्रक्रिया को उत्तरोत्तर समानयन (successive reduction) कहा जाता है और उस सूत्र को, जो प्राचल n वाले समाकल को कम मान के प्राचल वाले समरूप समाकल के साथ जोड़ता है, समानयन सूत्र (reduction formula) कहा जाता है।

परिभाषा 1 :

$\int f(x,n)\,dx = g(x) + \int f(x,k)\,dx,$

जहा $k < n$, के रूप के सूत्र को **समानयन सूत्र** कहा जाता है।

दृष्टांत के रूप में निम्नलिखित उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 1 : $\int x^n e^x dx$ का समाकल्य x पर और n पर भी, जो कि x का घातांक (exponent) है, निर्भर करता है।

मान लीजिए $I_n = \int x^n e^x dx$

x^n को पहला फलन और e^x को दूसरा फलन मानकर इसका खंडशः समाकलन करने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$I_n = x^n \int e^x dx - \int (nx^{n-1} \int e^x dx)\, dx$$

$$= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

ध्यान दीजिए कि दाएं पक्ष के समाकल का समाकल्य वही है जिससे कि हमने अपनी प्रक्रिया प्रारंभ की थी। अंतर केवल यह है कि इसमें x का घातांक $n - 1$ है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि x का घातांक 1 से कम हो गया है। इस तरह हम

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1} \qquad \text{........(1)}$$

लिख सकते हैं। सूत्र (1) एक समानयन सूत्र है। अब मान लीजिए कि हम I_4, अर्थात् $\int x^4 e^x dx$ का मान ज्ञात करना चाहते हैं। (1) की तरह हम यह लिख सकते हैं कि

$$I_4 = x^4 e^x - 4I_3$$

$$= x^4 e^x - 4(x^3 e^x - 3I_2) \text{ } (I_3 \text{ के लिए (1) का प्रयोग करने पर})$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12I_2$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24I_1 \text{ } (I_2 \text{ के लिए (1) का प्रयोग करने पर})$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24I_0$$

अब. $I_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x + c.$

इस तरह, उत्तरोत्तर समानयन-विधि को लागू करने पर पांच सरल चरणों के बाद हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + c.$$

आपने इस बात पर अवश्य ध्यान दिया होगा कि इस विधि को लागू करने सें हम चार बार खंडशः समाकलन करने की प्रक्रिया लागू करने से बच गए। सूत्र (1) के कारण ही यह संभव हो सका। इस इकाई में हम इसी प्रकार के अनेक समानयन सूत्र व्युत्पन्न करेंगे। उनके समाकल्यों का वर्गीकरण कुछ इस प्रकार है:

i) त्रिकोणमितीय फलनों के घात

ii) त्रिकोणमितीय फलनों के गुणनफल और

iii) अतिपरवलयिक फलनों से संबंधित।

इनके अनुसार समानयन सूत्रों को तीन मुख्य वर्गों में रखा जाता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

12.3 त्रिकोणमितीय फलनों से संबंधित समाकल

ऐसे अनेक अवसर आते हैं जबकि हमें त्रिकोणमितीय फलनों के घातों का समाकलन करना पड़ता है। इस भाग में हम इस प्रकार के समाकल्यों का समाकलन करने की विधि पर विचार करेंगे।

12.3.1 $\int \sin^n x dx$ और $\int \cos^n x dx$ के समानयन सूत्र

इस अनुभाग में हम उन समाकल्यों पर विचार करेंगे जो sin x या cos x के घात हैं। आइए पहले हम sinx के घात को लें। $\int \sin^n x dx$ का मान निकालने के लिए हम

n = 1 के लिए
$\int \sin^n x dx = \int \sin x dx$
$= -\cos x + c.$

$I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$ लिखते हैं, यदि $n>1$. $\sin^{n-1}x$ को पहला फलन और sinx को दूसरा फलन मानकर खंडशः समाकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता हैं:

$$I_n = -\sin^{n-1}x \cos x - (n-1)\int \sin^{n-2}x \cos x(-\cos x)\,dx$$
$$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x \cos^2 x dx$$
$$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\left[\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx\right]$$
$$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\left[\int \sin^{n-2}x dx - \int \sin^2 n dx\right]$$
$$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\left[I_{n-2} - I_n\right]$$

अतः $I_n + (n-1)I_n = -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)I_{n-2}$

अर्थात् $nI_n = -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)I_{n-2}$, या

$$I_n = \frac{-\sin^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

यह $\int \sin^n x dx$ का समानयन सूत्र है
(जो $n \geq 2$ के लिए मान्य है)।

उदाहरण 2 हम निश्चित समाकल $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$ का मान ज्ञात करने के लिए $\int \sin^n x dx$ के समानयन सूत्र को लागू करेंगे। पहले हम देखते हैं कि

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \left.\frac{-\sin^{n-1}x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x dx, \quad n \geq 2.$$

इस तरह, $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx = \frac{4}{5}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$

$$= \frac{4}{5}\ \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

$$= \frac{8}{15}(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{8}{15}$$

आइए, अब हम $\int \cos^n x dx$ के समानयन सूत्र को व्युत्पन्न करें। यहां

$I_n = \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx, \ n > 1.$

इस समाकल का खंडश समाकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$I_n = \cos^{n-1}x \sin x - \int (n-1)\cos^{n-2}x(\sin x)\sin x dx$$
$$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x \sin^2 x dx$$
$$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}(1-\cos^2 x)\,dx$$
$$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

पदों को व्यवस्थित ढंग से रखने पर:

$$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1}x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

यह सूत्र $n \geq 2$ के लिए लागू होता है। प्रश्न उठता है कि यदी $n = 0$ या 1 हो, तो समाकल का मान किस प्रकार ज्ञात किया जाएगा? आप इस बात से अवश्य सहमत होंगे कि $n = 0$ या 1 के लिए समाकल का मान सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

जैसा कि हम उदाहरण 2 में देख चुके हैं,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx, \quad n \geq 2.$$

इस सूत्र को बार-बार लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{4}{5} \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin x dx, & \text{जबकि } n \text{ एक विषम संख्या हो और } n \geq 3 \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx, & \text{जबकि } n \text{ सम संख्या हो और } n \geq 2 \end{cases}$$

अर्थात्

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & \text{जबकि } n \text{ विषम संख्या हो और } n \geq 3 \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{जबकि } n \text{ सम संख्या हो और } n \geq 2. \end{cases}$$

हम गुणनखंडों के क्रम को उलटकर इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n}, & \text{जबकि } n \text{ विषम संख्या हो और } n \geq 3 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{जबकि } n \text{ सम संख्या हो और } n > 2. \end{cases}$$

इसी प्रकार हम $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ के लिए भी लिख सकते हैं

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{n-1}{n}, & \text{जबकि } n \text{ विषम हो और } n \geq 3 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{जबकि } n \text{ सम हो और } n \geq 2. \end{cases}$$

हम इस सूत्र की उपपत्ति एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं। देखिए E 1).

E E1) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{n-1}{n}, & \text{जबकि } n \text{ विषम हो और } n \geq 3. \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{जबकि } n \text{ सम हो और } n \geq 2. \end{cases}$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E2) E1) में व्युत्पन्न किए गए समानयन सूत्र को लागू करके

क) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$ ख) $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx$ के मान ज्ञात कीजिए।

12.3.2 $\int \tan^n x dx$ और $\int \sec^n x dx$ के समानयन सूत्र

इस अनुभाग में हम दो अन्य त्रिकोणमितीय फलन अर्थात् tanx और secx पर विचार करेंगे। कहने का तात्पर्य यह है कि हम $\int \tan^n x dx$ और $\int \sec^n x dx$ के लिए समानयन सूत्र व्युत्पन्न करेंगे। $\int \tan^n x dx$, $n>2$ का समानयन सूत्र व्युत्पन्न करने के लिए हम थोड़े अलग ढंग से अपनी प्रक्रिया प्रारंभ करेंगे। $\sin^n x$ और $\cos^n x$ की तरह $\tan^n x = \tan^{n-1} x \tan x$ लिखने के स्थान पर हम $\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x$ लिखेंगें। आप तुरंत ही जान जाएंगे कि ऐसा हमने क्यों लिखा है।

हम यह लिखते हैं: $I_n = \int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\, dx$

$$= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx \qquad ......(2)$$

आपने इस बात पर अवश्य ध्यान दिया होगा कि दाएं पक्ष का दूसरा समाकल I_{n-2} है।
अब दाएं पक्ष के पहले समाकल में समाकल्य

$[f(x)]^m f'(x)$ के रूप का है।
जैसा कि हम इकाई 11 में देख चुके हैं,

$$\int [f(x)]^m f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1} + c.$$

इस तरह $\int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx = \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1}$
इसलिए (2) से हमें

$$I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

प्राप्त होता है।

अब आप अवश्य समझ गए होंगे कि हमने $\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x$ क्यों लिखा है।

अतः $\int \tan^n x dx$ का समानयन सूत्र है:

$$\int \tan^n x\, dx = I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

$\int \sec^n x\, dx$, $(n>2)$ का समानयन सूत्र व्युत्पन्न करने के लिए पहले हम $\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x$ लिखते हैं और तब खण्डशः समाकलन करते हैं। इस तरह

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$I_n = \int \sec^n x\, dx = \int \sec^{n-2}x \sec^2 x\, dx$$
$$= \sec^{n-2}x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2}x \tan^2 x\, dx$$
$$= \sec^{n-2}x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2}x (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \sec^{n-2}x \tan x - (n-2)(I_n - I_{n-2})$$

पदों को पुन: व्यवस्थित रूप में रखने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\int \sec^n x\, dx = I_n = \frac{\sec^{n-2}x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}.$$

$\int \tan^n x dx$ और $\int \sec^n x dx$ के ये सूत्र $n>2$ पर लागू होते हैं। $n=0, 1$ और 2 पर समाकलों $\int \tan^n x dx$ और $\int \sec^n x dx$ के मान सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं। आप इकाई 10 और 11 में इनसे परिचित हो चुके हैं।

उदाहरण 3: आइए i) $\int_0^{\pi/4} \tan^5 x dx$ ii) $\int_0^{\pi/4} \sec^6 x dx$ का परिकलन करें

i) $$\int_0^{\pi/4} \tan^5 x\, dx = \left.\frac{\tan^4 x}{4}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^3 x\, dx$$
$$= \frac{1}{4} - \left.\frac{\tan^2 x}{2}\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \tan x\, dx$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\frac{1}{4} - \ln(\cos x)\Big]_0^{\pi/4}$$
$$= -\frac{1}{4} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 = -\frac{1}{4} + \ln\sqrt{2}$$

ii) $$\int_0^{\pi/4} \sec^6 x\, dx = \left.\frac{\sec^4 x \tan x}{5}\right]_0^{\pi/4} + \frac{4}{5}\int_0^{\pi/4} \sec^4 x\, dx$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\left[\left.\frac{\sec^2 x \tan x}{3}\right]_0^{\pi/4} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx\right]$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{8}{15} + \frac{8}{15}\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{8}{15} \tan x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{28}{15}$$

इस भाग में की गई चर्चा के आधार पर अब आप नीचे दिए गये प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E E3 $\int \cot^n x dx$ और $\int \operatorname{cosec}^n x dx$ के लिए निम्नलिखित समानयन सूत्र व्युत्पन्न कीजिए:

(क) $\int \cot^n x\, dx = I_n = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1}x - I_{n-2}$

(ख) $\int \operatorname{cosec}^n x\, dx = I_n = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2}x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E4) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(क) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{cosec}^3 x dx$ (ख) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx$

(ग) $\int \sec^3 \theta d\theta$

12.4 त्रिकोणमितीय फलनों के गुणनफलों से संबंधित समाकल्य

पिछले भाग में हमने उन समाकलों के समानयेन सूत्रों के बारे में चर्चा की है जो कि एक त्रिकोणमितीय फलन के घात थे। यहां हम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणनफलों से संबंधित कुछ समाकल्यों पर विचार करेंगे। समानयन सूत्रों को ज्ञात करने की प्रक्रिया में मूलतः खंडशः समाकलन की प्रक्रिया का प्रयोग होता है। क्योंकि समाकल्य को दो फलनों के गुणनफल के रूप में एक से अधिक विधियों से लिखा जा सकता है, इसलिए आप देखेंगे कि एक ही समाकल के लिए अनेक समानयन-सूत्र प्राप्त हो सकते हैं। इस भाग में हम दो प्रकार के समाकल्यों का अध्ययन करेंगे। आइए इनमें से पहले प्रकार के समाकल्य से प्रारंभ करें।

12.4.1 $\sin^m x \cos^n x$ के प्रकार का समाकल्य

फलन $\sin^m x \cos^n x$ दो प्राचल m और n पर निर्भर करता है। $\int \sin^m x \cos^n x dx$ का समानयन सूत्र ज्ञात करने के लिए आइए पहले हम $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$ लिखें।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

क्योंकि यहां दो प्राचल हैं, इसलिए यहां समानयन सूत्र का अर्थ उस सूत्र से होगा जो $I_{m,n}$ और $I_{p,q}$ के बीच संबंध स्थापित करता है और जहां या तो $p<m$ या $q<n$ या $p<m, q<n$ दोनों लागू होते हों। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि कम से कम एक प्राचल का मान अवश्य घटना चाहिए।

यदि $n=1$, तो $I_{m,1}=\int \sin^m x \cos x\, dx = \begin{cases} \dfrac{\sin^{m+1}x}{m+1} + c \text{ जहां } m \neq -1 \\ \ln|\sin x| + c \text{ जहां } m=-1 \end{cases}$

इसलिए हम यह मान लेते हैं कि $n>1$. अब

$$I_{m,n}=\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \cos^{n-1}x (\sin^m x \cos x)\, dx$$

खंडश: समाकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$I_{m,n}=\frac{\cos^{n-1}x \sin^{m+1}x}{m+1} - \int (n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\, dx, \text{ जबकि } m \neq -1.$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x \sin^{m+1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x \cdot \sin^{m+1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}[I_{m,n-2} - I_{m,n}]$$

इसलिए

$$I_{m,n} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n} = \frac{m+n}{m+1} I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1}x \sin^{m+1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}$$

अर्थात्

$$I_{m,n}=\frac{\cos^{n-1}x \sin^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \qquad ....(3)$$

निश्चय ही यह सूत्र तब लागू नहीं होगा जबकि $m+n=0$. अत: प्रश्न उठता है कि $m+n=0$ की स्थिति से हम कैसे निपटें? वास्तव में इसकी एक सरल विधि है। यदि $m+n=0$, तब क्योंकि n धनात्मक है, इसलिए $m=-n$ लिखते हैं।

याद रहे हमने $n>1$ लिया है।

अत: $I_{-n,n}=\int \sin^{-n}x \cos^n x\, dx = \int \cot^n x\, dx$,

जिसका मान भाग 3 में व्युत्पन्न किए गए समानयन सूत्र को लागू करके सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। (देखिए E 2)

सूत्र (3) प्राप्त करने के लिए हमने प्रारंभ में यह मान लिया था कि $n>1$.अब यदि हम $n>1$ के स्थान पर $m>1$ मान लें तो हम यह लिख सकते हैं कि

$$I_{m,n}=\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{m-1}x (\cos^n x \sin x)\, dx$$

इसका खंडश: समाकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$I_{m,n}=\frac{-\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{n+1} - (m-1)\int \sin^{m-2}x \cos x \frac{(-\cos^{n+1}x)}{n+1}\, dx, \quad n \neq -1.$$

$$=\frac{-\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x \cos^n x(1-\sin^2 x)\, dx$$

$$=\frac{-\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}(I_{m-2,n} - I_{m,n})$$

अत: $I_{m,n}=\dfrac{-\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$ .... (4) यदि $m+n \neq 0$.

यदि m या n धनात्मक विषम संख्याएं हों, तो हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपना सकते हैं:
मान लीजिए $n=2p+1, p>0$. तब

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^p \cos x\, dx$

$= \int t^m (1-t^2)^p dt$, यदि हम $t = \sin x$ लें।

$(1-t^2)^p$ को द्विपद-प्रमेय (binomial theorem) से प्रसारित करने और पदशः समाकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$I_{m,n} = \frac{t^{m+1}}{m+1} - C(p,1)\frac{t^{m+3}}{m+3} + C(p,2)\frac{t^{m+5}}{m+5} - \cdots + \frac{(-1)^p t^{m+2p+1}}{m+2p+1} + c$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} - C(p,1)\frac{\sin^{m+3} x}{m+3} + \cdots + \frac{(-1)^p \sin^{m+2p+1} x}{m+2p+1} + c.$$

यदि m और n धन पूर्णांक हों, तो सूत्र (3) अथवा सूत्र (4) को बार-बार लागू करने पर हम प्रत्येक चरण में m अथवा n में 2 की कमी कर देते हैं। अंत में हमें $I_{m,0}$, $I_{m,1}$, $I_{1,n}$ या $I_{0,n}$ के रूप का समाकल प्राप्त होता है। पिछले भाग में इनके मान ज्ञात करने की विधि से हम परिचित हो चुके हैं। इसका यह अर्थ है कि परिमित संख्या में चरणों को लागू करके हम $I_{m,n}$ का मान ज्ञात कर सकते हैं। इन सूत्रों को लागू करने की विधि को समझने के लिए हम यहां एक उदाहरण ले रहे हैं।

उदाहरण4: आइए $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x\, dx$ का मान ज्ञात करें।

यहां $m = 4$ और $n = 6$.

क्योंकि m और n में m छोटा है, इसलिए हम सूत्र (4) लागू करेंगे। जिसमें प्रत्येक चरण में m कम होता जाता है।

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x\, dx = \left.\frac{-\sin^3 x \cos^7 x}{10}\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{10}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^6 x\, dx$$

$$= \frac{3}{10}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^6 x\, dx$$

$$= \frac{3}{10}\left\{\left.\frac{-\sin x \cos^7 x}{8}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx\right\}$$

(सूत्र (4) को पुनः लागू करने पर)

$$= \frac{3}{80}\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\, dx$$

$$= \frac{3}{80}\cdot\frac{15\pi}{96} \quad \text{(E2 (ख) से)}$$

$$= \frac{3\pi}{512}.$$

क्या अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्नों को हल करने के लिए तैयार हैं?

E E5) सूत्र (4) को व्युत्पन्न करने में हमने यह मान लिया था कि $m > 1$. आप $I_{m,n}$ का मान किस प्रकार ज्ञात करेंगे जबकि $m = 1$?

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E6) $m+n=0$ होने पर सूत्र (3) और सूत्र (4) लागू नहीं होते। हम देख चुके हैं कि $I_{m,n}$ का मान किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है जबकि $m+n=0$ और n एक धन पूर्णांक हों। आप $I_{m,n}$ का मान किस प्रकार ज्ञात करेंगे जबकि $m+n=0$ और n एक ऋण पूर्णांक हो।

E7) मान निकालिए:

क) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x \, dx$ ख) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^2 x \, dx.$

12.4.2 $e^{ax}\sin^n x$ के प्रकार का समाकल्य

इस अनुभाग में हम उन समाकलों पर विचार करेंगे जहां समाकल्य त्रिकोणमितीय फलन के घात और चरघातांकी फलन का गुणनफल हो। दूसरे शब्दों में, हम $e^{ax}\sin^n x$ के प्रकार के समाकल्यों पर विचार करेंगे। $\int e^{ax}\sin^n x\,dx$ को L_n से प्रकट करें। तब $\sin^n x$ को पहला फलन और e^{ax} को दूसरा फलन लेकर खंडशः समाकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$I = \frac{e^{ax}\sin^n x}{a} - \frac{n}{a}\int e^{ax}\sin^{n-1} x \cos x \, dx$$

अब हम $\sin^{n-1} x \cos x$ को पहला फलन और e^{ax} को दूसरा फलन लेकर फिर से खंडशः समाकलन करके दाएं पक्ष के समाकल का परिकलन करेंगे।

इस तरह
$$L_n = \frac{e^{ax}\sin^n x}{a} - \frac{n}{a}\left[\frac{e^{ax}\sin^{n-1} x \cos x}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\{(n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x\}dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}\sin^n x}{a} - \frac{n}{a}\left[\frac{e^{ax}\sin^{n-1} x \cos x}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\{(n-1)\sin^{n-2} x - n\sin^n x\}dx\right]$$

अर्थात्

$$L_n = \frac{e^{ax}\sin^n x}{a} - \frac{n e^{ax}\sin^{n-1} x \cos x}{a^2} + \frac{n(n-1)}{a^2} L_{n-2} - \frac{n^2}{a} L_n$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

पदों को व्यवस्थित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$L_n = \frac{ae^{ax}\sin^n x}{n^2 + a^2} - \frac{ne^{ax}\sin^{n-1}x\cos x}{n^2 + a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} L_{n-2}$$

इस तरह, यदि L_n दिया हुआ हो तो हम इस समानयन सूत्र को बार-बार तब तक लागू करते जाएंगे जब तक कि हमें L_1 या L_0 (यह इस बात पर निर्भर करता है कि n विषम है या सम) प्राप्त न हो जाए। क्योंकि L_1 और L_0 के मान सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं, इसलिए हमें विश्वास है कि आप इनका मान स्वयं ज्ञात कर सकेंगे (देखिए E8)। इसका अर्थ यह है कि किसी भी धन पूर्णांक n के लिए L_n का मान ज्ञात किया जा सकता है।

टिप्पणी 1 यदि हम L_n में $a = 0$ लें तो यह समाकल $\int \sin^n x\,dx$ में समानीत हो जाता है। इससे यह पता चलता है कि $\int \sin^n x\,dx$ का वह समानयन सूत्र, जिसे हमने भाग 3 में व्युत्पन्न किया है, L_n के समानयन सूत्र की एक विशेष स्थिति है।

यदि आप इस अनुभाग में दिए गए तर्क को अच्छी तरह से समझ गए हैं, तो आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E E 8) सिद्ध कीजिए कि क) $L_0 = \frac{e^{ax}}{a} + c$

ख) $L_1 = \int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}}{1 + a^2}(a\sin x - \cos x) + c.$

E E 9) सिद्ध कीजिए कि : यदि $C_n = \int e^{ax}\cos^n x\,dx$, तो

$$C_n = \frac{ae^{ax}\cos^n x}{n^2 + a^2} + \frac{ne^{ax}\cos^{n-1}x\sin x}{n^2 + a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} C_{n-2}$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 10) सत्यापित कीजिए कि $\int \cos^n x\, dx$ का समानयन सूत्र E 9) के समानयन सूत्र की एक विशेष स्थिति हैं।

12.5 अतिपरवलयिक फलनों से संबंधित समाकल

इस भाग में हम $\int \sinh^n x\, dx$, $\int \cosh^n x\, dx$ आदि प्रकार के समाकलों के मान ज्ञात करने के बारे में चर्चा करेंगे।

आप देखेंगे कि इन समाकलों के मान ज्ञात करने में किसी नई विधि को लागू नहीं करना पड़ता। वस्तुत: यहां हम वही प्रक्रिया लागू करते हैं जो कि $\sin^n x$, $\cos^n x$ आदि का समाकलन करने में लागू की थी। आइए हम $\int \tanh^n x\, dx$ का समानयन सूत्र ज्ञात करें। हमें विश्वास है कि इसमें लागू की जा रही प्रक्रिया को आप आसानी से समझ लेंगे और तब अन्य अतिपरवलयिक फलनों के समानयन सूत्र आप व्युत्पन्न कर लेंगे (देखिए E11)।

यदि $I_n = \int \tanh^n x\, dx$,
तो हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \tanh^{n-2} x \tanh^2 x\, dx \\
&= \int \tanh^{n-2} x\,(1 - \operatorname{sech}^2 x)\, dx \\
&= \int \tanh^{n-2} x\, dx - \int \tanh^{n-2} x \operatorname{sech}^2 x\, dx \\
&= I_{n-2} - \frac{\tanh^{n-1} x}{n-1}
\end{aligned}
$$

$\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

क्या आप नहीं मानते कि ऊपर लागू की गई विधि ठीक उस विधि के समान है जिसे हमने $\int \tan^n x\, dx$ के लिए अपनाया था?

अब निम्नलिखित प्रश्नों को सरलता से हल किया जा सकता है।

E 11) निम्नलिखित समानयन सूत्र को सिद्ध कीजिए:

$$\int \sinh^n x\, dx = \frac{\sinh^{n-1} x \cosh x}{n} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} x\, dx$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E 12) $\int \cosh^n x dx$ का एक समानयन सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

यहीं हमारी यह इकाई समाप्त होती है। इस इकाई में अब तक हमने जो कुछ अध्ययन किया है उसका अब हम संक्षिप्त विवरण देंगे।

12.6 सारांश

समानयन सूत्र वह सूत्र है जो एक प्राचल पर आश्रित समाकल को कम मान के प्राचल वाले समरूप समाकल के साथ जोड़ता है।
इस इकाई में हमने अनेक समानयन सूत्र व्युत्पन्न किए हैं।

1 $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

2 $\int \sin^n x \, dx = \dfrac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \, dx, \; n \geq 2$

3 $\int \cos^n x \, dx = \dfrac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \, dx, \; n \geq 2$

4 $\int \tan^n x \, dx = \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx, \; n \geq 2$

5 $\int \sec^n x \, dx = \dfrac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \, dx, \; n \geq 2$

6 $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdots \dfrac{n-1}{n}, & \text{यदि } n \text{ विषम है, } n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdots \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है, } n \geq 3 \end{cases}$$

7 $$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx, \; n > 1.$$
$$= \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx, \; m > 1.$$

8 $$\int e^{ax} \sin^n x \, dx = \frac{a e^{ax} \sin^n x}{n^2+a^2} - \frac{n e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x}{n^2-a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\int e^{ax} \sin^{n-2} x \, dx$$

9 $\int \tanh^n x \, dx = \dfrac{-\tanh^{n-1} x}{n-1} + \int \tanh^{n-2} x \, dx$

हमने यह देखा है कि समानयन सूत्र व्युत्पन्न करने में मुख्यतः खंडशः समाकलन की प्रक्रिया अपनानी पड़ती है। हमने यह भी देखा कि इसी प्रक्रिया को लागू करके अन्य त्रिकोणमितीय फलनों और अतिपरवलयिक फलनों से संबंधित अनेक समानयन सूत्र व्युत्पन्न किए जा सकते हैं।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

12.7 हल और उत्तर

E1) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left.\frac{\cos^{n-1}x \sin x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}x\, dx, n \geq 2.$

$$\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}x\, dx$$

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-4}x\, dx$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^0 x\, dx, \text{ यदि n सम हो} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx, \text{ यदि n विषम हो} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3} \end{cases}$$

E2) क) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

ख) $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\, dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$

E3) क) $I_n = \int \cot^n x\, dx = \int \cot^{n-2}x (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx, n > 2$

$= \int \cot^{n-2}x \operatorname{cosec}^2 x\, dx - I_{n-2}$

अत: $I_n = \frac{-\cot^{n-2}x}{n-1} - I_{n-2}$

ख) $I_n = \int \operatorname{cosec}^n x\, dx = \int \operatorname{cosec}^{n-2}x \operatorname{cosec}^2 x\, dx\ n > 2$

$= -\operatorname{cosec}^{n-2}x \cot x - \int (n-2) \operatorname{cosec}^{n-2}x \cot^2 x\, dx$

$= -\operatorname{cosec}^{n-2}x \cot x - (n-2)\int \operatorname{cosec}^{n-2}x (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx$

$= -\operatorname{cosec}^{n-2}x \cot x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$

$I_n = \frac{-\operatorname{cosec}^{n-2}x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$

E4) क) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^3 x\, dx = \left.\frac{-\operatorname{cosec}x \cot x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}x\, dx$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left.\ln\tan\frac{x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln\tan\frac{\pi}{8})$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\tan\frac{\pi}{8}$

ख) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x\, dx = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256}$

ग) $\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{\sec\theta \tan\theta}{2} + \frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta$

$= \frac{\sec\theta \tan\theta}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \tan\theta) + c$

E5) यदि $m = 1, I_{m,n} = I_{1,n} = \int \sin x \cos^n x dx$

$$= \begin{cases} \frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + c \text{ यदि } n \neq -1 \\ -\ln|\cos x| + c \text{ यदि } n = -1 \end{cases}$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E6) $m + n = 0 \Rightarrow n = -m \Rightarrow m$ एक धन पूर्णांक है।

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^{-m} x dx = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} dx = \int \tan^m x dx$$

अब $\int \tan^m x dx$ के सूत्र का प्रयोग कीजिए।

E7) क) $$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x dx = -\frac{\sin^2 x \cos^6 x}{8} \Big]_0^{\pi/2} + \frac{2}{8}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^5 x\, dx$$

$$= \frac{2}{8}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^5 x\, dx = \frac{-2}{8} \cdot \frac{\cos^6 x}{6}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{24}$$

ख) $$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^2 x\, dx = \frac{\cos x \sin^9 x}{10} \Big]_0^{\pi/2} + \frac{1}{10}\int_0^{\pi/2} \sin^8 x\, dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^{\pi/2} \sin^8 x\, dx$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{512}$$

E8) क) $$L_0 = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

ख) $$L_1 = \int e^{ax} \sin x\, dx = \frac{e^{ax}\sin x}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax} \cos x\, dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin x}{a} - \frac{e^{ax}\cos x}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int e^{ax} \sin x\, dx$$

$$\therefore \int e^{ax} \sin x\, dx = \frac{ae^{ax}\sin x}{1 + a^2} - \frac{e^{ax}\cos x}{1 + a^2} + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{1 + a^2}(a\sin x - \cos x) + c$$

E9) $$C_n = \frac{e^{ax}}{a}\cos^n x + \frac{n}{a}\int e^{ax}\cos^{n-1} x \sin x\, dx$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n x}{a} + \frac{n}{a}\left[\frac{e^{ax}\cos^{n-1} x \sin x}{a} + \frac{1}{a}\int e^{ax}\{(n-1)\cos^{n-2} x \sin^2 x - \cos^n x\}\, dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n x}{a} + \frac{n}{a^2}\, e^{ax}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n}{a^2}\int e^{ax}\{(n-1)\cos^{n-2} x - n\cos^n x\} dx$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n x}{a} + \frac{n}{a^2}\, e^{ax}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n(n-1)}{a^2} C_{n-2} - \frac{n^2}{a^2} C_n$$

$$\therefore C_n = \frac{ae^{ax}\cos^n x}{n^2 + a^2} + \frac{ne^{ax}\cos^{n-1} x \sin x}{n^2 + a^2} + \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} C_{n-2}$$

E10) C_n के सूत्र में $a = 0$ रखिए।

$$\therefore C_n = \int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

जो $\int \cos^n x\, dx$ का समानयन सूत्र है।

E11) $$\int \sinh^n x\, dx = \int \sinh^{n-1} x \sinh x\, dx$$

$$= \sinh^{n-1} x \cosh x - (n-1)\int \sinh^{n-2} x \cosh^2 x\, dx$$

$$= \sinh^{n-1} x \cosh x - (n-1)\int \sinh^{n-2} x (1 + \sinh^2 x)\, dx$$

$$= \sinh^{n-1} x \cosh x - (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n = \frac{\sinh^{n-1} x \cosh x}{n} - \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E12) $I_n = \int \cosh^n x\, dx = \int \cosh^{n-1}x \cosh x\, dx$

$$= \cosh^{n-1}x \sinh x - (n-1)\int \cosh^{n-2}x \sinh^2 x\, dx$$

$$= \cosh^{n-1}x \sinh x - (n-1)\int \cosh^{n-2}x (\cosh^2 x - 1)\, dx$$

$$= \cosh^{n-1}x \sinh x - (n-1) I_n + (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{\cosh^{n-1}x \sinh x}{n} - \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

12.8 शब्दावली

उत्तरोत्तर समानयन	**successive reduction**
समानयन सूत्र	**reduction formula**

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इकाई 13 परिमेय और अपरिमेय फलनों का समाकलन

इकाई की रूपरेखा

13.1	प्रस्तावना उद्देश्य	86
13.2	परिमेय फलनों का समाकलन कुछ सरल परिमेय फलन आंशिक भिन्न वियोजन प्रतिस्थापन विधि	86
13.3	परिमेय त्रिकोणमितीय फलनों का समाकलन	95
13.4	अपरिमेय फलनों का समाकलन	99
13.5	सारांश	103
13.6	हल और उत्तर	103

13.1 प्रस्तावना

पिछली दो इकाईयों में आपने समाकलन के विभिन्न तरीकों के बारे में पढ़ा। इस खंड की यह अंतिम इकाई है और इसके साथ ही समाकलन की विभिन्न विधियों की हमारी चर्चा पूर्ण हो जाएगी। यहां पर परिमेय फलनों के समाकलन के तरीकों का विस्तृत वर्णन किया जाएगा। आंशिक भिन्न वियोजन (partial fraction decomposition) से आप शायद पहले से ही परिचित होंगे। भाग 2 में वर्णित विधि इसी आंशिक भिन्न वियोजन पर आधारित है।

इस इकाई में बाद में कुछ सरल प्रकार के अपरिमेय फलनों को लिया जाएगा। परंतु अपरिमेय फलनों को समाकलित करने के तरीकों की संपूर्ण चर्चा इस पाठ्यक्रम के दायरे में नहीं आती। किसी भी दिये हुए फलन के समाकल को प्राप्त करने के तरीके के विषय में निर्णय लेने से पहले जिन बातों पर विचार कर लेना चाहिए उन बातों की सूची देते हुए हम इस इकाई को समाप्त करेंगे।

इकाई 11 में आप कई मानक रूपों, जैसे $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$, आदि से परिचित हो चुके हैं।

इस प्रकार के मानक रूपों की आवश्यकता आपको इस इकाई के अध्ययन में पड़ेगी।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप

- उचित परिमेय फलनों की पहचान कर सकेंगे।
- परिमेय फलनों को आंशिक भिन्न विधि द्वारा समाकलित कर सकेंगे।
- $\sin x$ और $\cos x$ के कुछ परिमेय फलनों को समाकलित कर सकेंगे।
- कुछ नियत प्रकार के अपरिमेय फलनों के समाकलों के मान ज्ञात कर सकेंगे।
- किसी भी दिये हुए फलन को समाकलित करने के लिए किस तरीके का प्रयोग किया जाए इस विषय में निर्णय ले सकेंगे।

13.2 परिमेय फलनों का समाकलन

अब तक आप जान ही चुके हैं कि किसी भी बहुपदीय फलन, अर्थात् फलन f, जो $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_0$ द्वारा परिभाषित हो, को समाकलित करना सरल है। इस भाग में हम देखेंगे कि परिमेय फलनों को कैसे समाकलित किया जाता है। परंतु पहले आइए, परिमेय फलनों की परिभाषा पर विचार करें।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

परिभाषा 1: फलन R **परिमेय फलन** (rational function) कहलाता है यदि इसको

$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ द्वारा परिभाषित किया गया हो, जहाँ पर P(x), और Q(x) दोनों ही बहुपद हैं। यह

फलन x के उन सभी मानों के लिए परिभाषित होता है जिनके लिए $P(x) \neq 0$.

यदि Q(x) का घात P(x) के घात से छोटा हो तो हम कहते हैं कि R(x) एक **उचित परिमेय फलन** (proper rational function) है।

अतएव,

$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$, एक उचित परिमेय फलन है,

किन्तु $g(x) = \frac{x^3+x^2+2}{x-1}$ उचित परिमेय फलन नहीं है।

परन्तु g(x) निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है।

$g(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{17}{x-2}$ (लम्बे भाग द्वारा)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x + 6 \\
x - 2 & x^3 + x^2 + 5 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & 3x^2 + 5 \\
 & 3x^2 - 6x \\
 & 6x + 5 \\
 & 6x - 12 \\
 & 17
\end{array}
$$

यहां पर हमने g(x), जो एक उचित परिमेय फलन नहीं है, को एक बहुपद और एक उचित परिमेय फलन के योग के रूप में प्रस्तुत किया है। यह किसी भी परिमेय फलन के लिए किया जा सकता है। अतः हम सदैव ही निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

एक परिमेय फलन	=	एक बहुपद	+	एक उचित परिमेय फलन

जैसा कि हम पहले ही कह चुके हैं, बहुपदों को समाकलित करना सरल है। इसका अर्थ है कि किसी भी परिमेय फलन को समाकलित करने की समस्या को उचित परिमेय फलनों को समाकलित करने की समस्या में परिवर्तित किया जा सकता है। अतः उचित परिमेय फलनों को समाकलित करने के तरीकों का अध्ययन करना ही पर्याप्त है। परन्तु पहले, आइए, देखें कि क्या आप उचित परिमेय फलनों की पहचान कर सकते हैं?

E E 1) **निम्न फलनों में से कौन से फलन उचित परिमेय फलन हैं? जो फलन उचित नहीं हैं उन्हें एक बहुपद और एक उचित परिमेय फलन के योग के रूप में लिखिए।**

क) $\frac{x^3+1}{x^4+x+1}$ ख) $\frac{x^2+x-3}{x^2+1}$ ग) $\frac{x+8}{x^2+5x+18}$ घ) $\frac{x^4+x^3-5}{x-2}$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

13.2.1 कुछ सरल परिमेय फलन

अब हम कुछ सरल प्रकार के उचित परिमेय फलनों, जैसे $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-b)^k}$ और $\frac{x-m}{ax^2+bx+c}$ पर विचार करेंगे। बाद में आप देखेंगे कि प्रत्येक उचित परिमेय फलन इन सरल प्रकार के फलनों के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

हम कुछ उदाहरणों के द्वारा इन फलनों को समाकलित करने के तरीकों को सुस्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 1 सबसे सरल उचित परिमेय फलन $\frac{1}{x-a}$, के प्रकार का होता है। इकाई-10 में आप देख चुके हैं कि

$$\int\frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$$

उदाहरण 2 फलन $f(x) = \frac{1}{(x+2)^4}$ को लीजिए।

इस फलन को समाकलित करने के लिए हम प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करेंगे। इस विधि का अध्ययन आप इकाई 11 में कर चुके हैं। अतएव, यदि हम $u = x + 2$ लें, तो $\frac{du}{dx} = 1$ और हम लिख सकते हैं

$$\int\frac{1}{(x+2)^4}dx = \int\frac{1}{u^4}du = \int u^{-4}du$$

$$= \frac{u^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{3(x+2)^3} + c$$

अगला उदाहरण थोड़ा सा अधिक कठिन है।

उदाहरण 3 फलन $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+5}$ को लीजिए।

इस फलन का हर एक द्विघात फलन है।

अब $\int\frac{2x+3}{x^2-4x+5}dx$ को $\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + \int\frac{7}{x^2-4x+5}dx$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। संभवतः आप सोच रहे होंगे कि हमने इस समाकल को दो भागों में क्यों विभाजित किया है। इस विभाजन का कारण यह है कि अब दाईं तरफ के प्रथम समाकल में समाकल्य का रूप $\frac{g'(x)}{g(x)}$ है और हम जानते हैं कि

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| + c$$

अतः $\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx = \ln|x^2-4x+5| + c_1$

दाईं तरफ के दूसरे समाकल के मान को ज्ञात करने के लिए हम लिखेंगे

$$\int\frac{1}{x^2-4x+5}dx = \int\frac{1}{(x^2-4x+4)+1}dx = \int\frac{1}{(x-2)^2+1}dx$$

अब यदि हम $x - 2 = u$ लें, तो $\frac{du}{dx} = 1$ और

$$\int\frac{1}{x^2-4x+5}dx = \int\frac{1}{u^2+1}du = \tan^{-1}u + c_2 = \tan^{-1}(x-2) + c_2.$$

इसका अर्थ है,

$$\int\frac{2x+3}{x^2-4x+5}dx = \ln|x^2-4x+5| + 7\tan^{-1}(x-2) + c.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इस अनुभाग के प्रारंभ में हमने कहा था कि कोई भी उचित परिमेय फलन ऊपर दिए गए तीन उदाहरणों में लिए गए फलनों के समरूप फलनों के योगफल के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। अगले अनुभाग में हम देखेंगे कि यह किस प्रकार किया जा सकता है। परन्तु अगला अनुभाग पढ़ने से पहले आप कुछ अभ्यास हल करने का प्रयत्न कीजिए। इससे इस अनुभाग में दिए गए समाकलों के समरूप समाकलों के मान ज्ञात करने का आपको अभ्यास होगा।

E E2) निम्न समाकलों का मान ज्ञात कीजिए :

क) $\frac{dx}{2x-3}$ ख) $\int \frac{dt}{(t+5)^2}$ ग) $\int \frac{2x+1}{x^2+8x+1} dx$ घ) $\int \frac{4x+1}{x^2+x+2} dx$

13.2.2 आंशिक भिन्न वियोजन

स्कूल में आपने बहुपदों के गुणन खंड ज्ञात करने की विधियों का अवश्य अध्ययन किया होगा। उदाहरणार्थ, आप जानते होंगे कि

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

यहाँ पर $(x-2)$ और $(x-3)$, $x^2 - 5x + 6$ के दो रैखिक (एकघाती) गुणन खंड हैं।

आपने $x^2 + x + 1$ की तरह के बहुपदों का अध्ययन भी अवश्य ही किया होगा और आप को याद होगा कि इन फलनों को वास्तविक रैखिक गुणन खंडों के गुणनफल के रूप में नहीं लिखा जा सकता। किसी भी दिये हुए बहुपद को रैखिक गुणन खंडों में विभाजित करना हमेशा ही संभव नहीं होता। परन्तु सैद्धांतिक रूप से किसी भी बहुपद को रैखिक और द्विघाती गुणन खंडों में विभाजित किया जा सकता है। यहाँ पर हम इस कथन को सिद्ध नहीं करेंगे। यह कथन बीजगणित के मूल प्रमेय का परिणाम है और इस प्रमेय को रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम की इकाई 11 में प्रस्तुत किया गया है। बहुपदों को गुणन खंडों में विभाजित करने का कार्य इतना सरल नहीं है। परन्तु यदि किसी उचित परिमेय फलन के हर को गुणन खंडों में विभाजित करना

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

संभव हो तो हम उस फलन को समाकलित करने के लिए आंशिक भिन्न वियोजन विधि का उपयोग कर सकते हैं। निम्न उदाहरण इस विधि को सुस्पष्ट करेगा।

उदाहरण 4 : आइए, $\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$ का मान ज्ञात करें।

यहाँ पर समाकल्य $\frac{5x-1}{x^2-1}$ एक उचित परिमेय फलन है।

इसका हर $x^2 - 1$ रैखिक गुणन खंडों में विभाजित किया जा सकता है :

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

अतः हम $\frac{5x-1}{x^2-1}$ का वियोजन आंशिक भिन्नों में इस प्रकार कर सकते हैं :

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

यदि हम दोनों तरफ $(x-1)(x+1)$ से गुणा करें तो हमें प्राप्त होगा

$$5x - 1 = A(x+1) + B(x-1)$$

अर्थात् $5x - 1 = (A+B)x + A - B$.

x के गुणांकों की तुलना करने पर हमें प्राप्त होगा $A + B = 5$ और दोनों तरफ अचर पदों की तुलना करने पर प्राप्त होगा $A - B = -1$. A और B के इन दोनों समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त होता है $A = 2$ और $B = 3$.

अतः $\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1}$

इस समीकरण के दोनों तरफ के फलनों को समाकलित करने पर हम पाते हैं कि

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{x+1}dx$$

$$= 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x+1| + c.$$

जैसा कि हमने देखा $\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$ का मान ज्ञात करने में सबसे महत्वपूर्ण कदम समाकल्य को आंशिक भिन्नों में वियोजित करना था। दो अज्ञात संख्याओं A और B के मान निकालने की प्रक्रिया में दो अज्ञात राशि वाले साधारण युगपत समीकरणों को हल करना पड़ता है। परन्तु हर का घात जितना बड़ा होगा अज्ञात राशियों की संख्या भी उतनी ही अधिक होगी और उनके मान ज्ञात करने का कार्य काफ़ी कठिन हो सकता है। ऐसी स्थिति में हम क्या कर सकते हैं? एक बहुत ही सरल उपाय है।

समीकरण $5x - 1 = A(x+1) + B(x-1)$ में हम यदि $x = -1$ लें तो हमें प्राप्त होगा $-6 = -2B$ या $B = 3$. इसी प्रकार यदि $x = 1$ लें तो $4 = 2A$ या $A = 2$.

ध्यान दें कि 1 और -1, हर $x^2 - 1$ के मूल (zeros) हैं।

आपको मानना पड़ेगा कि A और B को ज्ञात करने का यह तरीका सचमुच ही आसान है।

आइए, अब अगले उदाहरण पर ध्यान दें।

उदाहरण 5 : मान लीजिए हम $\frac{2x^2+x-4}{x^3-x^2-2x}$ को समाकलित करना चाहते हैं।

सर्वप्रथम हम देखते हैं कि हर को हम $x(x+1)(x-2)$ के रूप में वियोजित कर सकते हैं। हम लिख सकते हैं कि

$\frac{2x^2+x-4}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$. $x^3 - x^2 - 2x$ से गुणा करने पर हमें प्राप्त होगा

$$2x^2 + x - 4 = (x+1)(x-2)A + x(x-2)B + x(x+1)C$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अब यदि हम $x = 0$ इस समीकरण मे रखें तो हमे प्राप्त होगा $-4 = -2A$ या $A = 2$.
यदि $x = -1$ रखें तो $-3 = 3B$ या $B = -1$.
यदि $x = 2$ रखें तो $6 = 6C$ या $C = 1$.

अत: $$\int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x} dx = 2\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx$$
$$= 2 \ln |x| - \ln |x + 1| + \ln |x - 2| + c.$$

$x^3 - x^2 - 2x$ के 0, -1 और 2 मूल हैं।

जब हर में पुनरावृत्त रैखिक गुणन खंड हों, तो इस विधि का उपयोग कैसे किया जाए यह हमारे अगले उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगा।

उदाहरण 6 : $\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx$ के समाकल्य के हर को देखिए। इसको $(x-1)^2 (x-2)$ में विभाजित किया जा सकता है। $x^3 - 3x + 2$ के वियोजन में गुणन खंड $x - 1$ की पुनरावृत्ती दो बार हुई है। इस स्थिति में हम लिखते हैं :

$$\frac{x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$
इसके बाद हम A, B और C को ज्ञात करने के लिए पहली वाली प्रक्रिया ही अपनाएंगे।

अत: हमें प्राप्त होगा

$$x = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$
हम $x = 1$ और $x = -2$ लें तो हमें प्राप्त होगा $C = \frac{1}{3}$ और $A = \frac{-2}{9}$.
तब B का मान ज्ञात करने के लिए x का कोई और सुविधाजनक मान लेते हैं। मान लीजिए $x = 0$.

तब हमें प्राप्त होगा $0 = A - 2B + 2C$

या $$0 = \frac{-2}{9} - 2B + \frac{2}{3}$$
इसका मतलब है कि $B = \frac{2}{9}$.

अत: $$\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{-2}{9}\int \frac{1}{x+2} dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{3}\int \frac{C}{(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{-2}{9} \ln |x + 2| + \frac{2}{9} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1}\right) + c$$
$$= \frac{2}{9} \ln \left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3(x-1)} + c.$$
अगले उदाहरण, उदाहरण 7 में हम उस स्थिति पर विचार करेंगे जिसमें समाकल्य के हर में एक अखंडनीय द्विघात गुणन खंड हो (अर्थात्, एक द्विघात गुणन खंड, जिसको रैखिक गुणन खंडों में विभाजित करना संभव नहीं है।)

उदाहरण 7 : आइए, $\int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} dx$ का मान निकालें।

पहले हम $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$ को गुणन खंडों में विभाजित करेंगे :

$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = x(x-2)(x^2+1)$. अब हम लिख सकते हैं

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}$$

अत: $6x^3 - 11x^2 + 5x - 4 = A(x-2)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (cx + D)x(x-2)$

अब $x = 0$ और $x = 2$ के प्रतिस्थापन से हम प्राप्त कर सकते हैं : $A = 2$ और $B = 1$. अब हम कोई सुविधाजनक मान $x = 1$ और $x = -1$ लेते हैं। इससे $C = 3$ और $D = -1$ प्राप्त होगा।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अतएव $\int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} dx = 2\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{3x-1}{x^2+1} dx$

$$= 2 \ln |x| + \ln |x-2| + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 2 \ln |x| + \ln |x-2| + \frac{3}{2} \ln (x^2+1) - \tan^{-1}x + c.$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि समाकल्य, जो एक उचित परिमेय फलन है, को आंशिक भिन्नों में वियोजित कर लिया जाए तो वांछित समाकल्य को उदाहरण 1, 2 और 3 में लिए गए समाकल्यों के समरूप समाकल्यों के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

अब तक हमने जिन फलनों को समाकलित किया वे सभी उचित परिमेय फलन थे। अब हम एक ऐसे परिमेय फलन का उदाहरण लेंगे जो उचित नहीं है।

उदाहरण 8 : आइए, $\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x - 2} dx$ का मान निकालें। चूंकि यह समाकल्य एक उचित परिमेय फलन नहीं है, अतः हम सर्वप्रथम इसको एक बहुपद और एक उचित परिमेय फलन के योग के रूप में लिखेंगे।

अतः $\frac{x^3 + 2x}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{5x+2}{x^2 - x - 2}$

इसलिए, $\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x - 2} dx = \int x dx + \int 1 dx + \int \frac{5x+2}{x^2 - x - 2} dx$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{5x+2}{x^2 - x - 2} dx.$$

आइए, अब $\frac{5x+2}{x^2 - x - 2}$ को आंशिक भिन्नों में वियोजित करते हैं। इस प्रकार

$$\frac{5x+2}{x^2 - x - 2} = \frac{5x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$$5x + 2 = A(x+1) + B(x-2)$$

यदि $x = -1$, तो $-3 = -3B$, अर्थात् $B = 1$.

यदि $x = -2$, तो $12 = 3A$, अर्थात् $A = 4$.

अतः $\int \frac{5x+2}{x^2 - x - 2} dx = 4\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+1}$

$$= 4 \ln |x-2| + \ln |x+1| + c.$$

अतएव $\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x - 2} dx = \frac{x^2}{2} + x + 4 \ln |x-2| + \ln |x+1| + c.$

अब आप निम्न अभ्यास हल करने का प्रयत्न कीजिए। आप देखेंगे कि प्रत्येक समाकल्य उदाहरण 1 से 8 में लिये गये विभिन्न समाकल्यों में से किसी एक प्रकार का है।

E E3) मान निकालिए :

क) $\int \frac{2}{x^2 + 2x} dx$ ख) $\int \frac{x dx}{x^2 - 2x - 3}$ ग) $\int \frac{3x - 13}{x^2 + 3x - 10} dx$

घ) $\int \frac{6x^2 + 22x - 23}{(2x-1)(x^2 + x - 6)} dx$ ङ) $\int \frac{3x^3}{x^2 + x - 2} dx$

च) $\int \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2 - x + 1)} dx$ छ) $\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2+1)^2} dx$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

13.2.3 प्रतिस्थापन विधि

आंशिक भिन्न वियोजन विधि, जिसका अध्ययन हमने पिछले अनुभाग में किया था, का प्रयोग हम सभी परिमेय फलनों के लिए कर सकते हैं। क्योंकि जैसा कि हम पहले भी कह चुके हैं, बीजगणित का मूल प्रमेय इस बात की गारंटी देता है कि प्रत्येक बहुपद को हम एकघाती और द्विघाती गुणन खंडों में विभाजित कर सकते हैं। परन्तु बहुपदों के गुणन खंडों को निकालने की प्रक्रिया कभी-कभी इतनी आसान नहीं होती। ऐसी स्थिति में कभी-कभी प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग समाकल के परिकलन को आसान बना सकता है। इसलिए यह आवश्यक है कि समाकल्य की सर्वप्रथम ठीक से जाँच की जाए। एक दिये हुए परिमेय फलन को कभी-कभी किस प्रकार उपयुक्त प्रतिस्थापन के द्वारा समाकलित किया जा सकता है यह स्पष्ट करने के लिए अब हम दो उदाहरण देंगे।

उदाहरण 9 : मान लीजिए हम $\frac{1}{x(x^5+1)}$ को x के सापेक्ष समाकलित करना चाहते हैं।

इसके लिए हम लिखेंगे $\int \frac{dx}{x(x^5+1)} = \int \frac{x^4 dx}{x^5(x^5+1)}$

अब, आइए, हम $x^5 = t$ लेते हैं। तब $\frac{dt}{dx} = 5x^4$, और

$$\int \frac{x^4 dx}{x^5(x^5+1)} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t(t+1)}$$

$$= \frac{1}{5}\int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right] dt$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left|\frac{t}{t+1}\right|$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left|\frac{x^5}{x^5+1}\right|$$

उदाहरण 10 : आइए, $\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$ को x के सापेक्ष समाकलित करें।

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx = \int \frac{(1-1/x^2)}{x^2+1+1/x^2} dx \quad (x^2 \text{ से भाग देने पर})$$

$$= \int \frac{(1-1/x^2)}{(x+1/x)^2-1} dx = \int \frac{dt}{t^2-1} \quad \text{यदि हम } t = x + \frac{1}{x} \text{ लें।}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + c$$

उदाहरण 9 और 10 में आपने देखा होगा कि समाकल्यों के हरों को आसानी से गुणन खंडों में विभाजित नहीं किया जा सकता था। परन्तु प्रतिस्थापन विधि के द्वारा उनका समाकलन आसान हो गया था। क्या आप अब इन अभ्यासों को हल कर सकते हैं?

E E4) निम्न फलनों को x के सापेक्ष समाकलित कीजिए।

क) $\frac{x^2-1}{1+x^4}$ ख) $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इस भाग के अभ्यासों द्वारा आपको परिमेय फलनों का समाकलन करने का काफी अभ्यास हो गया होगा। अगले भाग में हम परिमेय त्रिकोणमितीय फलनों पर विचार करेंगे।

13.3 परिमेय त्रिकोणमितीय फलनों का समाकलन

आप जानते हैं कि दो चरों x और y के बहुपद निम्न रूप के व्यंजक होते हैं।

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{l} a_{m,n} x^m y^n, \quad a_{m,n} \in \mathbf{R}$$

इसी तरह, sin x और cos x का एक बहुपद निम्न प्रकार का व्यंजक होगा।

$$P(\sin x, \cos x) = \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{l} a_{m,n} \sin^m x \cos^n x, \quad a_{m,n} \in \mathbf{R}.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

P(sin x, cos x) का समाकलन सरलतापूर्वक किया जा सकता है क्योंकि हम इकाई 12 में $\sin^m x \cos^n x$ को समाकलित कर चुके हैं। एक व्यंजक, जो दो बहुपदों, P(sin x, cos x) और Q(sin x, cos x) का अनुपात हो, sin x और cos x का परिमेय फलन कहलाता है। इस भाग में हम sin x और cos x के कुछ सरल परिमेय फलनों के समाकलन की चर्चा करेंगे। सर्वप्रथम हम इन फलनों को समाकलित करने की व्यापक विधि बतायेंगे।

sin x और cos x का एक परिमेय फलन f(sin x, cos x) लीजिए। f के समाकलन के मान को प्राप्त करने में सबसे पहला कदम होगा $\tan \frac{x}{2} = t$ का प्रतिस्थापन।

अत: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2} = \frac{1+t^2}{2}$

चूंकि $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan x/2}{\sec^2 x/2} = \frac{2t}{1+t^2}$

और $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2 x/2}{\sec^2 x/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

अतएव हम पाते हैं कि

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$\int F(t)\, dt$$

जहाँ $F(t) = f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$,

t का एक परिमेय फलन है। अब हम F(t) को समाकलित करने के लिए आंशिक भिन्न वियोजन विधि का प्रयोग कर सकते हैं। इस विधि से हम तत्वत: sin x और cos x के किसी भी परिमेय फलन को समाकलित कर सकते हैं।

परन्तु वास्तव में हम देखते हैं कि परिमेय फलन F(t) प्राय: काफ़ी जटिल होता है और आंशिक भिन्न विधि को प्रयोग में लाना संभव नहीं होता। इस इकाई में हम केवल कुछ सरल परिमेय फलनों की ही चर्चा करेंगे।

उदाहरण 11 : आइए, $\frac{1}{a + b\cos x}$ का समाकलन करें।

अब $a + b\cos x = a\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)$

$$= (a+b)\cos^2\frac{x}{2} + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}$$

अत: $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{\sec^2 x/2\, dx}{(a-b)\left[\frac{a+b}{a-b} + \tan^2\frac{x}{2}\right]}$

यदि हम $\tan\frac{x}{2} = t$ लें, तो हम प्राप्त करते हैं

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = 2\int \frac{dt}{(a-b)\left[\frac{a+b}{a-b} + t^2\right]}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{\frac{a+b}{a-b} + t^2}$$

यदि $a > b > 0$, तो $\frac{a+b}{a-b} > 0$ और हम प्राप्त करते हैं

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

यदि $0 < a < b$, तो $\frac{a+b}{a-b} < 0$, और

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\, t}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\, t}$$

उदाहरण 12 : $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x\,(1 + \cos x)}\, dx$ का मान निकालने के लिए हम लिखते हैं

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x\,(1 + \cos x)}\, dx = \int \frac{dx}{\sin x\,(1 + \cos x)} + \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sin x/2 \cos^3 x/2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x/2}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\sec^4 x/2}{\tan x/2}\, dx + \frac{1}{2} \int \sec^2 x/2\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + t^2}{t}\, dt + \int dt \quad (\tan x/2 = t)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{t}\, dt + \int t\, dt \right] + \int dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{t^2}{4} + t + c$$

$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$

$\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

अत: $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x\,(1 + \cos x)}\, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + c.$

अब बिल्कुल इसी तरह आप निम्न अभ्यासों को हल कर सकते हैं।

E E 5) $\int \frac{dx}{a + b\sin x}$ का मान निकालिए।

E E 6) समाकलित कीजिए।

क) $\frac{1}{4 + 5\cos x}$ ख) $\frac{\cos x}{2 - \cos x}$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अब तक आप समाकलन की अनेक अलग-अलग विधियों का प्रयोग कर चुके हैं। किसी भी दिये हुए फलन को समाकलित करने के लिए सबसे महत्वपूर्ण बात है, उचित विधि का चुनाव।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि आपको फलन $\frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}$ को समाकलित करना है। यह पहचानते हुए कि यह $\sin x$ और $\cos x$ का एक परिमेय फलन है, आप $\tan \frac{x}{2} = t$ ले सकते हैं, और तब आप लिखेंगे

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx = \int \frac{t\,(1 - t^2)\, dt}{(1 + t^2)\,(1 + 6t^2 + t^4)}$$

अब $1 + 6t^2 + t^4 = (3 + \sqrt{8} + t^2)\,(3 - \sqrt{8} + t^2)$.

अब तक आप जान गए होंगे कि इस प्रकार हल निकालना काफ़ी कठिन काम है।

परन्तु चिन्ता मत कीजिए। एक सरल मार्ग है।

$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ में यदि हम $1 + \sin^2 x = t$ प्रतिस्थापित करें तो हमें प्राप्त होता है

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln (1 + \sin^2 x) + c$$

अतएव, विधि का सही चुनाव बहुत ही महत्व रखता है और केवल अभ्यास ही आपको अच्छा चुनाव करने में सहायता कर सकता है।

अगले भाग में हम आपको अपरिमेय फलनों को समाकलित करने की कुछ विधियों के बारे में बताएंगे।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

13.4 अपरिमेय फलनों का समाकलन

यदि दिया हुआ फलन एक अपरिमेय फलन हो, अर्थात् यदि वह $\frac{Q(x)}{P(x)}$ के रूप का न हो तो उसको समाकलित करने का कार्य थोड़ा कठिन हो जाता है। इस भाग में हम आपको कुछ विशेष प्रकार के अपरिमेथ फलनों को समाकलित करने के कुछ संकेत देंगे। अधिकतर हम किसी उपयुक्त प्रतिस्थापन द्वारा एक परिमेय फलन तक पहुँचने का प्रयास करेंगे। तब इस परिमेय फलन के समाकल के मान को हम भाग 2 में विकसित विधियों द्वारा आसानी से प्राप्त कर सकते हैं।

I. x के केवल भिन्नात्मक घात वाले फलनों का समाकलन

इस स्थिति में हम $x = t^n$ लेते हैं जहाँ पर n, x के घातों के हरों का लघुतम समापवर्त्य है। यह प्रतिस्थापन फलन को t के एक परिमेय फलन में बदल देता है।

आइए, एक उदाहरण पर नजर डालें।

उदाहरण 13 : आइए, $\int \frac{2x^{1/2} + 3x^{1/3}}{1 + x^{1/3}} dx$ का मान ज्ञात करें। चूँकि 6, 2 और 3 का लघुतम समापवर्त्य है, अतः हम $x = t^6$ लेंगे और तब हमें प्राप्त होगा :

$$\int \frac{2x^{1/2} + 3x^{1/3}}{1 + x^{1/3}} dx = 6\int \frac{2t^3 + 3t^2}{1 + t^2} t^5 dt$$

$$= 6\int \frac{2t^8 + 3t^7}{1 + t^2} dt = 6\int \left[2t^6 + 3t^5 - 2t^4 - 3t^3 + 2t^2 + 3t - 2 - \frac{3t - 2}{1 + t^2} \right] dt$$

$$= 6\left[\frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{2}t^6 - \frac{2}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 2t - \frac{3}{2}\ln|1 + t^2| + 2\tan^{-1}t \right] + c$$

$$= \frac{12}{7}x^{7/6} + 3x - \frac{12}{5}x^{5/6} - \frac{9}{2}x^{2/3} + 4x^{1/2} + 9x^{1/3} - 12x^{1/6} - 9\ln|1 + x^{1/3}|$$

$$+ 12\tan^{-1}x^{1/6} + c.$$

II. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ जैसे समाकल

यहाँ पर हमें दो स्थितियों i) $a > 0$ और ii) $a < 0$ पर विचार करना होगा। प्रत्येक स्थिति में हम दिए हुए समाकल्य को एक ऐसे समाकल्य के रूप में प्रस्तुत करने का प्रयत्न करेंगे, जिसको समाकलित करना हम जानते हैं।

i) $a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + bx/a + c/a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + b/2a)^2 + c/a - b^2/4a^2}}$$

यदि हम $t = x + \frac{b}{2a}$ लें, तो हम प्राप्त करते हैं

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + (c/a - b^2/4a^2)}}$$

इकाई 11 की तालिका 3 में दिए हुए समाकलों के मानक रूपों मे से यह एक है।

ii) $a < 0$

यदि $-a = d$ लिया जाए तो $d > 0$ होगा और हम लिख सकते हैं

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \int \frac{dx}{\sqrt{(c/d) + b^2/4d^2) - (x - b/2d)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d}} \int \frac{dx}{\sqrt{(c/d) + b^2/4d^2) - t^2}}, \quad \text{यदि } t = \frac{x-b}{2d}$$

यह भी एक मानक रूप है।

III. $\frac{1}{(fx+e)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ का समाकलन

इस समाकल के मान प्राप्त करने की प्रक्रिया को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 14 : मान लीजिए हम $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}$ को समाकलित करना चाहते हैं।

आइए, $x + 1 = y$ लें। तब $-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 1$

अब हम $x^2 + 4x + 2$ को y के व्यंजक के रूप में व्यक्त करने का प्रयत्न करेंगे।

$$x^2 + 4x + 2 = (x+1)^2 + 2(x+1) - 1$$

$$= \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} - 1 = \frac{1+2y-y^2}{y^2}$$

अतः $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}} = \int \frac{-1/y^2\, dy}{1/y\sqrt{\frac{1+2y-y^2}{y^2}}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1+2y-y^2}}$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{2-(y-1)^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{-x}{(x+1)\sqrt{2}}\right] + c$$

इस उदाहरण से पता चलता है कि $\frac{1}{(fx+e)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ को समाकलित करने के लिए हमें प्रतिस्थापन $fx + e = \frac{1}{y}$ का प्रयोग करना चाहिए। और तब समाकल्य को y के व्यंजक के रूप में सरल करना चाहिए।

आइए, अब अगले उदाहरण पर विचार करें।

IV. $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ का समाकलन

हम $Ax + B$ को दो भागों में लिखेंगे। इसमें से पहला भाग $ax^2 + bx + c$ के अवकल, अर्थात् $2ax + b$ का एक अचर गुणांक है, और दूसरा एक अचर है। अतः

$$Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{Ab}{2a}, \text{ और}$$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{2aB-Ab}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aB-Ab}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

अंतिम समाकल का मान निकालने की विधि की चर्चा II) में की जा चुकी है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

V. $(Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c}$ का समाकलन

जैसा कि हमने IV) में किया था हम Ax + B को दो भागों में लिखते हैं और प्राप्त करते हैं

$$\int (Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{A}{2a}\int (2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$$

$$+ \frac{B2a - Ab}{2a}\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$$

$$= \frac{A}{3a}(ax^2 + bx + c)^{3/2} + \frac{2aB - Ab}{2a}\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$$

हम पहले ही देख चुके हैं कि दाईं तरफ वाले समाकलन के मान को कैसे प्राप्त किया जा सकता है। (भाग 4, इकाई 11 देखिए।) आइए इन विधियों का प्रयोग कुछ उदाहरण हल करने में करें।

उदाहरण 15 : $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\, dx$ का समाकलन करने के लिए हम यह नोट करते हैं कि

$x + 2 = \frac{1}{2}(2x + 2) + 1$ और इसलिए लिखते हैं

$$\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\, dx = \frac{1}{2}\frac{(2x + 2)\, dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sinh^{-1}\frac{x + 1}{\sqrt{2}} + c.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 2}}$$

उदाहरण 16 : $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ dx का मान प्राप्त करने के लिए हम देखते हैं कि

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + x + 1 + x + 2$$

$$= (x^2 + x + 1) + \frac{1}{2}(2x + 1) + \frac{3}{2}$$

अतएव

$$\int \frac{(x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx = \int \sqrt{x^2 + x + 1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{(2x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$$

$$+ \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1/2)^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= \int \sqrt{(x + 1/2)^2 + \frac{3}{4}}\, dx + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$+ \frac{3}{2}\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + c$$

$$= \frac{(x + 1/2)}{2}\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8}\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)$$

$$+ \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{2}\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4}(2x + 5)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{15}{8}\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + c$$

यहाँ पर हमने इकाई 11 के दो परिणामों को प्रयोग में लाया है :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right) + c,$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right) + c$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अब आप निम्न प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए

E E 7) निम्न फलनों को समाकलित कीजिए

क) $\dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}}$ ख) $\dfrac{1}{(2 - x)\sqrt{1 - 2x + 3x^2}}$

जब भी आपका किसी नये समाकल्य से सामना हो तो निम्न सुझाव इन विधियों की भूलभुलैया से बाहर आने में आपका मार्गदर्शन करेंगे।

1) समाकल्य कीं जाँच करके देखिए कि क्या यह $\int u^n du$ या $\int \frac{du}{u}$ के समान है?

2) क्या समाकल्य किसी ऐसे प्रकार का है जिसको अवकल सूत्रों को उलट कर प्राप्त किया जा सके? इस विधि का इकाई 11 में अध्ययन किया गया है।

3) यदि इनमें से कोई भी प्रकार उपयुक्त नहीं है और यदि समाकल्य एक परिमेय फलन है तो आंशिक भिन्न वियोजन इस को समाकलित करने में सहायता करेगा।

4) यदि समाकल्य $\sin x$ और $\cos x$ का एक परिमेय फलन है और पिछली इकाई के सभी सरल तरीके असफल रहते हैं, तो इसे प्रतिस्थापन $t = \tan \frac{x}{2}$ द्वारा t के एक परिमेय फलन में परिवर्तित किया जा सकता है और फिर उसके समाकल का मान ज्ञात किया जा सकता है।

5) यदि समाकल्य $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ जैसे प्रकार का हो, तो त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन $x = a \cos \theta$ या $x = a \sin \theta$ या $x = a \sec \theta$ की सहायता से समाकल्य को

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$\sin\theta$ और $\cos\theta$ के एक परिमेय फलन में परिवर्तित किया जा सकता है। यदि समाकल्य का रूप $\sqrt{ax^2+bx+c}$ की तरह का हो, तो वर्ग पूर्ण करते हुए $\left(\sqrt{a(x+b/2a)^2+c-b^2/4a}\right)$ जैसे ऊपर वर्णित किसी प्रकार में शामिल किया जा सकता है।

6) यदि समाकल्य x का कोई अपरिमेय फलन हो तो उसको किसी उपयुक्त प्रतिस्थापन द्वारा एक परिमेय फलन या समाकलनीय करणी (radical) में व्यक्त करने का प्रयत्न करना चाहिए।

7) समाकल्य की जाँच करके देखिए कि क्या खंडशः समाकलन संभव है?

अंत में, हम आपको दुबारा याद दिलाना चाहते हैं कि यदि आप समाकलन की विभिन्न विधियों में पारंगत होना चाहते हैं तो अभ्यास अत्यन्त आवश्यक है। हम पहले ही बता चुके हैं कि समाकलन की विधि का उपयुक्त चुनाव ही किसी भी समाकल का सही मान निकालने की कुंजी है। अब आइए, जो कुछ भी हमने इस इकाई में सीखा है उसे संक्षिप्त रूप में दोहरा लें।

13.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्न बातों पर विचार किया।

1) x का एक परिमेय $f(x), \frac{P(x)}{Q(x)}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ P(x) और Q(x), x के बहुपद हों। यदि P(x) का घात Q(x) के घात से छोटा हो, तो इसे उचित परिमेय फलन कहते हैं।

2) एक उचित परिमेय व्यंजक को आंशिक भिन्नों के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ इन भिन्नों के हर रैखिक या द्विघाती होते हैं।

3) किसी भी परिमेय फलन को आंशिक भिन्नों की विधि द्वारा समाकलित किया जा सकता है।

4) sin x और cos x के परिमेय फलनों का समाकलन $t = \tan\frac{x}{2}$ लेकर किया जा सकता है।

5) निम्न प्रकार के अपरिमेय फलनों के समाकलन की चर्चा की गई।

   i) x के भिन्न घात वाले समाकल्य

   ii) $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ iii) $\frac{1}{(fx+e)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

   iv) $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ v) $(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}$

6) समाकलन करते समय जिनका ध्यान रखना चाहिए ऐसीं बातों की एक जाँच सूची दी गई है।

13.6 हल और उत्तर

E1) क) और ग) उचित हैं।

ख) $\frac{x^2+x-3}{x^2+1} = 1 + \frac{x-4}{x^2+1}$

घ) $\frac{x^4+x^3-5}{x-2} = x^3+3x^2+6x+12+\frac{19}{x-2}$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E2) क) $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + c$

ख) $\int \frac{dt}{(t+5)^2} = \frac{-1}{t+5} + c$

ग) $\int \frac{2x+1}{x^2+8x+1}dx = \int \frac{2x+8}{x^2+8x+1}dx - 7\int \frac{dx}{x^2+8x+1}$

$= \ln|x^2+8x+1| - 7\int \frac{dx}{(x+4)^2-15}$

$= \ln|x^2+8x+1| - 7\int \frac{du}{u^2-15}$, if $u = x+4$.

$= \ln|x^2+8x+1| - \frac{7}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{15}}{u+\sqrt{15}}\right| + c$

$= \ln|x^2+8x+1| - \frac{7}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+4-\sqrt{15}}{x+4+\sqrt{15}}\right| + c$

घ) $\int \frac{4x+1}{x^2+x+2}dx = \int \frac{2(2x+1)-1}{x^2+x+2}dx$

$= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx - \int \frac{dx}{x^2+x+2}$

$= 2\ \ln|x^2+x+2| - \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}$

$= 2\ \ln|x^2+x+2| - \frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{7}/2}\right) + c$

E3) क) $\frac{2}{x^2+2x} = \frac{2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$

$\Rightarrow 2 = A(x+2) + Bx$

$x = 0 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

$x = -2 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$

$\therefore \frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$

$\therefore \int \frac{2}{x^2+2x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$

$= \ln|x| - \ln|x+2| + c = \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + c$

ख) $\frac{x}{x^2-2x-3} = \frac{x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$

$x = A(x+1) + B(x-3)$

$x=3 \Rightarrow 3 = 4A \Rightarrow A = \frac{3}{4}$

$x = -1 \Rightarrow -1 = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$\therefore \int \frac{x}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{3dx}{4(x-3)} + \int \frac{dx}{4(x+1)}$

$= \frac{3}{4}\ln|x-3| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + c$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

ग) $\frac{3x-13}{x^2+3x-10} = \frac{3x-13}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2}$

$\therefore\ 3x - 13 = A(x-2) + B(x+5)$

$x = 2 \Rightarrow -7 = 7B \Rightarrow B = -1$

$x = -5 \Rightarrow -28 = -7A \Rightarrow A = 4$

$$\therefore \int \frac{3x-13}{x^2+3x-10}\,dx = 4\int \frac{dx}{x+5} - \int \frac{dx}{x-2}$$
$$= 4\ \ln|x+5| - \ln|x-2| + c$$

घ) $\frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)(x^2+x-6)} = \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)(x+3)(x-2)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}$

$6x^2+22x-23 = A(x+3)(x-2) + B(x-2)(2x-1) + C(2x-1)(x+3)$

$x = 2 \Rightarrow 45 = 15\,C \Rightarrow C = 3$

$x = -3 \Rightarrow -35 = 35\,B \Rightarrow B = -1$

$x = 1/2 \Rightarrow \frac{-21}{2} = \frac{-21}{2} A \Rightarrow A = 1$

$$\therefore \int \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)(x^2+x-6)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1| - \ln|x+3| + 3\ln|x-2| + c$$

ङ) $\frac{3x^3}{x^2+x-2} = 3x - 3 + \frac{9x-6}{x^2+x-2}$

$$\therefore \int \frac{3x^3}{x^2+x-2}\,dx = \int (3x-3)\,dx + 3\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}\,dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 3x + 8\ln|x+2| + \ln|x-1| + c$$

च) $\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$\therefore\ x^2+x-1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x-1)$

$x = 1 \Rightarrow 1 = A$

इसलिए

$x^2 + x - 1 = x^2 - x + 1 + Bx^2 + (C-B)x - C$

$\Rightarrow 1 = 1 + B$ (x^2 के गुणांक)

$\therefore\ B = 0$

और $-1 = 1 - C$ (अचर पद)

$\therefore\ C = 2$

$$\therefore \int \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$
$$= \ln|x-1| + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

छ) $\frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

$\therefore\ x^3 - 4x = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$

$\therefore\ x^3 - 4x = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)$

$\therefore\ A = 1, B = 0, C = -5, D = 0$

$$\therefore \int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 5\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{5}{2}\frac{1}{(x^2+1)} + c$$

E4) क) $\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x+\frac{1}{x})^2-2}\,dx$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-2} \text{ यदि } t = x+\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + c$$

ख) $\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+1+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{(x-\frac{1}{x})^2+3}\,dx$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+3}, \text{ यदि } t = x-\frac{1}{x},\ \frac{dt}{dx} = 1+\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{x})\right\} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}\right) + c$$

E5) $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \int \frac{dt}{a(1+t^2)+2bt}$, यदि $t = \tan x/2$

$$= 2\int \frac{2dt}{at^2+2bt+a} = 2\int \frac{dt}{(\sqrt{a}t+\frac{b}{\sqrt{a}})^2+(\frac{a^2-b^2}{a})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{at+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + c$$

E6) क) $\int \frac{dx}{4+5\cos x} = 2\int \frac{dt}{\left\{4+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right\}\ (1+t^2)}$

$$= 2\int \frac{dt}{4+4t^2+5-5t^2} = 2\int \frac{dt}{9-t^2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right| + c$$

ख) $\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx = 2\int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{2-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\ \frac{dt}{(1+t^2)}$

$$= 2\int \frac{1-t^2}{2(1+t^2)^2-1+t^4}\,dt$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= 2\int \frac{1-t^2}{(t^2+1)(3t^2+1)}\,dt$$

यदि हम $\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)(3t^2+1)} = \dfrac{At+B}{t^2+1} + \dfrac{Ct+D}{3t^2+1}$ लिखें,

तो $1-t^2 = (At+B)(3t^2+1) + (Ct+D)(t^2+1)$

$\therefore\quad 1 = B + D$ (अचर)

$0 = A + C$ (t के गुणांक)

$-1 = 3B + D$ (t^2 के गुणांक)

$0 = 3A + C$ (t^3 के गुणांक)

$\therefore\ A = C = 0, B = -1, D = 2$

उत्तर $= -2\int \dfrac{dt}{t^2+1} + 4\int \dfrac{dt}{3t^2+1}$

$$= -2\tan^{-1}(t) + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\sqrt{3}\,t) + c$$

$$= -2\,\frac{x}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= -x + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

E7) क) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \frac{t^2}{1+t}\,4t^3dt$ यदि $t = \sqrt[4]{x}$

$$= 4\int \frac{t^5}{1+t}\,dt$$

$$= 4\int\left[t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right]dt$$

$$= 4\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right] + c$$

$$= 4\left[\frac{x^{5/4}}{5} - \frac{x}{4} + \frac{x^{3/4}}{3} - \frac{x^{1/2}}{2} + x^{1/4} - \ln|x^{1/4}+1|\right] + c$$

ख) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-2x+3x^2}}$ में $2-x = \dfrac{1}{t}$ रखिए। तब $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-2x+3x^2}} = \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{3(2-x)^2 - 10(2-x) + 9}}$$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{\dfrac{3}{t^2} - \dfrac{10}{t} + 9}}\,\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{9t^2 - 10t + 3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(3t - \frac{5}{3})^2 + \frac{2}{9}}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{5}{9})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{9})^2}} = \frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{t - 5/9}{\sqrt{2}/9}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{9}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{5}{9}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{5x-1}{\sqrt{2}\,(2-x)}\right) + c$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

NOTES

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-01
कलन

खंड

4

कलन के अनुप्रयोग

इकाई 14

अवकल गणित के अनुप्रयोग 5

इकाई 15

वक्र से परिबद्ध क्षेत्रफल 23

इकाई 16

समाकलन गणित के कुछ और अनुप्रयोग 49

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो० जे०एन० कपूर (अध्यक्ष)
जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो० इज़हार हुसैन
गणित विभाग
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़

प्रो० डी०एन० मिश्र
वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान परिषद्
नई दिल्ली

प्रो० एम०एस० नरसिंहम्
टाटा इंस्टीट्यूट आफ फंडामेंटल रिसर्च
बम्बई

प्रो० (श्रीमती) ए०आर० सिंघल
गणित विभाग
मेरठ विश्वविद्यालय

प्रो० एम०पी० सिंह
सेंटर फॉर एटमॉसफिरिक साइंसेज
आई०आई०टी०
दिल्ली

पाठ निर्माण दल

प्रो० जे०एन० कपूर (संपादक)
जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो० वी० कण्णन
स्कूल ऑफ मैथेमिटिक्स एण्ड इन्फर्मेशन साइंसेज
हैदराबाद विश्वविद्यालय

प्रो० आर०एस०एल० श्रीवास्तव (रिटायर्ड)
गणित विभाग
आई०आई०टी० कानपुर

डॉ० माणिक पटवर्धन
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ० परवीन सिंक्लेयर
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

समन्वय समिति

प्रो० बी०एस० शर्मा
सम-कुलपति (शैक्षिक)
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो० शक्ति आर० अहमद
निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ० एस० एन० चतुर्वेदी
निदेशक, क्षेत्रीय सेवाएं
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो० जी० साबंशिव राव
भाषा संपादक
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विंश्वविद्यालय

डॉ० माणिक पटवर्धन (पाठ्यक्रम समन्वयकर्त्री)
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ० ए० डब्ल्यू० खान
निदेशक, संचार प्रभाग
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो० बी० एन० कौल
निदेशक, शिक्षा विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

सामग्री निर्माण

श्री बालकृष्ण सेल्वराज
कुलसचिव
मुद्रण एवं प्रकाशन प्रभाग
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

जून 1990

© इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 1990

ISBN-81-7091-456-6

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस कार्य का कोई भी अंश इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110030 से प्राप्त की जा सकती है।

नीरूग्राफिक्स द्वारा फोटोकम्पोजड एवं आकाशदीप प्रिंटर्स द्वारा मुद्रित

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के अनुमति से पुनः मुद्रित। उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से डॉ0 आर0 के0 पाण्डेय, कुलसचिव द्वारा पुनः मुद्रित एवं प्रकाशित, फरवरी 2017

मुद्रक : बी0 आर0 कम्प्यूटर्स, बैहराना, इलाहाबाद

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

खंड 4 कलन के अनुप्रयोग

इस खंड में हम पिछले खंडों में अध्ययन की गई संकल्पनाओं से संबंधित कुछ अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे। हम खंड 2 में अवकलजों के कुछ ज्यामितीय अनुप्रयोगों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। यहां, अर्थात् इकाई 14 में, हम फलन-सिद्धांत (theory of functions) में इनके कुछ अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे। विशेष रूप से यहां हम कुछ असमिकाएं स्थापित करेंगे और कुछ बिन्दुओं पर कुछ फलनों के सन्निकट मान ज्ञात करेंगे।

हम इकाई 3 की प्रस्तावना में इस बात का उल्लेख कर चुके हैं कि वक्र के अंतर्गत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के दौरान कलन की नींव रखी गई थी। इकाई 15 में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार निश्चित समाकल की संकल्पना का प्रयोग वक्र के अंतर्गत का क्षेत्रफल ज्ञात करने में किया जा सकता है। परन्तु क्या समाकलन का प्रयोग केवल क्षेत्रफल ज्ञात करने में किया जाता है ? नहीं। आप इकाई 16 में यह देखेंगे कि समाकलन के प्रयोग से कुछ समतल वक्रों की लंबाइयां भी ज्ञात की जा सकती हैं। आपको यह भी पता चल जाएगा कि परिक्रमण घनाकृतियों के आयतन और पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात करने में निश्चित समाकल कितना उपयोगी होता है।

खंड 3 में हम समकलन की विभिन्न विधियों का उल्लेख कर चुके हैं। फिर भी, कुछ ऐसे फलन भी होते हैं जिनके प्रति अवकलजों को, चाहे कोई भी विधि हम क्यों न अपनाएं, किसी भी ज्ञात फलन के रूप में नहीं लिखा जा सकता। परन्तु इसके बावजूद भी हम संख्यात्मक समाकलन का प्रयोग करके इनमें से अनेक फलनों के निश्चित समाकलों के सन्निकट मान ज्ञात कर सकते हैं।

हम इकाई 15 में संख्यात्मक समाकलन की विधियों का अध्ययन करेंगे। यह विधि उस स्थिति में भी काफी उपयोगी सिद्ध होती है जबकि हमें किसी फलन के मान केवल कुछ विशेष बिन्दुओं पर ही ज्ञात हों, और हम उस फलन का निश्चित समाकल ज्ञात करना चाहते हों।

इस खंड के साथ ही फलन का यह पाठ्यक्रम समाप्त होता है। इस पाठ्यक्रम में हमने केवल एक चर वाले फलनों पर विचार किया है। यदि चाहें तो आप "उच्चस्तरीय फलन" (Advanced Calculus) नामक पाठ्यक्रम में अनेक चरों वाले फलनों के कलन का अध्ययन कर सकते हैं।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इकाई 14 अवकल गणित के अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

14.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
14.2 एकदिष्ट फलन
14.3 असमिकाएं
14.4 सन्निकट मान
14.5 सारांश
14.6 हल और उत्तर
14.7 शब्दावली

14.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम खंड 1 और 2 में अध्ययन की गई संकल्पनाओं के कुछ अनुप्रयोगों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे।

अवकल-गणित का अनुप्रयोग अनेक क्षेत्रों में होता है। इकाई 8 और इकाई 9 में आप अवकल-गणित के कुछ ज्यामितीय, भौतिक और व्यावहारिक अनुप्रयोगों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। इस इकाई में हम वास्तविक फलन-सिद्धांत (theory of real functions) के संबंध में अवकल-गणित के कुछ अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे।

गणित में कुछ ऐसे प्रश्न भी होते हैं जिन्हें हम अवकल-गणित का अध्ययन करने से पहले ही पूछ तो सकते हैं पर जिन्हें अवकलन संबंधी प्रमेयों को लागू करके सरलता से हल किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि जो प्रश्न अवकल-गणित की धारणा से संबंधित नहीं हैं उन्हें हल करने में भी अवकल-गणित एक उपयोगी साधन सिद्ध होता है। उदाहरण के लिए आप निम्नलिखित प्रश्न ले सकते हैं:

क) क्या $[0, \pi/4]$ में फलन $\sin x + \cos x$ वर्धमान है ?

ख) क्या सभी x के लिए असमिका $e^x > 1+x$ सही होती है ?

ग) $\frac{1-e^x}{\sin x}$ की सीमा क्या होती है जबकि x, 0 की ओर प्रवृत्त होता है ?

घ) $\cos 1°$ का सन्निकट मान क्या है ?

आपने नोट किया होगा कि ये सभी प्रश्न जिन संकल्पनाओं पर आधारित हैं उनका अध्ययन आप पहले ही कर चुके हैं। ये प्रश्न आप अवकल-गणित का अध्ययन करने से पहले भी कर सकते थे और शायद इनमें से कुछ के उत्तर भी आप पहले ही दे सकते थे। पर यहां हम यह देखेंगे कि किस प्रकार इन प्रश्नों के हल ज्ञात करने में इकाई 7 के प्रमेयों को व्यवस्थित ढंग से लागू किया जा सकता है। इस इकाई का अध्ययन करते समय आप अपने साथ खंड 2 भी रखें, क्योंकि उस खंड की इकाइयों से कुछ अंशों को पुनः पढ़ने की आवश्यकता आपको पड़ सकती है।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप:

- फलनों के कुछ गुणधर्मों (जैसे, एकदिष्टता और अवकलज की धनात्मकता अथवा ऋणात्मकता) की तुल्यता को पहचान सकेंगे,
- माध्य मान प्रमेयों की सहायता से कुछ असमिकाओं को सिद्ध कर सकेंगे,
- कुछ बिंदुओं पर फलनों के सन्निकट मान प्राप्त करने के लिए टेलर-श्रेणी को लागू कर सकेंगे।

14.2 एकदिष्ट फलन

इस भाग में हम अवकलन लागू करके यह देखेंगे कि दिया हुआ फलन एकदिष्ट है कि नहीं।

पहले हम इकाई 1 की कुछ परिभाषाओं को पुनः याद करेंगे। अंतराल I से **R** तक परिभाषित कोई फलन

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

एकदिष्ट तब होता है जबकि वह या तो I पर वर्धमान फलन (increasing function) हो, या I पर ह्रासमान फलन (decreasing function) हो ।

किसी फलन को I पर वर्धमान फलन तब कहा जाता है जबकि $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$. वर्धमान फलन को **क्रम परिरक्षी फलन** (order preserving function) भी माना जा सकता है ।

आइए हम यह भी याद करें कि

- प्रत्येक अचर फलन वर्धमान फलन होता है,
- तत्समक फलन वर्धमान फलन होता है,
- फलन $f(x) = 2x + 3$ एक वर्धमान फलन है,
- फलन $f(x) = \sin x$, **R** पर वर्धमान फलन नहीं है ।.क्योंकि $0 < \frac{3\pi}{2}$ होने पर भी $\sin 0 = 0 > -1 = \sin \frac{3\pi}{2}$

परंतु अंतराल $[0, \pi/2]$ में $\sin x$ एक वर्धमान फलन है ।

हम यह भी जानते हैं कि I से **R** तक परिभाषित फलन f को ह्रासमान फलन कहा जाता है जबकि $x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$. ह्रासमान फलन **क्रम-उत्क्रमी फलन** (order reversing function) होते हैं ।

ह्रासमान फलनों के कुछ उदाहरण हम यहां दे रहे हैं

- फलन $f(x) = 4 - 2x$ ह्रासमान है ।
- अंतराल $[\pi/2, \pi]$ में फलन $f(x) = \sin x$ ह्रासमान है ।

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि प्रत्येक अचर फलन वर्धमान भी है और ह्रासमान भी है ?

सावधानी : यह कहना सही नहीं है कि यदि कोई फलन वर्धमान नहीं है तो वह ह्रासमान अवश्य होगा । क्योंकि यह भी संभव है कि वह फलन न तो वर्धमान हो और न ही ह्रासमान । उदाहरण के लिए अंतराल $[0, \pi]$ में फलन $\sin x$ न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान । यह फलन अंतराल $[0, \pi/2]$ में वर्धमान है और अंतराल $[\pi/2, \pi]$ में ह्रासमान है । कुछ ऐसे भी फलन हैं जिनकी स्थिति और भी खराब है । ये फलन किसी भी अंतराल में एकदिष्ट नहीं होते । पर यहां हम जिन-जिन फलनों पर विचार करेंगे, उनमें से अधिकांश की स्थिति इतनी खराब नहीं है ।

सामान्यत : फलन के आलेख (graph) को देखकर ही कोई बता सकता है कि फलन वर्धमान है, ह्रासमान है या दोनों में से कोई भी नहीं है । बायीं ओर से दायीं ओर जाने पर वर्धमान फलन का आलेख कभी भी नीचे नहीं उतरता, जबकि बायीं ओर से दायी ओर जाने पर ह्रासमान फलन का आलेख कभी भी ऊपर नहीं चढ़ता । अब प्रश्न यह उठता है कि यदि फलन का आलेख हमें उपलब्ध न हो तो हम यह कैसे बता सकते हैं कि दिया हुआ फलन एकदिष्ट है कि नहीं? प्रमेय 1 से हमें इस संबंध में एक निकष (criterion) प्राप्त हो जाता है ।

प्रमेय 1 : मान लीजिए I एक विवृत अंतराल है । और मान लीजिए कि $f: I \to \mathbf{R}$ अवकलनीय है तब

क) f वर्धमान फलन होता है यदि और केवल यदि I के सभी x के लिए $f'(x) \ge 0$

ख) ह्रासमान फलन होता है यदि और केवल यदि I के सभी x के लिए $f'(x) \le 0$

उपपत्ति : क) मान लीजिए f वर्धमान है । I के किसी भी सदस्य x के लिए

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

क्योंकि f वर्धमान है, इसलिए यदि $h > 0$, तो $x + h > x$ और $f(x+h) \ge f(x)$.

इसलिए $f(x+h) - f(x) \ge 0$.

यदि $h < 0$, तो $x + h < x$ और $f(x+h) \le f(x)$.

इसलिए $f(x+h) - f(x) \le 0$.

इस तरह हम यह पाते हैं कि $f(x+h) - f(x)$ और h या तो दोनों ऋणेतर है या दोनों अधनात्मकेतर (non-positive). इसलिए h के सभी शून्येतर मानों के लिए $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ऋणेतर है । अतः

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ भी ऋणेतर होगा ।

इस तरह, $f'(x) \ge 0$.

विलोमतः मान लीजिए I के सभी x के लिए $f'(x) \ge 0$ और मान लीजिए I में $a < b$. अब हम यह सिद्ध करेंगे कि $f(a) \le f(b)$. माध्य मान प्रमेय (प्रमेय 3 इकाई 7) के अनुसार

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

एक c ∈] a, b [⊂ I ऐसा होता है, जिसके लिए $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

अब, क्योंकि $f'(a) \geq 0$, इसलिए $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$. साथ ही $b - a > 0$.

इससे यह पता चलता है कि $f(b) - f(a) \geq 0$ या $f(b) \geq f(a)$. इस तरह, $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

इसलिए f वर्धमान है ।

ख) इसे भी ठीक ऊपर दी गई विधि की तरह सिद्ध किया जा सकता है ।

एक प्रश्न के रूप में इसे हम आपके लिए छोड़ देते हैं (देखिए E 1)) ।

इसे फलन -f पर भाग (क) लागू करके भी निगमित किया जा सकता है ।

E E 1) प्रमेय 1 के भाग ख) को सिद्ध कीजिए ।

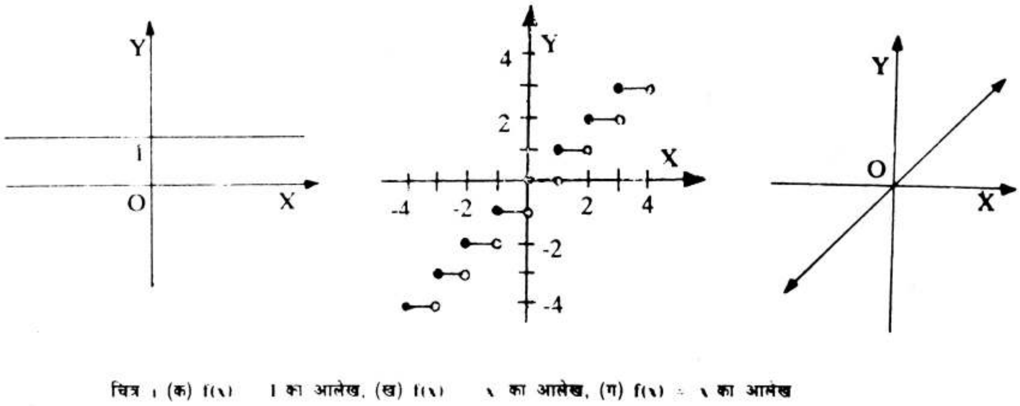
सभी वर्धमान फलनों मे से हम उन फलनों को अलग कर सकते हैं जो निरंतर वर्धमान (strictly increasing) हैं । नीचे दी गई परिभाषा से निरन्तर वर्धमान फलन का ठीक-ठीक अर्थ मालूम हो जाता है ।

परिभाषा 1 : $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ को निरन्तर वर्धमान कहा जाता है यदि $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

इसी प्रकार हम यह परिभाषा दे सकते हैं कि I पर परिभाषित फलन f निरन्तर ह्रासमान है यदि $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

उदाहरण के लिए, एक अचर फलन न तो निरन्तर वर्धमान है और न ही निरन्तर ह्रासमान । फलन $f(x) = [x]$ भी वर्धमान तो है पर निरन्तर वर्धमान नहीं है, जबकि फलन $f(x) = x$ निरन्तर वर्धमान है ।

चित्र 1 में इन तीन फलनों के आलेख दिए गए हैं । चित्र 1 (क) में आलेख क्षैतिज है । चित्र 1 (ख) के आलेख में भी कुछ ऐसे भाग हैं जो क्षैतिज हैं । परन्तु चित्र 1 (ग) के आलेख में कोई भी क्षैतिज भाग नहीं है और यह आलेख बायीं ओर से दायीं ओर जाने पर ऊपर की ओर चढ़ता चला जाता है ।



चित्र 1 (क) f(x) 1 का आलेख, (ख) f(x) x का आलेख, (ग) f(x) = x का आलेख

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

आइए अब हम यह देखें कि क्या किसी फलन के अवकलज से उस फलन की निरंतर एकदिष्टता के बारे में कुछ पता चलता है कि नहीं। इस संबंध में हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होता है।

प्रमेय 2: क) मान लीजिए अंतराल I पर f' धनात्मक है। तब I पर f निरंतर वर्धमान होता है।

ख) मान लीजिए I पर, f' ऋणात्मक है। तब I पर f निरंतर ह्रासमान होता है।

उपपत्तिः क) क्योंकि I पर $f' > 0$, इसलिए प्रमेय 1 के अनुसार I पर f वर्धमान होगा। अर्थात् $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. अब हमें केवल यह सिद्ध करना है कि यदि $x<y$, तो $f(x)$, $f(y)$ के बराबर नहीं हो सकता।

मान लीजिए, यदि संभव हो, $f(x) = f(y)$, जहां I में $x < y$. तब, अंतराल $[x, y]$ में फलन f पर रोल प्रमेय (प्रमेय 2, इकाई 7) लागू करने पर हमें किसी $x < c < y$ के लिए $f'(c) = 0$ प्राप्त होता है।

परंतु यह तथ्य हमारी इस कल्पना का, कि I पर f' निरंतर धनात्मक है, विरोध करता है। इसलिए I में किसी $x < y$ के लिए $f(x)$, $f(y)$ के बराबर नहीं हो सकता। इस तरह, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. अर्थात् f निरंतर वर्धमान है।

ख) इस भाग के लिए हम दो उपपत्तियां देंगे। एक विधि तो यह है कि भाग (क) की उपपत्ति में जहां-जहां प्रतीक '$<$' का प्रयोग हुआ हो, वहां-वहां '$>$' का प्रयोग किया जाए।

दूसरी विधि यह है कि हम $-f$ लेकर उस पर प्रमेय 2 (क) लागू करें और $(-f)' = -f'$ का प्रयोग करें। अतः f' ऋणात्मक होता है यदि और केवल यदि $(-f)'$ धनात्मक है। और f निरंतर ह्रासमान होता है यदि और केवल यदि $-f$ निरंतर वर्धमान हो। वर्धमान और ह्रासमान फलनों के परिणामों को संयोजित करने पर हमें निम्नलिखित उपप्रमेय प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 1: अंतराल I पर f निरंतर एकदिष्ट होता है यदि पूरे I में f' का एक ही चिह्न हो।

आपने इस बात की ओर ध्यान दिया होगा कि प्रमेय 1 और प्रमेय 2 के कथनों में अंतर है। हमने कहा था कि "f वर्धमान होता है यदि और केवल यदि f' ऋणेतर हो"। "यदि $f' > 0$, तो f निरंतर वर्धमान होता है।"

अब ये प्रश्न उठ सकते हैं कि :

क्या हम प्रमेय 2 में भी "यदि और केवल यदि" का प्रयोग कर सकते हैं ? अर्थात् यदि f निरंतर वर्धमान है तो क्या इससे यह पता चलता है कि $f' > 0$?

इन प्रश्नों के उत्तर "नहीं" में हैं, जैसा नीचे दिए गए उदाहरण 2 में दिखाया गया है। उससे पहले हमें उदाहरण 1 से यह पता चलता है कि एकदिष्टता को सिद्ध करने की अनेक विधियों में सबसे सरल विधि वह है, जिसमें अवकलन का प्रयोग किया जाता है (बशर्ते, फलन अवकलनीय हो)।

उदाहरण 1: मान लीजिए **R** में सभी x के लिए $f(x) = x^3$. हम यह सिद्ध करेंगे कि फलन f वर्धमान है।

पहली विधि : मान लीजिए $x < y$. तब हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि $x^3 \leq y^3$

इसके लिए दो स्थितियों पर विचार कीजिए।

स्थिति 1 : x और y समान चिह्न वाले हों। (या तो दोनों धनात्मक हों या दोनों ऋणात्मक)। इस स्थिति में $xy > 0$. अब, $y^3-x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2) \geq 0$. क्योंकि $y-x$ और y^2+yx+x^2 दोनों ही ऋणेतर हैं।

स्थिति 2: मान लीजिए x और y अलग-अलग चिह्न वाले हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि $x<0<y$. (ध्यान दीजिए कि x या y में से यदि कोई भी शून्य है, तो यह स्थिति 1 के अंतर्गत आ जाती है)। इसलिए $x^3 < 0 < y^3$. क्योंकि ऋण संख्या का घन ऋणात्मक होता है और धन संख्या का घन धनात्मक होता है।

इस तरह, दोनों स्थितियों में $x^3 \leq y^3$. वास्तव में हमें निरंतर असमिका $(x^3 < y^3)$ प्राप्त होती है जिससे यह पता चलता है कि $x \rightarrow x^3$ निरंतर वर्धमान फलन है।

दूसरी विधि : मान लीजिए $x < y$. हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि $x^3 \leq y^3$.
अब $y^3-x^3 = (y-x)(y^2+yx+x^2)$
यहां $y-x>0$ (क्योंकि $x<y$)

और, $y^2+yx+x^2 \geq 0$, क्योंकि

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

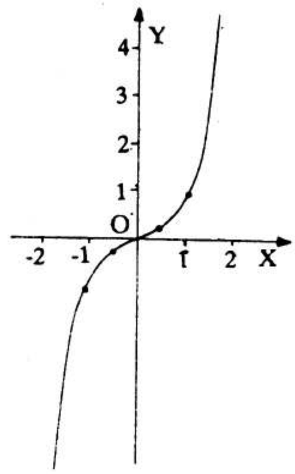
$$y^2+yx+x^2 = \frac{1}{2}\left[(y^2+x^2)+(y^2+2yx+x^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[y^2+x^2+(y+x)^2\right] \geq 0,$$

क्योंकि किसी भी संख्या का वर्ग ऋणेतर होता है।

इस तरह हम यह पाते हैं कि $y^3 - x^3$, दो ऋणेतर संख्याओं का गुणनफल है। अतः यह ऋणेतर है।

तीसरी विधि : (अवकलन लागू करके): मान लीजिए $f(x) = x^3$. तब $f'(x) = 3x^2$. यह सदा ही ऋणेतर होता है। अतः प्रमेय 1 को लागू करके हम यह कह सकते हैं कि f एक वर्धमान फलन है।



चित्र 2

उदाहरण 2: यहां हम निरंतर वर्धमान फलन का एक उदाहरण दे रहे हैं, जिसका अवकलज निरंतर धनात्मक नहीं है।

मान लीजिए $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित एक फलन है।
देखिए चित्र 2

यह फलन निरंतर वर्धमान है, क्योंकि

$$x<y \Rightarrow y-x>0 \text{ और } x^2+y^2>0$$
$$\Rightarrow y^3-x^3 = (y-x)(y^2+yx+x^2)$$
$$= \frac{1}{2}(y-x)\left[x^2+y^2+(x+y)^2\right] > 0$$
$$\Rightarrow x^3 < y^3.$$

इसका अवकलज निरंतर धनात्मक नहीं है क्योंकि $f'(0) = 0$.

अगले उदाहरण में हम दो विधियों से सिद्ध करेंगे कि दिया हुआ फलन एकदिष्ट नहीं है।

उदाहरण 3: यह सिद्ध करने के लिए कि अंतराल $[0, \pi/4]$, पर फलन $x \to \sin x + \cos 2x$ एकदिष्ट नहीं है, हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपना सकते है :

पहली विधि : मान लीजिए $f(x) = \sin x + \cos 2x$. हम $[0, \pi/4]$ के तीन बिंदु, 0, $\pi/6$ और $\pi/10$ लेंगे। तब

$$f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{5} = 0.309 + 0.809 > 1$$

इस तरह $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6}$ और $f(0) < f\left(\frac{\pi}{10}\right) > f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

इसलिए $[0, \pi/4]$ पर f न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान। अतः हम यह कह सकते हैं कि $[0, \pi/4]$ पर f एकदिष्ट नहीं है।

दूसरी विधि: (अवकलन का प्रयोग करके)

मान लीजिए $f(x) = \sin 2x + \cos x$.
तब $f'(x) = 2\cos 2x - \sin x$.
अब, $f'(0) = 2 \times 1 - 0 = 2$ और $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

इस तरह, हम यह पाते है कि 0 और $\pi/4$ पर f' के चिह्न अलग-अलग हैं इसलिए $[0, \pi/4]$ पर f एकदिष्ट नहीं है।

अगले उदाहरण से हमें यह पता चलता है कि जो फलन कुछ बिंदुओं पर अपरिभाषित हैं, उनका अध्ययन करते समय हमें सावधानी बरतनी चाहिए।

उदाहरण 4 : यदि फलन $x \to \tan x$ अंतराल I पर परिभाषित है तो हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि उस अंतराल पर यह फलन वर्धमान फलन है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अब अंतराल $[0,\pi]$ को लीजिए। क्या हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि tan x इस अंतराल पर वर्धमान है ? मान लीजिए हम निम्नलिखित तर्क करते हैं:

$f'(x) = \sec^2 x \geq 0 \; \forall \; x,$

क्योंकि किसी भी संख्या का वर्ग हमेशा ऋणात्मकेतर होता है।

अतः प्रमेय 1 के अनुसार फलन f, $[0,\pi]$ पर वर्धमान है।

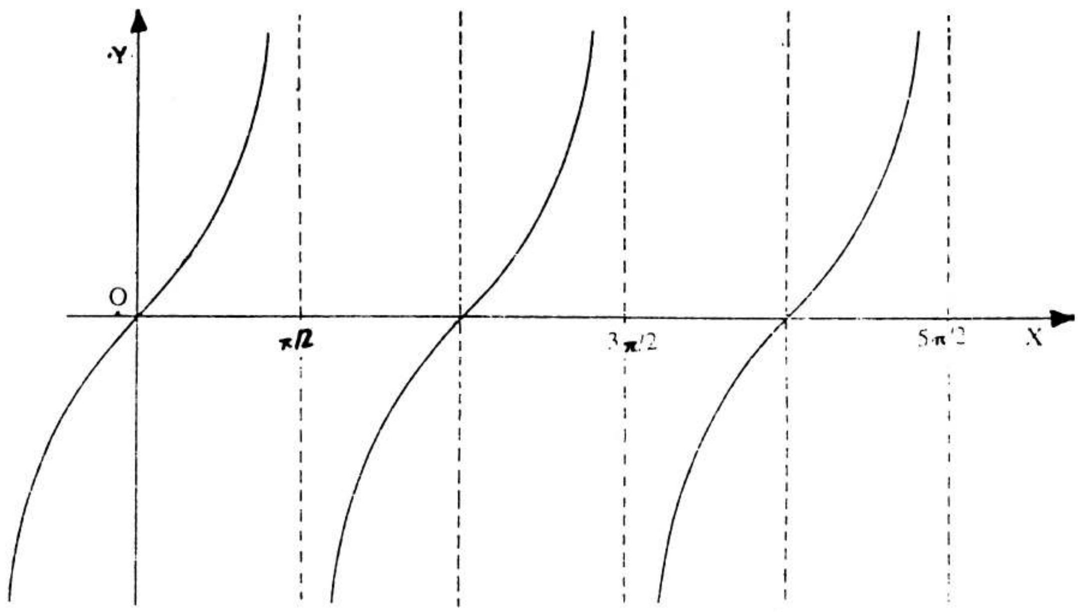
परंतु यदि हम $[0,\pi]$ में दो बिंदु, $\frac{\pi}{4}$ और $\frac{2\pi}{3}$ लें, तो

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, और $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$

अब $\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{3}$, परन्तु $\tan\frac{\pi}{4} \leq \tan\frac{2\pi}{3}$.

इससे हमें यह पता चलता है, कि tan x, $[0, \pi]$ पर वर्धमान नहीं है।

इसका मतलब है, कि हमारे तर्क में कहीं न कहीं त्रुटि रह गयी है। वास्तव में, अंतराल $[0, \pi]$ में एक बिंदु, $\pi/2$, ऐसा है, जहां tan x परिभाषित ही नहीं है। देखिये चित्र 3.



चित्र 3

ज़ाहिर है कि इस बिंदु पर tan x के अवकलज का भी अस्तित्व नहीं होगा। इस कारण हम प्रमेय 1 का प्रयोग नहीं कर सकते हैं।

अतः हमने यह सिद्ध किया है कि यह फलन एक अंतराल में वर्धमान फलन होता है, बशर्ते यह फलन पूरे अंतराल के लिए परिभाषित हो। इस फलन के परिभाषित होने पर ही हम इसे अवकलित कर सकते है और तभी अपने प्रमेयों को लागू कर सकते हैं।

अगले उदाहरण की पहली विधि में हम संतत फलन के एक अतिरिक्त गुणधर्म का प्रयोग करेंगे और दूसरी विधि में पुनरावृत्त अवकलन (repeated differentiation) का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 5 : आइए सिद्ध करें कि फलन $x \rightarrow \sin x + \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ पर वर्धमान है और $[\pi/4, \pi/2]$ पर ह्रासमान है।

पहली विधि : आपको याद होगा कि प्रथम चतुर्थांश में सभी x के लिए (अर्थात्, यदि $0 \leq x \leq \pi/2$), sin x, cos x और tan x ऋणेतर होते हैं।

मान लीजिए $\qquad f(x) = \sin x + \cos x.$

तब $\qquad f'(x) = \cos x - \sin x.$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

यहां पर हम पाते हैं कि $f'(0) = 1,$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

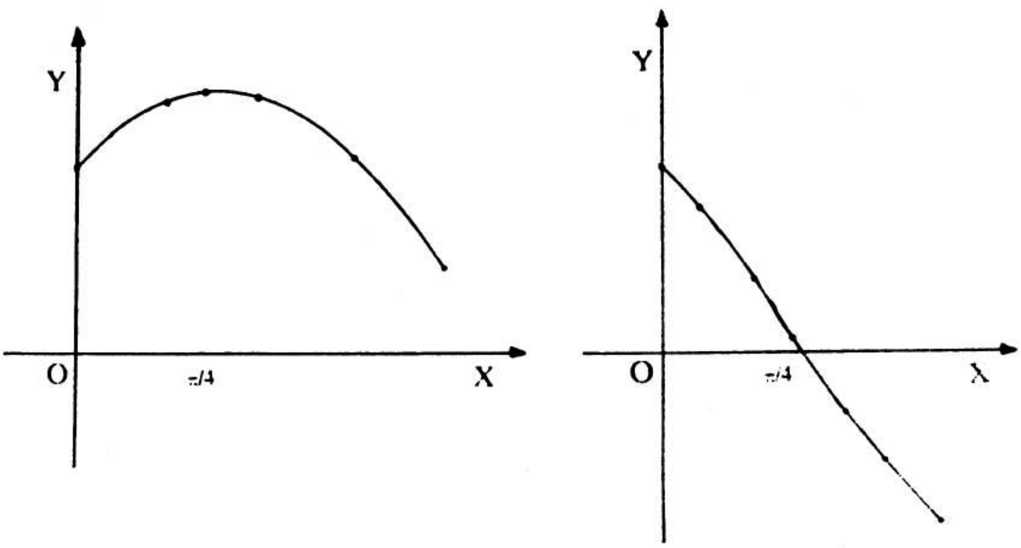
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

अंतराल $[0, \pi/2]$ में $x = \pi/4$ ही केवल ऐसा बिंदु है जिस पर $f'(x) = 0$,
क्योंकि $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1$. और उदाहरण 4 से हम यह जानते हैं कि $[0, \pi/2]$ में $\tan x$ निरंतर वर्धमान है । इसलिए $\pi/4$ के अतिरिक्त किसी अन्य बिंदु पर इसका मान 1 नहीं हो सकता ।

और, हम यह भी जानते हैं कि f' एक संतत फलन है क्योंकि साइन और कोसाइन फलन संतत हैं । अतः $[0, \pi/4]$ में f' के मान ऋणात्मक नहीं हो सकते ।

व्याख्या : यदि एक संतत फलन का 0 पर धनात्मक मान हो और किसी x पर ऋणात्मक मान हो तो 0 और x के बीच किसी बिंदु पर इसका मान शून्य अवश्य होगा । इस प्रश्न में यदि $x < \pi/4$, तो 0 और x के बीच संतत फलन f' का मान शून्य नहीं हो सकता । इसलिए किसी भी $x < \pi/4$ पर f' ऋणात्मक नहीं हो सकता । अब क्योंकि $[0, \pi/4]$ पर f' ऋणेतर है, इसलिए $[0, \pi/4]$ पर f वर्धमान फलन होगा । इसी प्रकार $[\pi/4, \pi/2]$ में f' के मान धनात्मक नहीं हो सकते क्योंकि $\pi/2$ पर इसका मान ऋणात्मक है । इससे यह पता चलता है कि $[\pi/4, \pi/2]$ पर f ह्रासमान है ।

दूसरी विधिः मान लीजिए $f(x) = \sin x + \cos x$
तब $f'(x) = \cos x - \sin x$.
यह सिद्ध करने के लिए कि $[0, \pi/4]$ पर f वर्धमान है, हमें यह सिद्ध करना होगा कि $[0, \pi/4]$ पर f' ऋणेतर है । यहां हम यह पाते हैं कि $f'(0) = 1$ और $f'(\pi/4) = 0$. अतः यह सिद्ध कर देना ही पर्याप्त होगा कि $[0, \pi/4]$ पर f' ह्रासमान है । (क्योंकि तभी इस अंतराल में f' के सभी मान 0 और 1 के बीच होंगे) इसके लिए हम $f''(x) = -\sin x - \cos x$ लेते हैं । देखिए चित्र 4 (क) और (ख) ।



चित्र 4 : (क) $f(x) = \sin x + \cos x$ का रेखाचित्र (ख) $f(x) = \cos x - \sin x$ का रेखाचित्र

यहां हम यह पाते है कि प्रथम चतुर्थांश में सभी x के लिए और विशेष रूप से $[0, \pi/4]$ के सभी x के लिए $f''(x) \leq 0$. इसलिए $[0, \pi/4]$ पर f' ह्रासमान है । अतः (क्योंकि $f'(0) = 1$ और $f'(\pi/4) = 0$) $[0, \pi/4]$ पर f' ऋणेतर है । इसलिए $[0, \pi/4]$ पर f वर्धमान है ।

अब, हम यह सिद्ध करेंगे कि $[\pi/4, \pi/2]$ पर f' धनात्मकेतर है । यहां पहले हम यह देखते है कि $f'(\pi/4) = 0$ और $f'(\pi/2) = -1$. और क्योंकि $[\pi/4, \pi/2]$ पर $f''(x) \leq 0$, इसलिए $[\pi/4, \pi/2]$ पर f' ह्रासमान है । और क्योंकि इस अंतराल पर f' के सभी मान 0 और −1 के बीच होंगे, इसलिए यह धनात्मक नहीं हो सकता । अतः $[\pi/4, \pi/2]$ पर f ह्रासमान है ।

यदि इन उदाहरणों में दी गई व्याख्याओं को आपने अच्छी तरह से समझ लिया है तो नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने में आपको कोई कठिनाई नहीं होनी चाहिए ।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 2) सभी x के लिए $e^x \geq 0$ यह मानकर सिद्ध कीजिए कि **R** पर यह एक वर्धमान फलन है ।

E 3) सिद्ध कीजिए कि $]0,\infty[$ पर $\ln x$ एक वर्धमान फलन है ।

E 4) यह मानकर कि प्रथम चतुर्थांश में $\sin x$ और $\cos x$ के मान कभी भी ऋणात्मक नहीं होते, अवकलन लागू करके यह सिद्ध कीजिए कि $[0, \pi/2]$ पर $\sin x$ एक वर्धमान फलन है और $\cos x$ एक ह्रासमान फलन है ।

E 5) बताइए कि निम्नलिखित फलनों में से कौन-कौन से फलन उनके साथ दिए हुए अंतरालों पर वर्धमान फलन है और कौन-कौन से ह्रासमान फलन है ।

क) $[0, 2]$ पर x^2-1

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

ख) $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ पर $2x^2 + 3x$

ग) $[0, 1]$ पर e^{-x}

घ) $[-2, -1]$ पर $x(x-1)(x+1)$

ङ) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर $x \sin x$

च) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ पर $\tan x + \cot x$

E 6) सिद्ध कीजिए कि दिए हुए अंतरालों पर निम्नलिखित फलन एकदिष्ट नहीं है।

क) $[-1, 0]$ पर $2x^2 + 3x - 5$

ख) $[0, 2]$ पर $x(x-1)(x+1)$

ग) $[0, \pi]$ पर $x \sin x$

घ) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर $\tan x + \cot x$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E 7) एक ऐसे त्रिघात बहुपद (cubic polynomial) का उदाहरण दीजिए जो $]-\infty, 2]$ पर ह्रासमान हो, $[2, 3]$ पर वर्धमान हो और फिर $[3, \infty[$ पर ह्रासमान हो।

(**संकेत :** $x = 2$ से गुज़रते समय और फिर $x = 3$ से गुज़रते समय अवकलज के चिह्न में परिवर्तन होना चाहिए।)

14.3 असमिकाएं

अवकल-गणित का एक अन्य अनुप्रयोग कुछ असमिकाओं को सिद्ध करना है। नीचे दिए गए तीन उदाहरणों में हम यह दिखाएंगे कि किस प्रकार कुछ असमिकाओं को इकाई 6 के टेलर-श्रेणी से; और इकाई 7 के माध्य मान प्रमेय (प्रमेय 3) से तथा भाग 2 में सिद्ध किए गए प्रमेयों से निगमित किया जा सकता है।

उदाहरण 6: हम यह सिद्ध करना चाहते है कि **R** में सभी x के लिए $e^x \geq 1 + x$.
मान लीजिए $f(x) = e^x - x$. तब $f'(x) = e^x - 1$, $f''(x) = e^x$.
हम जानते है कि सभी x के लिए $e^x > 0$.
अतः $f'(x)$ निरंतर वर्धमान फलन है,
और $f'(0) = 0$.
इसलिए ऐसा अन्य कोई बिंदु नहीं होता जिस पर f' का मान शून्य होता हो।
और $f'(x) > 0$ यदि $x > 0$
तथा $f'(x) < 0$ यदि $x < 0$.
इसलिए $]0, \infty[$ पर f निरंतर वर्धमान है।
अतः $x > 0$ से यह पता चलता है कि $f(x) > f(0)$.
इससे यह अर्थ निकलता है कि $e^x - x > e^0 - 0 = 1$
इससे यह सिद्ध हो जाता है कि यदि $x > 0$, तो $e^x > 1 + x$.

अब हमें इसे x के ऋणात्मक मानों के लिए भी सिद्ध करना है। इसके लिए मान लीजिए $g(x) = e^x - xe^x$.
तब $g'(x) = e^x - (xe^x + e^x) = -xe^x < 0$ जब कभी $x > 0$.

$\Rightarrow$ $]0, \infty[$ पर g निरंतर ह्रासमान है।
$\Rightarrow$ $g(x) < g(0)$, जब कभी $x > 0$.
$\Rightarrow$ $e^x - xe^x < e^0 - 0.e^0 = 1$ सभी $x > 0$ के लिए।

दूसरे शब्दों में, सभी $x > 0$ के लिए $e^x < \dfrac{1}{1-x}$

$y = -x$ रखने पर हमें सभी $y < 0$ के लिए

$e^{-y} < \dfrac{1}{1+y}$, या $e^y > 1 + y$ प्राप्त होता है।

दूसरे शब्दों में, सभी $x < 0$ के लिए $e^x > 1 + x$.
जब $x = 0$, तब $e^x = 1 = 1 + x$.
इस तरह हम यह पाते है कि x के सभी मानों के लिए असमिका $e^x \geq 1 + x$ सही होती है।

अगले उदाहरण में दी गई असमिका इससे भी बेहतर है

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

उदाहरण 7: हम सिद्ध करना चाहते हैं कि सभी $x > 0$ के लिए

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

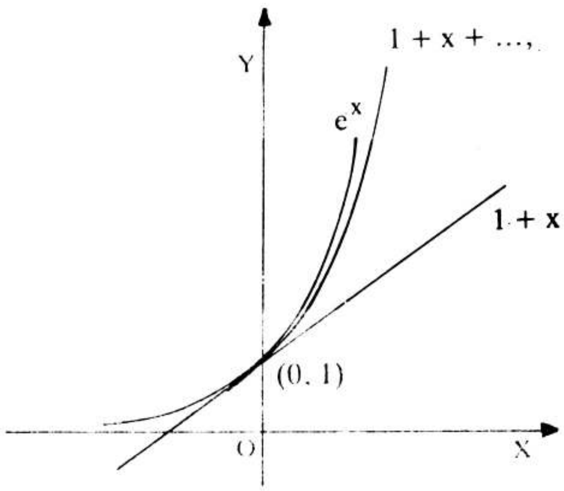
इकाई 6 में हम यह देख चुके हैं कि सभी x के लिए टेलर-श्रेणी प्रसार

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots\ldots\ldots \text{ सही होता है।}$$

इससे $x > 0$ पर असमिका

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \text{ सिद्ध हो जाती है।}$$

चित्र 5 में उदाहरण 6 और 7 के परिणाम दिखाए गए हैं:



चित्र 5

उदाहरण 8: जब कभी $0 < a < b$ और $n > 1$, तो यह सिद्ध करने के लिए कि
$b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$, हम अंतराल $[a, b]$ पर फलन
$f : x \to x^n$ लेते हैं। इस अंतराल पर यह फलन सतत है। यह फलन $]a, b[$ में अवकलनीय भी है।
अतः माध्य मान प्रमेय के अनुसार एक ऐसा c, $a < c < b$ अवश्य होता है,

जिसके लिए $\quad n\,c^{n-1} = f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

वज्र-गुणन (cross multiplication) करने पर हमें

$b^n - a^n = nc^{n-1}(b-a)$ प्राप्त होता है।

अतः यह सिद्ध कर देना ही पर्याप्त होता है कि

$c^{n-1} < b^{n-1}$.

यह सही है क्योंकि $0 < c < b$, और $n > 1$.

क्या अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर सकते हैं?

E E 8) कोष्ठकों में दी गई विधियों को लागू करके निम्नलिखित असमिकाओं को सिद्ध कीजिए।

क) सभी धनात्मक x के लिए $\ln(1 + x) < x$.
(पहले सिद्ध कीजिए कि $x - \ln(1 + x)$ वर्धमान है।)

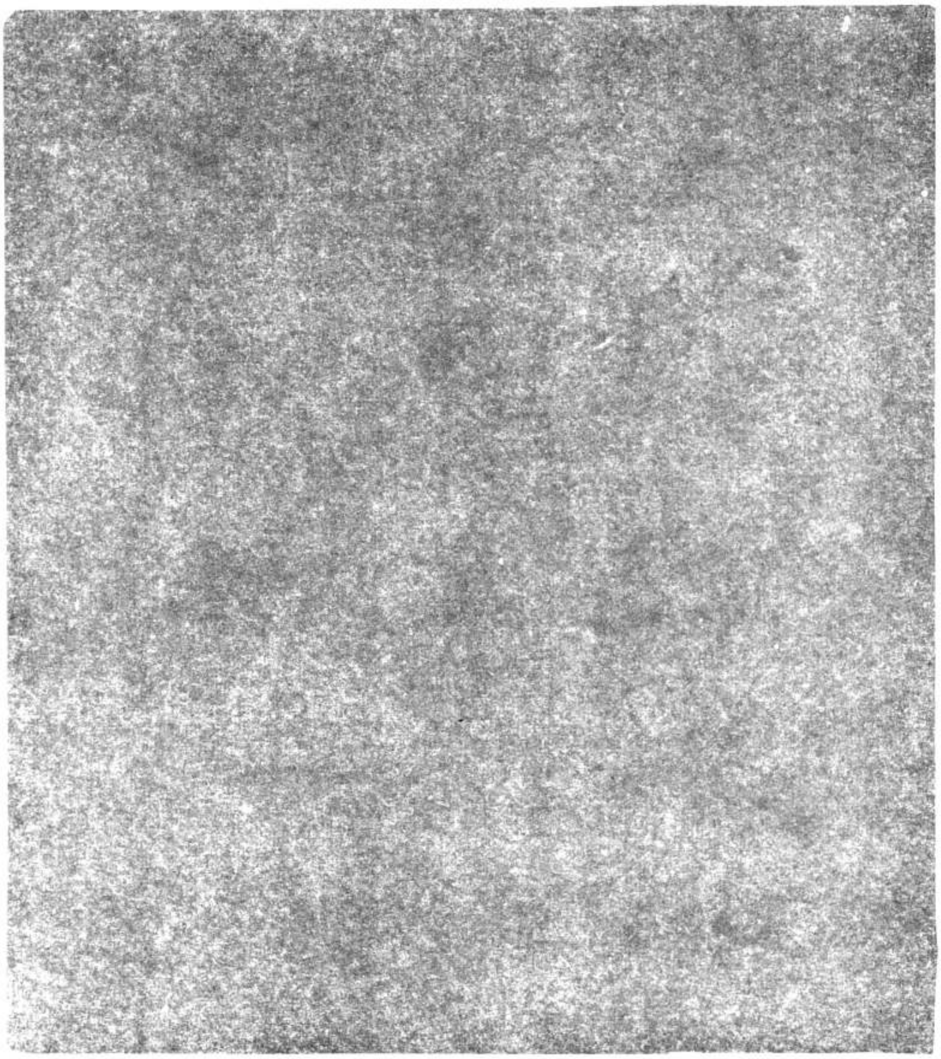
ख) सभी धनात्मक x के लिए $\tan^{-1} x < x$.
($\tan^{-1}x$ के लिए $[0,x]$ पर माध्य मान प्रमेय को लागू करके)

ग) $e^x + e^{-x} > 2 \; \forall \; x$ ($e^x + e^{-x} - 2$ को एक परिपूर्ण वर्ग के रूप में लिखकर)

घ) $e^x + e^{-x} > 2 \; \forall \; x$ (पहले सिद्ध किए जा चुके परिणाम $e^x \geq 1 + x$ का प्रयोग करके)

ङ) $e^x - e^{-x} \geq 2x \; \forall \; x > 0$. (घ) की असमिका और अवकलन का प्रयोग करके)

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



14.4 सन्निकट मान

पिछले दो भागों में हम यह अध्ययन कर चुके हैं कि किस प्रकार एक दिए हुए अवकलनीय फलन की एकदिष्टता सिद्ध करने के लिए अवकलज की संकल्पना का प्रयोग किया जाता है और किस प्रकार इस तथ्य का प्रयोग कुछ असमिकाओं को सिद्ध करने में किया जा सकता है।

इस भाग में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार कुछ फलनों के कुछ बिंदुओं पर सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए टेलर-श्रेणी का प्रयोग किया जा सकता है। हम सन्निकटतः बराबर के लिए प्रतीक $\simeq$ का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 9: sin x की मैक्लॉरिन श्रेणी में प्रथम दो शून्येतर पद लेकर हम यह सिद्ध करेंगे कि $\sin 20^0$, 0.342 के सन्निकटतः बराबर है (प्रतीकों में $\sin 20° \simeq 0.342$).

आपको याद होगा कि सूत्र $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{5!} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

में कोण x सदा रेडियन में होता है। यही बात cos x, tan x आदि पर भी लागू होता है।

अब, क्योंकि $20° = \pi/9$ रेडियन, इसलिए $\sin \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{(\pi/9)^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\simeq \frac{\pi}{9} - \frac{(\pi/9)^3}{6}$$

$\pi = 3.142$ लेने पर हमें इस राशि का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है।

$$\frac{3.142}{9} - \frac{0.0425}{6} = 0.349 - 0.007 = 0.342.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

साइन की सारणी देखने पर आप पाएंगे कि $\sin 20° = 0.342$. इससे यह पता चलता है कि वास्तव में हमारा सन्निकटन एक उत्तम सन्निकटन है। वस्तुतः इन विधियों को लागू करके ही सारणियां तैयार की जाती है।

उदाहरण 10: आइए अब हम $(1-x)^{5/2}$ की मैक्लॉरिन-श्रेणी के प्रथम तीन पदों को लेकर $(0.99)^{5/2}$ का सन्निकट मान ज्ञात करें।

$(1-x)^{5/2}$ की मैक्लॉरिन श्रेणी यह है $\quad 1-\frac{5}{2}x+\frac{(5/2)(3/2)}{2}x^2+\ldots\ldots\ldots$

हम $(0.99)^{5/2}$ को $(1-0.01)^{5/2}$ के रूप में लिख सकते है। इसलिए मैक्लॉरिन श्रेणी के प्रथम तीन पदों में $x = 0.01$ लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$(1-0.01)^{5/2} \simeq 1-\frac{5}{2}\left(0.01\right)+\frac{15}{8}\left(0.0001\right)$$

अर्थात् $\quad (0.99)^{5/2} \simeq 0.975$

यथार्थ मान और सन्निकट मान के अंतर को त्रुटि कहते है।

उदाहरण 11: हम जानते है कि $\cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ यदि cos x का सन्निकट मान उसकी मैक्लॉरिन श्रेणी के प्रथम दो शून्येतर पदों को लेकर प्राप्त किया जाए तो आइए हम दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध त्रुटि ज्ञात करें।

cos x की मैक्लॉरिन श्रेणी निम्नलिखित है :

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

यदि हम केवल प्रथम दो पद लें और $x = \pi/6$ लें, तो

$$\cos\frac{\pi}{6} \simeq 1-\frac{(\pi/6)^2}{2} \simeq 1-2\left(\frac{3.142}{6}\right)^2 = 1-\frac{0.274}{2} = 0.863$$

वास्तविक मान $\cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है। हम जानते है कि तीन दशमलव स्थानों तक शुद्ध $\frac{\sqrt{3}}{2}$ का मान 0.866 होता है।

हमने तीन दशमलव स्थानों तक शुद्ध $\quad 1-\frac{(\pi/6)^2}{2} = 0.863$ प्राप्त किया है

इसलिए त्रुटि $= 0.866-0.863 = 0.003$

यदि इसे दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध माना जाए तो त्रुटि 0.00 होगी। (इससे यह अर्थ निकलता है कि त्रुटि इतनी नगण्य होती है कि दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध लेने पर कोई त्रुटि नहीं होती।)

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों के सन्निकट मान ज्ञात करने का प्रयास कर सकते है।

E E 9) sin x की मैक्लॉरिन श्रेणी के प्रथम दो शून्येतर पद लेकर $\sin 31°$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E 10) यदि $\cos x$ की मैक्लॉरिन श्रेणी के प्रथम तीन शून्येतर पदों का प्रयोग $\cos \pi/2$ का सन्निकट मान ज्ञात करने में किया गया हो, तो दिखाइए कि त्रुटि 1/50 से कम होती है।

E E 11) एक दशमलव स्थान तक शुद्ध $\cos 59°$ का मान ज्ञात कीजिए।

E E 12) दो दशमलव स्थानों तक 1.01 का मान ज्ञात कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अब हम यहीं अपनी इकाई समाप्त कर रहे हैं। इस इकाई में जो कुछ भी अध्ययन किया गया है, आइए अब हम उसका एक संक्षिप्त विवरण यहां दे दें।

14.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित परिणामों का अध्ययन किया है।

1)

यदि f यह है	तो f′ यह होता है
वर्धमान	ऋणेतर
ह्रासमान	धनात्मकेतर
अचर	अभिन्नतः शून्य
एकदिष्ट	अंतराल के हर बिंदु पर समान चिह्न वाला

2)

यदि f′ यह है	तो f यह होता है
ऋणेतर	वर्धमान
धनात्मकेतर	ह्रासमान
(निरंतर) धनात्मक	निरंतर वर्धमान
(निरंतर) ऋणात्मक	निरंतर ह्रासमान
अभिन्नतः शून्य	अचर
हर जगह समान चिह्न वाला	एकदिष्ट

3) अवकलन का अनुप्रयोग

i) फलन की एकदिष्टता की जांच करने के लिए,

ii) कुछ असमिकाओं को सिद्ध करने के लिए,

iii) कुछ सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है।

14.6 हल और उत्तर

E 1) मान लीजिए f एक ह्रासमान फलन है। यदि $x \in I$, तो $f'(x)$ का अस्तित्व है और

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$h>0 \Rightarrow f(x+h) \le f(x) \Rightarrow (x+h)-f(x) \le 0.$$
$$h<0 \Rightarrow f(x+h) \ge f(x) \Rightarrow f(x+h)-f(x) \ge 0.$$

इसलिए $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le 0 \ \forall \ h \ne 0$

अतः $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le 0.$

अब मान लीजिए $f'(x) \le 0 \ \forall \ x \in I$. और $a, b \in I$ तथा $a<b$.
तब $\exists$ c जिसके लिए

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \le 0.$$

$b-a>0 \Rightarrow f(b)-f(a) \le 0$ or $f(b) \le f(a)$
$\Rightarrow$ f एक ह्रासमान फलन है।

E 2) यदि $f(x) = e^x$, तो $f'(x) = e^x \ge 0 \ \forall \ x \in \mathbf{R}$.
$\Rightarrow x \to e^x$ एक वर्धमान फलन है। (प्रमेय 1 से)

E 3) यदि $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$. Now $1/x > 0 \ \forall \ x \in \,]0, \infty[$
$\therefore \ ]0, \infty[$ पर $\ln x$ एक वर्धमान फलन है।

E 4) यदि $f(x) = \sin x$, तो $f'(x) = \cos x$.
$\cos x \ge 0 \ \forall \ x \in [0, \pi/2]$.
$\therefore \ [0, \pi/2]$ पर $\sin x$ एक वर्धमान फलन है। इसी प्रकार $\cos x$ की स्थिति है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 5) a) $[0, 2]$ पर $f'(x) = 2x \geq 0$: $[0, 2]$ पर f वर्धमान है ।

b) $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ पर $f'(x) = 4x + 3 \geq 0$: $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ पर f वर्धमान है ।

c) $[0. 1]$ पर $f'(x) = -e^{-x} \leq 0 \Rightarrow [0, 1]$ पर f वर्धमान है ।

d) वर्धमान

e) वर्धमान

f) $f'(x) = \sec^2 x - \text{cosec}^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \leq 0$ क्योंकि $\cos^2 x \geq 0$

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ $\therefore$ f ह्रासमान है ।

E 6) a) $f'(x) = 4x + 3$

$f'(x) \leq 0$ यदि $x \in \left[-1, \frac{-3}{4}\right]$ और $f'(x) \geq 0$ यदि $x \in \left[\frac{-3}{4}, 0\right]$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 1$. $f'(x) \leq 0$ यदि $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

और $f'(x) \geq 0$ यदि $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 2\right]$.

c) $f'(x) = \sin x + x\cos x \begin{cases} \geq 0, x \in [0, \pi/2] \text{ के लिए} \\ \leq 0, x \in [3\pi/4, \pi] \text{ के लिए} \end{cases}$

d) समान तर्क

E 7) मान लीजिए $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$x = 2$ और $x = 3$, f के चरम बिंदु है ।

$f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$

और $f'(3) = 0 \Rightarrow 27a + 6b + c = 0$

$\therefore 15a + 2b = 0$

या $b = \frac{-15a}{2}$. $\therefore c = 18a$.

मान लीजिए $a = -2$ और $d = 0$. तब

$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x$ दिये हुए प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है ।

E 8) a) $f(x) = x - \ln(1 + x)$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \geq 0$ for all $x > 0$.

$\therefore$ $]0, \infty[$ पर $x - \ln(1 + x)$ वर्धमान है

$\Rightarrow$ सभी $x \in]0, \infty[$ के लिए $\ln(1 + x) < x$.

b) $f(x) = \tan^{-1} x$

मान लीजिए $x > 0$. माध्य मान प्रमेय से $\exists y \in]0, x[$ [illegible]

$$\frac{\tan^{-1} x - \tan^{-1} 0}{x - 0} = f'(y)$$

या $\dfrac{\tan^{-1} x}{x} = \dfrac{1}{1 + y^2} < 1$ यदि $y \in]0, x[$.

$\therefore \tan^{-1} x < x \; \forall x > 0$.

c) $e^x + e^{-x} - 2 = \left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right)^2 > 0 \; \forall x$.

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

d) $e^x \geq 1+x$ और $e^{-x} = e^y \geq 1+y = 1-x$ (यदि $y=-x$).

$\therefore e^x + e^{-x} \geq 1+x + 1-x = 2.$

e) मान लीजिए $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$. तब $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$.

$\Rightarrow$ f एक वर्धमान फलन है ।

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) \; \forall \; x > 0.$

$\Rightarrow e^x - e^{-x} - 2x \geq 0 \; \forall \; x > 0.$

$\Rightarrow e^x - e^{-x} \geq 2x \; \forall \; x > 0.$

E 9) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$31° = \frac{31\pi}{180}$ रेडिअन ।

$$\therefore \sin \frac{31\pi}{180} \simeq \frac{31\pi}{180} - \left(\frac{31\pi}{180}\right)^3 \frac{1}{3!}$$

$$= \frac{31 \times 3.142}{180} - \left(\frac{31 \times 3.142}{180}\right)^3 \frac{1}{6}$$

$$= .5411 - \left(.5411\right)^3 \frac{1}{6}$$

$$= .5411 - .0264$$

$$= .5147.$$

E10) यदि $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$,

$f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$.

$$f(x) = \cos x \simeq f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0).$$

$$\cos \frac{\pi}{2} \simeq \cos 0 + \frac{\pi}{2} \times 0 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2!} \times 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \times \frac{1}{3!} \times 0 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \times \frac{1}{4!} \times 1$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^4}{16 \times 24}$$

$$\simeq 1 - \frac{(3.142)^2}{8} + \frac{(3.142)^4}{16 \times 24}$$

$$\simeq 1 - 1.234 + 0.235$$

$$= 0.001.$$

हम जानते हैं कि $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$\therefore$ त्रुटि $= 0.001 < \frac{1}{50}$.

E11) $\cos \frac{59\pi}{180} \simeq 1 - \left(\frac{59\pi}{180}\right)^2 \frac{1}{2!} \times 1$

$$\simeq 1 - \left(\frac{3.142 \times 59}{180}\right)^2 \frac{1}{2!}$$

$$\simeq 1 - 0.530$$

$$\simeq 0.470$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E12) $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \ldots\ldots\ldots$

$$(1.01)^{1/2} + (1+0.01)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\left(0.01\right) + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}(0.01)^2$$

$$= 1 + 0.005 - 0.00001$$

$$\simeq 1.00$$

14.7 शब्दावली

असमिका	inequality
एकदिष्टता	monotonicity
क्रम उत्क्रमी फलन	order reversing function
क्रम परिरक्षी फलन	order preserving function
निकष	criterion
निरंतर वर्धमान फलन	strictly increasing function
निरंतर ह्रासमान फलन	strictly decreasing function
सन्निकटन	approximation

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इकाई 15 वक्र से परिबद्ध क्षेत्रफल

इकाई की रूपरेखा

15.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
15.2 वक्र के अंदर का क्षेत्रफल
15.2.1 कार्तीय समीकरण
15.2.2 ध्रुवी समीकरण
15.2.3 संवृत वक्र द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल
15.3 संख्यात्मक समाकलन
15.3.1 संख्यात्मक समाकलन
15.3.2 सिम्सन-नियम
15.4 सारांश
15.5 हल और उत्तर
15.6 शब्दावली

15.1 प्रस्तावना

समाकलन के अध्ययन के प्रारंभ में ही हमने यह बताया था कि समाकलन विधि का उद्गम समतल वक्रों द्वारा परिबद्ध प्रदेशों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के दौरान हुआ था । इस इकाई में हम दिए हुए वक्र के अंदर का क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे जबकि वक्र का समीकरण कार्तीय, ध्रुवी अथवा प्राचलिक रूप में दिया हुआ हो । क्षेत्रफल ज्ञात करने की इस प्रक्रिया को क्षेत्रकलन (quadrature) कहा जाता है । यहां हम संख्यात्मक समाकलन की दो विधियों का भी अध्ययन करेंगे । ये विधियां तब अधिक सहायक होती है जबकि समाकल्य (integrand) के प्रति-अवकलज (antiderivative) को ज्ञात फलनों द्वारा व्यक्त न किया जा सकता हो और इस कारण दिए हुए निश्चित समाकल का ठीक-ठीक मान ज्ञात न किया जा सकता हो ।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप:

- दिए हुए वक्र, जिसका समीकरण कार्तीय, ध्रुवी अथवा प्राचलिक रूप में दिया हुआ है, के अंदर का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए समाकलन संबंधी अपने ज्ञान का उपयोग कर सकेंगे,
- कुछ व्यावहारिक प्रश्नों को हल करने में संख्यात्मक समाकलन की भूमिका को समझ सकेंगे,
- कुछ निश्चित समाकलों के सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए समलंबी नियम और सिम्सन-नियम का प्रयोग कर सकेंगे,
- संख्यात्मक समाकलन के दो नियमों की तुलना कर सकेंगे ।

15.2 वक्र के अंदर का क्षेत्रफल

इस भाग में हम वक्र के अंदर का क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे जबकि वक्र का समीकरण

i) कार्तीय रूप
ii) ध्रुवी रूप
iii) प्राचलिक रूप
में दिया हुआ हो ।

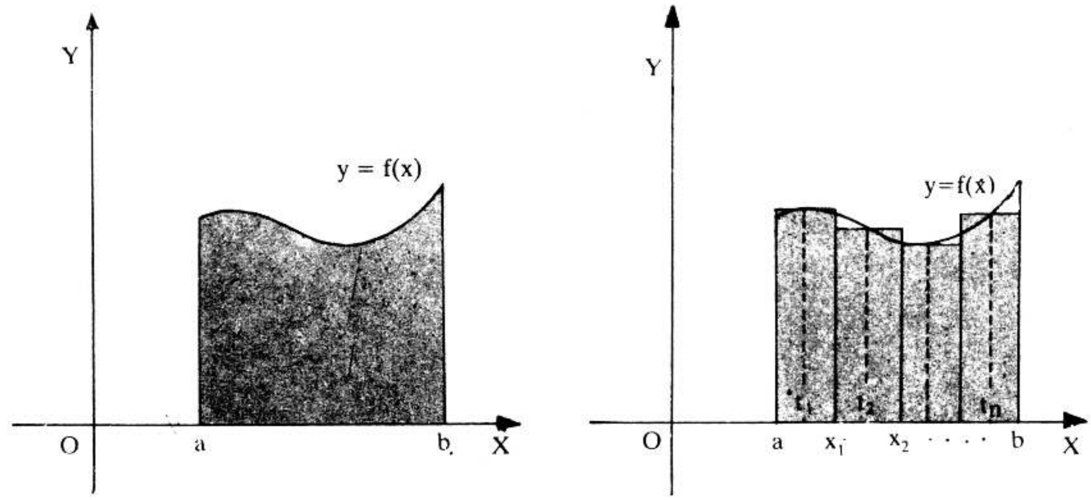
कुछ वक्र ऐसे भी हैं जिनके समीकरण ऊपर दिए गए किसी एक रूप में तो सरल हैं पर अन्य रूपों में जटिल है । इसलिए एक बार इन तीन रूपों पर विचार कर लेने के बाद हम दिए हुए वक्र के लिए उपयुक्त रूप का

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

चुनाव कर सकते है और तब उसका समाकलन कर सकते है । आइए अब हम इन रूपों के समीकरणों पर एक-एक करके विचार करें ।

15.2.1 कार्तीय समीकरण

इकाई 10 के भाग 2 में हमने जो कुछ अध्ययन किया है – आइए उसे हम जल्दी से दोहरा लें । मान लीजिए $y = f(x)$ संवृत अंतराल $[a, b]$ पर x का एक संतत फलन परिभाषित करता है । सरलता के लिए यहां हम यह मान लेते हैं कि $x \in [a, b]$ के लिए $f(x)$ धनात्मक है । मान लीजिए **R**, चार समीकरणों $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ के आलेखों से परिबद्ध समतल प्रदेश है, जिसे चित्र 1 (क) में दिखाया गया है ।



(क) (ख)

चित्र 1

हम प्रदेश **R** को x-अक्ष की उन लांबिक रेखाओं से n पतली-पतली पट्टियों में विभाजित कर देते हैं जो अंत्य बिन्दुओं $x = a$ तथा $x = b$ से और $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}$ जैसे अनेक मध्यवर्ती बिन्दुओं से होकर जाती है । जैसा कि आप इकाई 10 के भाग 2 में देख चुके हैं, अंतराल $[a, b]$ के $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ बिंदुओं के द्वारा हम $[a, b]$ का एक विभाजन (partition) P_n परिभाषित कर सकते हैं और इसे निम्न रूप से लिखकर प्रकट करते हैं ।

$$P_n = \left\{ a = x_0 < x_1, < x_2 < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b \right\}$$

हम $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ के लिए

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ लिखते हैं और n बिन्दुओं का निम्नलिखित समुच्चय लेते हैं :

$$T_n = \{t_1, t_2, \ldots\ldots, t_{n-1}, t_n\}$$

जहां $i = 1, 2, \ldots, n$ के लिए $x_{i-1} \le t_i \le x_i$.

अब हम n आयत (चित्र 1 (ख) बनाते हैं जिनके आधार विभाजन P_n से प्राप्त n उप-अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots\ldots n$ होते हैं और जिनकी ऊँचाइयां $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_i), \ldots, f(t_n)$ होती हैं । इन n आयतों के क्षेत्रफलों का योग

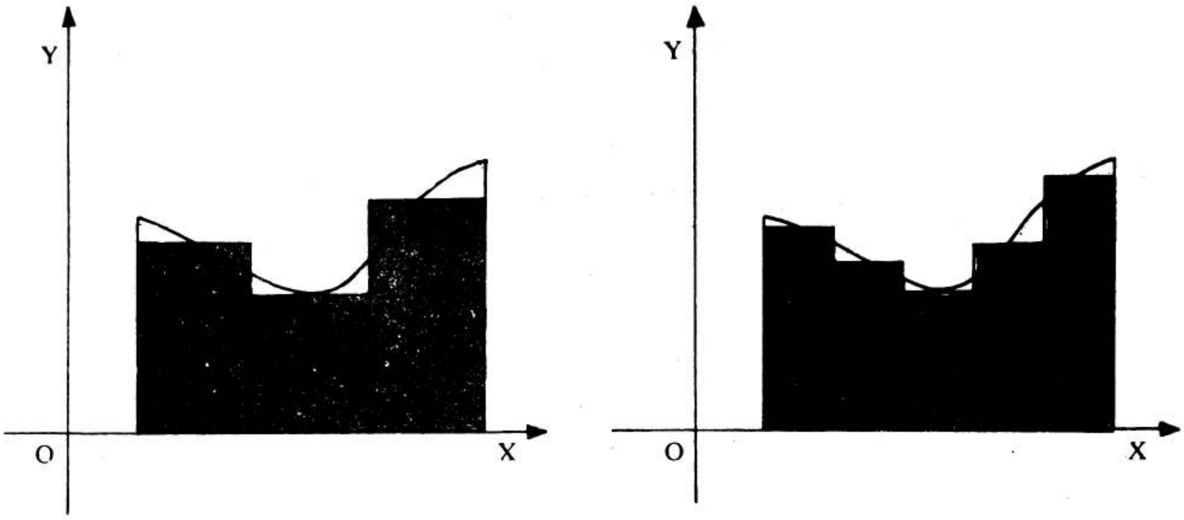
$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta x_i$$

"**R** के क्षेत्रफल" का एक सन्निकट मान होगा ।

इस बात पर ध्यान दीजिए (चित्र 2(क) और (ख)) कि यदि हम उप-अंतरालों की संख्या बढा दें और प्रत्येक उप-अंतराल की लंबाई कम कर दें तो हमें "R के क्षेत्रफल" का अधिक उत्तम सन्निकट मान प्राप्त होगा । इस तरह, हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है ।

परिभाषा 1: मान लीजिए f एक वास्तविक मान फलन है जो $[a, b]$ पर संतत है और मान लीजिए $f(x) \ge 0 \;\forall\; x \in [a, b]$. यदि उप-अंतरालों की लंबाइयां $\Delta x_i \to 0$ होने पर

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



(क) चित्र 2 (ख)

$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i$ की सीमा का अस्तित्व हो तो यह सीमा प्रदेश R का क्षेत्रफल A होती है ।

अर्थात् $$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i.$$

इस परिभाषा की तुलना इकाई 10 में दिए गए निश्चित समाकल की परिभाषा से कीजिए । इकाई 10 में हमने यह देखा था कि निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$, $\Delta x_i \to 0$ होने पर

$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i$ और $\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$ की उभयनिष्ठ सीमा होता है । अब क्योंकि $m_i \le f(t_i) \le M_i\ \forall\ i$,

इसलिए $$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$$

इसलिए यदि $\Delta x_i \to 0$ होने पर इनमें से प्रत्येक की सीमा का अस्तित्व हो, तो इकाई 2 के सैण्डविच प्रमेय के अनुसार

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \le \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \le \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$$

अब, यदि $\int_a^b f(x)\,dx$ का अस्तित्व हो, तो यहां पहली सीमा और तीसरी सीमा बराबर होगी और तब हमें निम्नलिखित प्राप्त होगा

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(1) की समिका प्राप्त होने का कारण यह है कि R के क्षेत्रफल की परिभाषा और निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ की परिभाषा समान है । क्योंकि अंतराल [a, b] पर f को संतत माना गया है, इसलिए (1) के समाकल का अस्तित्व है । अतः इससे विचाराधीन प्रदेश R का क्षेत्रफल प्राप्त हो जाता है ।

निश्चित समाकलों के अंतराल सम्मिलन गुणधर्म (इकाई 10 का भाग 3) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

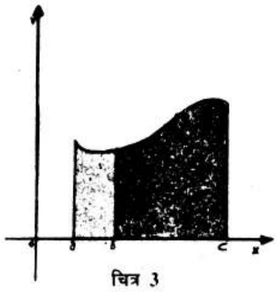
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ a \le c \le b \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि A_a^c, A_c^b, A_a^b, x-अक्ष के ऊपर क्रमशः a से c तक, c से b तक और a से b तक f के आलेख के अंदर के क्षेत्रफल को प्रकट करता हो (चित्र 3), तो

$$A_a^c + A_c^b = A_a^b, \qquad \ldots\ldots(3)$$

जब कि c, a और b के बीच हो।

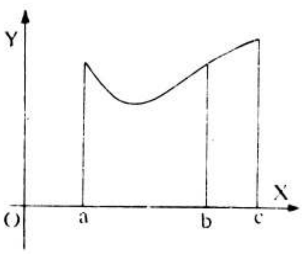


चित्र 3

यदि हम $A_a^a = 0$, $A_b^b = 0$ परिभाषित करें, तो ऊपर दिया गया समीकरण c = a और c = b के लिए भी सही होगा।

अभी तक हम फलन f को अंतराल [a, b] में धनात्मक मानते आए है। सामान्यतः कोई फलन f अंतराल [a, b] में धनात्मक और ऋणात्मक दोनों ही मान धारण कर सकता है। ऐसी स्थिति के लिए हम चिह्नित क्षेत्रफल की एक परंपरा बना लेते हैं।

x-अक्ष के ऊपर जब बायीं ओर से दायीं ओर जाते हैं तब हम क्षेत्रफल को धनात्मक मानते है और दायीं ओर से बायीं ओर जाते हैं, तब हम क्षेत्रफल को ऋणात्मक मानते है। फलन f को अंतराल [a, b] के परे भी परिभाषित किया जा सकता है। इस स्थिति में c का b के परे होने के बावजूद भी (3) सही होता है क्योंकि चिह्नित क्षेत्रफल की हमारी परंपरा के अनुसार A_c^b एक ऋणात्मक राशि होगी (चित्र 4)।



चित्र 4

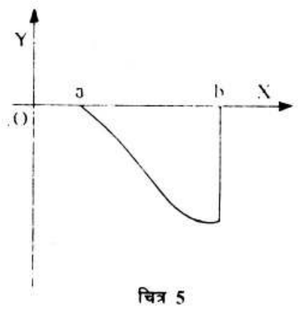
इस तरह $A_a^b = A_a^c + A_c^b = A_a^c - A_b^c$

या $A_a^b + A_b^c = A_a^c$.

अब, यदि किसी अंतराल [a, b] में सभी x के लिए $f(x) \leq 0$, तो फलन -f पर "R के क्षेत्रफल" की परिभाषा लागू करने पर हमें क्षेत्रफल $A = -\int f(x)\,dx$ प्राप्त होता है।

यदि हम ऋण चिह्न न लें, तो क्षेत्रफल का मान ऋणात्मक हो जाएगा, क्योंकि सभी $x \in [a, b]$ के लिए f(x) ऋणात्मक होता है। इस ऋणात्मक क्षेत्रफल से बचने के लिए ही हम इस परंपरा का अनुसरण करते है। इस तरह, यदि $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) \leq 0$ (चित्र 5), तो कोटियों (Ordinates) x = a और x = b के बीच f(x) के अंदर का क्षेत्रफल होगा

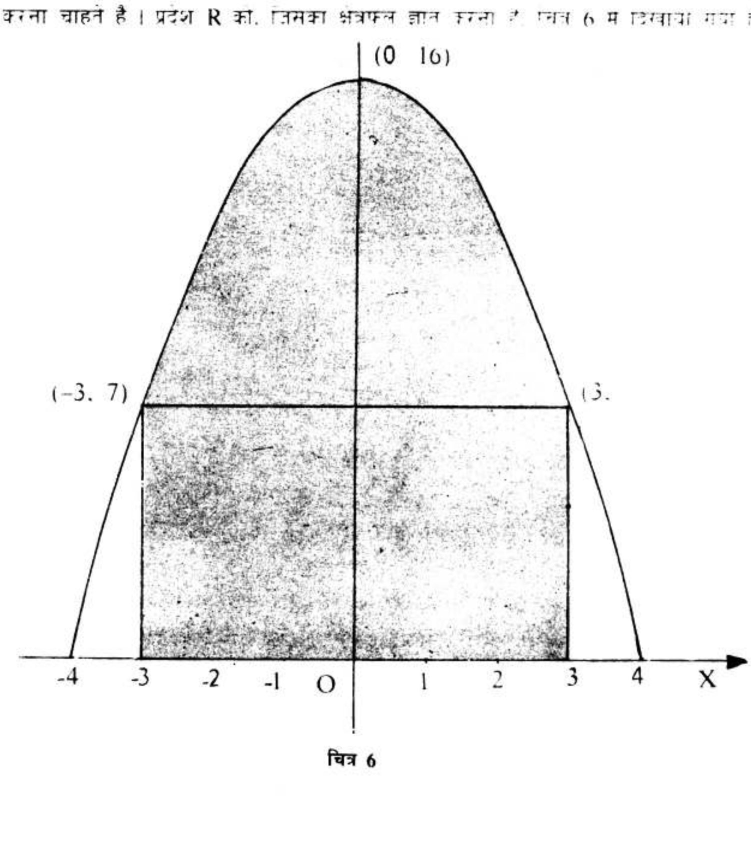
$$A = -\int_a^b f(x)\,dx.$$



चित्र 5

नीचे दिए गए उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाएगा कि कुछ क्षेत्रफलों को ज्ञात करने के लिए निश्चित समाकलों के मान निकालने की विधि को किस प्रकार लागू किया जा सकता है।

उदाहरण 1: मान लीजिए हम वक्र $y = 16 - x^2$, x-अक्ष, और कोटियों x = 3, x = -3 से परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते है। प्रदेश R को, जिसका क्षेत्रफल ज्ञात करना है, चित्र 6 में दिखाया गया है।



चित्र 6

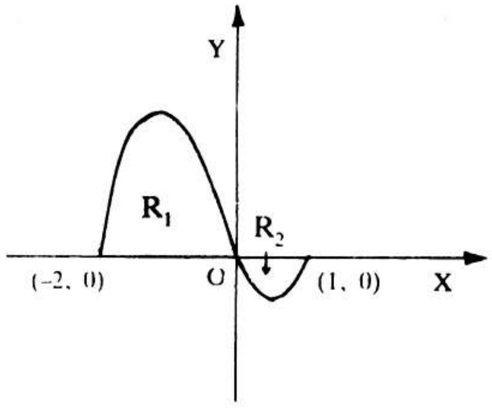
UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

प्रदेश R का क्षेत्रफल A निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है ।

$$A = \int_{-3}^{3} (16-x^2)\, dx$$

$$= \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{3} = 78.$$

उदाहरण 2: चित्र 7 में दिखाए गए छायादार प्रदेश R को लीजिए



चित्र 7

प्रदेश R दो भागों में बांटा है – प्रदेश R_1 और प्रदेश R_2.
इसलिए, क्षेत्रफल R = क्षेत्रफल R_1 + क्षेत्रफल R_2.
क्योंकि प्रदेश R_1, x-अक्ष के ऊपर $y = x^3 + x^2 - 2x$ के आलेख, $x = 0$ और $x = -2$ से परिबद्ध है, इसलिए

$$\text{क्षेत्रफल } R_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{8}{3}$$

प्रदेश R_2, x- अक्ष के नीचे $y = x^3 + x^2 - 2x$ के आलेख, $x = 0$ और $x = 1$ से परिबद्ध है ।

इसलिए

$$\text{क्षेत्रफल } R_2 = -\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx$$

$$= -\left| \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_{0}^{1}$$

$$= \frac{5}{12}$$

इसलिए, क्षेत्रफल $R = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$.

इस उदाहरण में, क्योंकि प्रदेश R_2, x-अक्ष के नीचे था, इसलिए क्षेत्रफल R_1 और क्षेत्रफल R_2 हमें अलग-अलग ज्ञात करना पड़ा था । अतः अपनी चिह्न परंपरा के अनुसार

$$\text{क्षेत्रफल } R_2 = -\int_{0}^{1} f(x)\, dx.$$

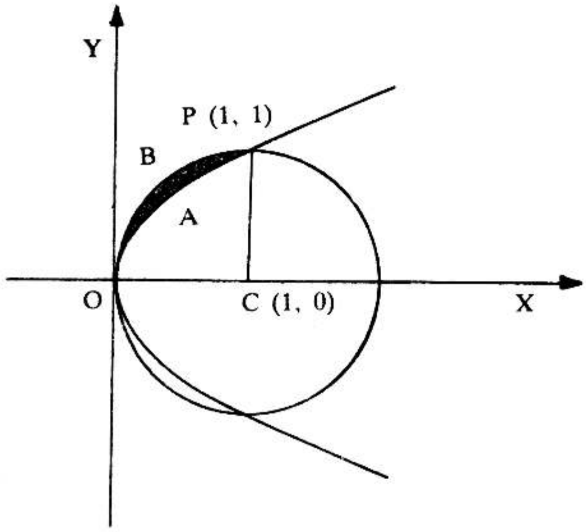
UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

यदि हम सीधे $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ का मान ज्ञात करते, तो यह मान होता

$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx =$ क्षेत्रफल R_1, $-$ क्षेत्रफल R_2, जो कि क्षेत्रफल R का एक गलत आकल होता।

उदाहरण 3: आइए अब हम x-अक्ष के ऊपर और वृत्त $x^2+y^2=2x$ और परवलय $y^2=x$ के बीच स्थित छोटे प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

समीकरणों $x^2+y^2=2x$ और $y^2=x$ को युगपत रूप से हल करने पर हमें दिए हुए वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के रूप में (0,0), (1,1), (1,-1) प्राप्त होते हैं। अब हमें OAPBO (चित्र 8) द्वारा परिबद्ध प्रदेश R का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।



चित्र 8

चित्र 8 से हम यह पाते हैं कि प्रदेश OAPBO का क्षेत्रफल

= प्रदेश OCPBO का क्षेत्रफल $-$ प्रदेश OCPAO का क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{2x-x^2}\right) dx - \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

अब $$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2}\,dx$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} \cos\theta\,(-\cos\theta)\,d\theta,\ 1-x=\sin\theta \text{ लेने पर}$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} -\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

और $$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}.$$

इसलिए इच्छित क्षेत्रफल $= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 1) वक्र $y = \sin x$ के अंदर $x = 0$ तथा $x = \pi$ के बीच स्थित प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

E 2) x-अक्ष, वक्र $y = e^x$, और कोटियों $x = 1$ तथा $x = 2$ से परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

E 3) वक्र $y = 5x - x^2$, $x = 0$, $x = 5$ से परिबद्ध और x-अक्ष से ऊपर स्थित प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

E 4) परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभि-लंब (latus rectum) $x = a$ से परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E 5) परवलय $y^2 = 4ax$ और जीवा $y = mx$ के बीच के प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

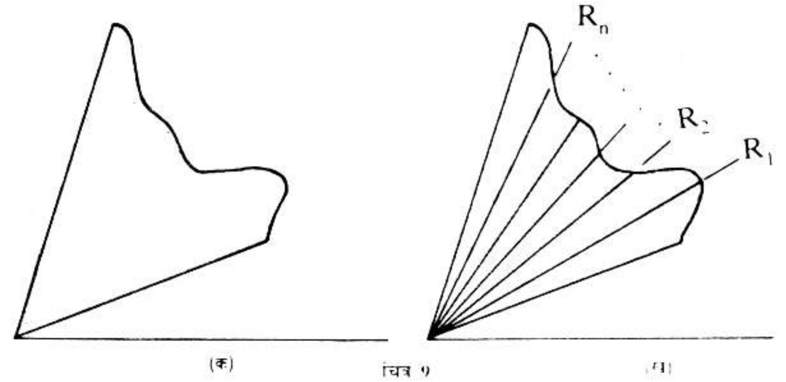
इस उपभाग में हमने वक्र के अंदर के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए एक सूत्र (सूत्र (1)) प्राप्त किया है, जबकि वक्र का समीकरण कार्तीय रूप में दिया गया हो । इस सूत्र में थोड़ा-बहुत परिवर्तन करके इसका प्रयोग उस वक्र के अंदर का क्षेत्रफल ज्ञात करने में भी किया जा सकता है जिसका समीकरण प्राचलिक समीकरण-युग्म के रूप में दिया हुआ हो ।

प्राचलिक समीकरणों द्वारा दिए गए वक्रों पर विचार हम कुछ समय बाद करेंगे । पहले हम ध्रुवी समीकरण द्वारा दिए गए वक्रों पर विचार करेंगे ।

15.2.2 ध्रुवी समीकरण

कभी-कभी किसी वक्र का कार्तीय समीकरण काफी जटिल होता है पर उसका ध्रुवी समीकरण जटिल नही होता । हृदयाभ (cardioid) और सर्पिल (spiral), जिनकी जानकारी आपको इकाई 9 में मिल चुकी है, इस प्रकार के वक्रों के उदाहरण है । ऐसे वक्रो के संबंध में उनके कार्तीय समीकरणों की अपेक्षा उनके ध्रुवी समीकरणों के साथ कोई प्रक्रिया लागू करना अधिक सरल होता है । इस उपभाग में हम वक्र के अंदर का क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि की जानकारी प्राप्त करेंगे जबकि वक्र का समीकरण ध्रुवी रूप में दिया हुआ हो । यहा हम अनेक त्रिज्य खंडो (sectors) के क्षेत्रफलों की सहायता से दिए हुए प्रदेश का सन्निकट क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयास करेंगे । यहां पर त्रिज्य खंड वही काम करते है जो कि कार्तीय निर्देशांकों में आयतों ने किया था ।

मान लीजिए $r = f(\theta)$ किरण $\theta = \alpha$ और किरण $\theta = \beta$ ($\beta - \alpha \leq 2\pi$) के बीच एक संतत वक्र को निर्धारित करता है । हम चित्र 9 (क) में दिए गए छायादार प्रदेश R का क्षेत्रफल A(R) ज्ञात करना चाहते है ।



(क) चित्र 9 (ख)

कल्पना कर लीजिए कि कोण AOB, n बराबर-बराबर भागों $\Delta\theta$ में विभाजित है ।

तब $$\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

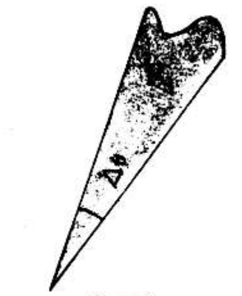
दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते है कि प्रदेश R छोटे-छोटे प्रदेशों, $R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$ में विभाजित है जैसा चित्र 9(ख) में दिखाया गया है ।

तब स्पष्ट है कि $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + \ldots\ldots + A(R_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} A(R_i)$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

आइए अब हम iवां त्रिज्य खंड, R_i लें और इसके क्षेत्रफल का सन्निकट मान ज्ञात करने का प्रयास करें। इसके लिए चित्र 10 देखिए।



चित्र 10

r त्रिज्या वाले एक वृत्त के Δ θ कोण वाले त्रिज्य खंड का क्षेत्रफल $\frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$ होता है।

मान लीजिए $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ पर f के निम्नतम और अधिकतम मान क्रमशः u_i और v_i, पर हैं। तब

$$\frac{1}{2}\,[f(u_i)]^2\,\Delta\,\theta \le A(R_i) \le \frac{1}{2}\,[f\,(v_i)]^2\,\Delta\,\theta$$

इससे हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\,[f(u_i)]^2\,\Delta\,\theta \le \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\,[f(v_i)]^2\,\Delta\theta$$

इस असमिका का पहला योगफल और तीसरा योगफल समान निश्चित समाकल,

अर्थात् $\int_\alpha^\beta f(\theta)\, d\,\theta$ के क्रमशः निम्न और उपरि रीमान योगफल हैं (देखिए इकाई 10)। इसलिए $\Delta\,\theta \to 0$

होने पर सैण्डविच प्रमेय लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

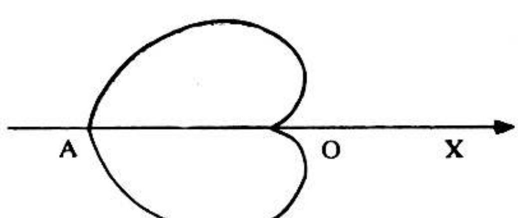
$$A(R) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

हम कुछ उदाहरण लेकर इस सूत्र के प्रयोग को समझाने का प्रयास करेंगे। इनका अध्ययन आप काफ़ी सावधानी से करें जिससे कि बाद में इन पर दिए गए प्रश्नों को आप हल कर सकें।

उदाहरण 4: मान लीजिए हम हृदयाभ $r = a(1-\cos\,\theta)$ से परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं।

यहां $\theta = 0$ पर $r = 0$ और $\theta = \pi$ पर $r = 2a$.

क्योंकि $\cos\,\theta = \cos(-\theta)$, इसलिए, हृदयाभ आदि रेखा AOX (चित्र 11) के प्रति सममित है।



चित्र 11

इसलिए इच्छित क्षेत्रफल A, जो चित्र 11 में छायादार प्रदेश के क्षेत्रफल का दूना है, निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त हो जाता है:

$$A = 2\int_0^\pi \frac{1}{2} r^2\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi a^2\,(1-\cos\,\theta)^2\, d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^\pi \sin\,\frac{\theta}{2}\, d\theta,\ \text{क्योंकि}\ \cos\,\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

$$= 8a^2\int_0^{\pi/2} \sin^4\phi\, d\phi,\quad \text{जहां}\ \phi = \frac{\theta}{2}.$$

$$= 8a^2.\ \frac{3}{4}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{\pi}{2},$$ इकाई 12 के भाग 3 से समानयन सूत्र लागू करने पर।

$$= \frac{3}{2}\,a^2\pi.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

प्रायः उच्च घात वाले कुछ कार्तीय समीकरणों को ध्रुवी समीकरण में रुपांतरित कर देने पर क्षेत्रफल ज्ञात करना सरल हो जाता है। यह तथ्य नीचे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट हो जाता है।

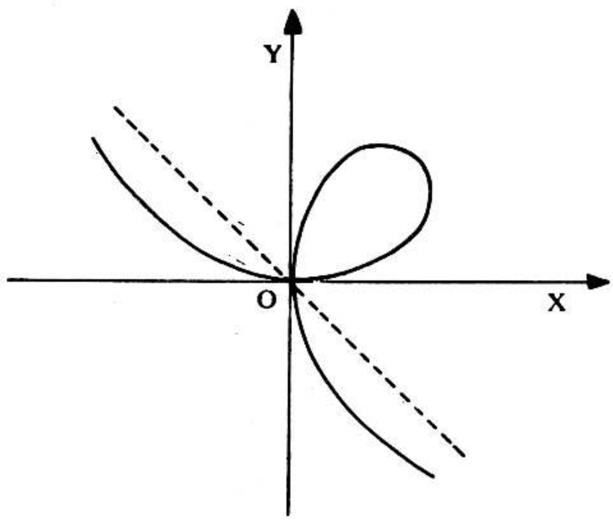
उदाहरण 5: वक्र

$$x^5 + y^5 = 5\ ax^2y^2$$

के पाश का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम रूपांतरण $x = r\cos\theta$ और $y = r\sin\theta$ से दिए हुए समीकरण को ध्रुवी समीकरण में रुपांतरित कर देते हैं। इस तरह हमें

$$r = \frac{5a\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^5\theta + \sin^5\theta}.$$

प्राप्त होता है, जिससे $\theta = 0$ और $\theta = \pi/2$ पर $r = 0$ प्राप्त होता है।
अतः पाश का क्षेत्रफल A, वक्र और ध्रुवांतर रेखाओं, $\theta = 0$ और $\theta = \frac{\pi}{2}$ द्वारा परिबद्ध त्रिज्य खंड का क्षेत्रफल होता है। अर्थात्, ध्रुवांतर रेखा का $\theta = 0$ से $\theta = \frac{\pi}{2}$ तक जाने पर प्राप्त प्रदेश का क्षेत्रफल होता है। देखिए चित्र 12.



चित्र 12

इस तरह,

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{25a^2\cos^4\theta\sin^4\theta}{(\cos^5\theta + \sin^5\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\, a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^4\theta\sec^2\theta}{(1 + \tan^5\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \frac{5}{2}\, a^2 \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}, \text{ जहां } t = 1 + \tan^5\theta$$

$$= \frac{5}{2}\, a^2\, [-1/t]_1^{\infty} = \frac{5}{2}\, a^2$$

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E6) वक्र $r = a \sin 3\theta$ के एक पाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

E7) वक्र $r = a \cos 2\theta$ और ध्रुवांतर रेखाओं $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ से परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

E8) वृत $r = 2$ से बाहर और लेम्निस्केट $r = 8 \cos 2\theta$ के अंदर स्थित प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(संकेतः पहले प्रतिच्छेद-बिन्दु ज्ञात कीजिए । तब इच्छित क्षेत्रफल = लेम्निस्केट के अंदर का क्षेत्रफल – वृत के अंदर का क्षेत्रफल ।)

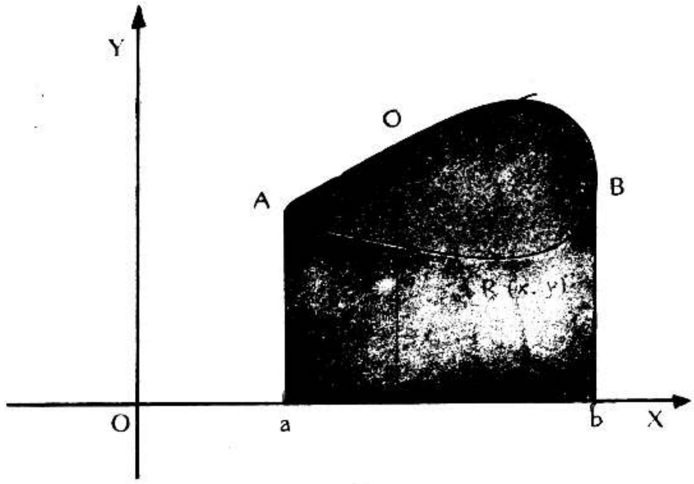
UGMM-01 Qty,1000 Plate-24

15.2.3 संवृत वक्र द्वारा परिबद्ध क्षेत्र

यहां हम उन वक्रों पर विचार करेंगे, जो अपने आप को नहीं काटते ।

अब हम उन संवृत वक्रों पर विचार करेंगे जिनके समीकरण प्राचलिक रूप में दिए गए हैं ।

मान लीजिए प्राचलिक समीकरण $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, जहां $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ और $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, एक समतल संवृत वक्र को निरूपित करते हैं (चित्र 13) ।



चित्र 13

इससे यह अर्थ निकलता है कि जैसे-जैसे प्राचल t का मान α से बढ़कर β हो जाता है, वैसे-वैसे बिन्दु P(x, y) वामावर्त (counter clockwise) में वक्र को पूरी तरह से निर्धारित करता है । क्योंकि वक्र संवृत है, इसलिए इस पर मान β का संगत बिन्दु वही होता है जो कि मान α का संगत बिन्दु है ।

इससे हमें ये प्रतिबंध प्राप्त होते हैं कि $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ और $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ मान लीजिए x-अक्ष अथवा y-अक्ष के समांतर खींची गई प्रत्येक रेखा इस वक्र को अधिक से अधिक दो बिन्दुओं पर काटती है । हम यह भी मान लेते हैं कि फलन ϕ तथा ψ अवकलनीय है और इनके अवकलजों ϕ' तथा ψ' का लोपन एक साथ नहीं होता । (अर्थात इनका मान एक ही बिंदु पर शून्य नहीं होता है ।)
मान लीजिए संवृत वक्र (closed curve) का बिन्दु R, मानों α और β के संगत है । अर्थात् बिन्दु R पर $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, और $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$.

अब मान लीजिए वक्र पर बिन्दु A ऐसा है, जिसका कि निम्नतम x-निर्देशांक a है । इसी प्रकार मान लीजिए वक्र पर बिन्दु B ऐसा है, जिसका कि अधिकतम x-निर्देशांक b है ।

रेखाएं $x = a$ और $x = b$ वक्र को क्रमशः बिन्दुओं A और B पर स्पर्श करती हैं । और यह भी मान लीजिए कि t_1 और t_2 क्रमशः A और B के संगत t के मान हैं ।

तब $\alpha < t_2 < t_1 < \beta$.

मान लीजिए $t = t_3$ के संगत एक ऐसा बिन्दु Q है जिससे कि $t_1 < t_3 < t_2$. वक्र से घिरे प्रदेश का क्षेत्रफल $S = S_2 - S_1$, है, जहां S_2 और S_1 क्रमशः चाप BQA और ARB, के अंदर के क्षेत्रफल हैं । (देखिए चित्र 13) अतः

$$S_2 = \underset{(AQB)}{\int_a^b} y\,dx \text{ और } S_1 = \underset{(ARB)}{\int_a^b} y\,dx$$

अब, जैसे-जैसे बिन्दु P(x, y), चाप BQA के अनुदिश B से A की ओर जाता है, वैसे-वैसे प्राचल का मान t_2 से बढकर t_1 हो जाता है । इसलिए

हमने प्राचलिक समीकरण-युग्म के लिए सूत्र (1) में किस प्रकार परिवर्तन किया है इसे नोट कीजिए ।

$$\underset{(BQA)}{\int_b} y\,dx = \int_{t_2}^{t_1} y \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$\text{अतः } S_2 = -\int_{t_2}^{t_1} y \frac{dx}{dt}\,dt$$

अब बिन्दु P की ARB के अनुदिश A से B की ओर की गति को दो भागों में बांटा जा सकता है: A से R तक और R से B तक। बिन्दु P जैसे-जैसे A से R की ओर जाता है, वैसे-वैसे प्राचल का मान t_1 से बढ़कर β हो जाता है और P जैसे-जैसे R से B की ओर जाता है, t का मान α से बढ़कर t_2 हो जाता है।

आपको याद होगा कि बिन्दु R, $t=\alpha$ के और $t=\beta$ के भी संगत है।

इसलिए $$S_1 = \underset{(ARB)}{\int_a^b} y\,dx = \int_{t_1}^{\beta} y \frac{dx}{dt}\,dt + \int_{\alpha}^{t_2} y \frac{dx}{dt}\,dt$$

इस तरह,

$$S = \underset{(AQB)}{\int_a^b} y\,dx - \underset{(ARB)}{\int_a^b} y\,dx = S_2 - S_1$$

$$= -\int_{t_2}^{t_1} y \frac{dx}{dt}\,dt - \int_{t_1}^{\beta} y \frac{dx}{dt}\,dt - \int_{\alpha}^{t_2} y \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt}\,dt \qquad \ldots(i)$$

नोट कीजिए कि यहां ऋण चिह्न उस दिशा के कारण है जिसमें हम वक्र के अनुदिश चलते हैं, जैसा कि चित्र 13 में तीरों से दिखाया गया है। इसी प्रकार, वक्र पर x-अक्ष के समांतर स्पर्श-रेखाएं खींचकर यह दिखाया जा सकता है कि

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{dy}{dt}\,dt \qquad \ldots.(ii)$$

(i) और (ii) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$2\,S = \int_{\alpha}^{\beta} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

इसलिए परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल होगा

$$S = \frac{1}{2} \int^{\beta} (x\,dy - y\,dx) \qquad \ldots.(5)$$

यूँ तो S का मान ज्ञात करने के लिए हम ऊपर दिए गए सूत्रों (i), (ii) और (5) में से किसी भी एक सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं, परंतु अधिकांश स्थितियों में सूत्र (5) अपनी सममिति के कारण अधिक उपयोगी सिद्ध होता है।

उदाहरण 6: आइए अब हम एस्ट्रायड

$x = a \cos^3 t,\ y = b \sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

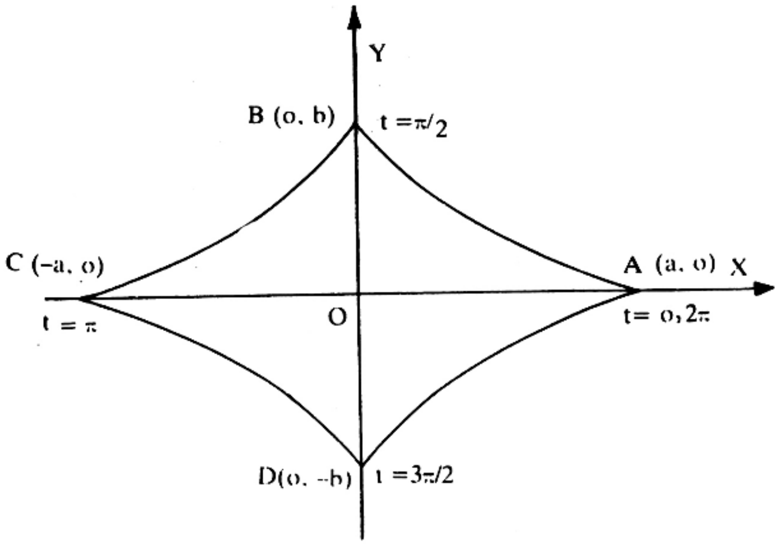
का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

एस्ट्रायड द्वारा परिबद्ध प्रदेश को चित्र 14 में दिखाया गया है।

इस प्रदेश का क्षेत्रफल A निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



चित्र 14

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{a\cos^3 t\,(3b\sin^2 t\cos t) - b\sin^3 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)\}\,dt$$

$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt$$

इकाई 11 के भाग 3 में हमने यह देखा है कि

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(2a-x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{a} f(x)\,dx, \text{ यदि } f(2a-x) = f(x)$$

यहां $\cos^2(2\pi - t)\sin^2(2\pi - t) = \cos^2 t\,\sin^2 t$

अतः $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt.$

इसलिए $A = 3ab\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt.$

अब हम इसी प्रकार तर्क देकर यह कह सकते हैं कि

$$A = 6\,ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt,$$

$= \frac{3\pi\,ab}{8}$, (इकाई 12 के भाग 4 के समानयन-सूत्र का प्रयोग करने पर)

अब आप इन प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E9) वक्र

$x = a(3 \sin \theta - \sin^3 \theta)$,

$y = a \cos^3 \theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

E10) वक्र

$x = a \cos \theta + b \sin \theta + c$

$y = a' \cos \theta + b' \sin \theta + c',\ 0 \le \theta \le 2\pi$

से परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

E11) वक्र $x = a \sin 2t$, $y = a \sin t$ के अनेक पाशों में से एक पाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(संकेत: पहले t के उन दो मानों का पता लगाइए जिनके संगत x और y के मान समान हैं और फिर इन समाकल की सीमाओं के रूप में लीजिए ।)

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

15.3 संख्यात्मक समाकलन

अनेक व्यावहारिक प्रश्नों में केवल कुछ बिन्दुओं पर ही समाकल्य, अर्थात् समाकलित किए जाने वाले फलन के मान दिए होते हैं। उदाहरण के लिए,

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y = f(x)	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

कुछ ऐसी भी स्थितियां होती हैं जिनमें दिए हुए समाकल्य के लिए कोई सरल समाकल ज्ञात नहीं होता। उदाहरण के लिए फलन $\frac{\sin x}{x}$ का कोई सरल अनिश्चित समाकल (indefinite integral) नहीं है। ऐसी स्थिति में समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ का ठीक-ठीक मान प्राप्त नहीं किया जा सकता। पर अंतर्गत (अंदर के) या परिगत (बाहर के) आयतों के क्षेत्रफलों का जोड़ लेकर हम समाकल का सन्निकट मान प्राप्त कर सकते है, जैसा कि हम इस इकाई के प्रारंभ में देख चुके हैं। इस भाग में हम समाकल का सन्निकट मान निकालने की दो और विधियों का उल्लेख करेंगे:

(i) समलंबी नियम (trapezoidal rule) और (ii) सिम्सन नियम

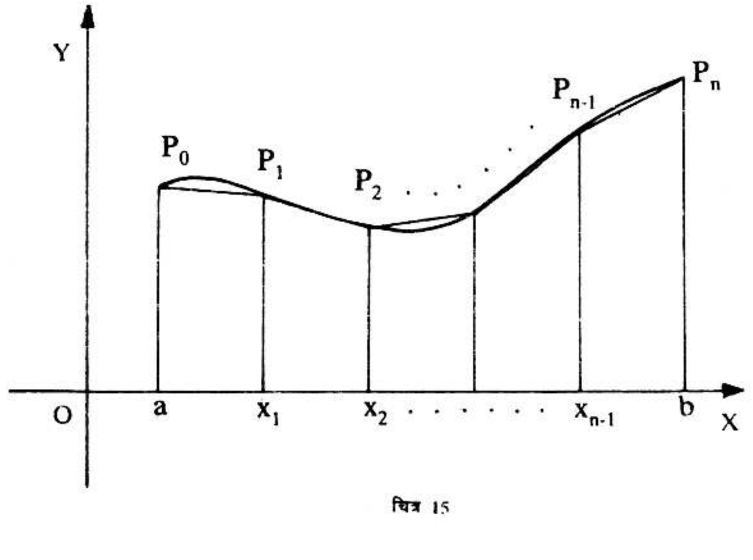
15.3.1 समलंबी नियम

हम जानते है कि अंतः आयतों और बाह्य आयतों के क्षेत्रफल लेकर दिए हुए निश्चित समाकल का सन्निकट मान प्राप्त किया जा सकता है। इस संबंध में समलंबी नियम से एक बेहतर विधि प्राप्त होती है। इस नियम के अनुसार हम समलंब (trapezium) के क्षेत्रफल से प्रत्येक पट्टी के क्षेत्रफल का सन्निकट मान प्राप्त करते हैं। इस प्रकार के सन्निकटन को **रैखिक सन्निकटन** भी कहा जाता है क्योंकि प्रत्येक पट्टी में वक्र के अंशों को, रेखा-खंड मान लिया जाता है। पहले की तरह यहां भी हम अंतराल [a, b] को n उप-अंतरालों में विभाजित करते हैं, जिसमें प्रत्येक उप-अंतराल की लंबाई $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, होती है। इसके लिए हम $x_0 = a$ और $x_n = b$ के बीच $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$, बिन्दु लेते है। तब

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

अब हम समलंब a P_0 P_1 x_1 (चित्र 15) के क्षेत्रफल से दाहिनी ओर के पहले समाकल का सन्निकट मान



चित्र 15

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

प्राप्त करते हैं, समलंब $x_1 P_1 P_2 x_2$ से दूसरे समाकल का सन्निकट मान प्राप्त करते हैं, इत्यादि। इस तरह हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\,\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\,\Delta x + \ldots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\,\Delta x$$

$$= \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x \qquad \ldots(6)$$

समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का जोड़) × ऊंचाई

जहां $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$

सूत्र (6) को निश्चित समाकल का सन्निकट मान प्राप्त करने का **समलंबी नियम** कहा जाता है।

क्या अब आप यह प्रश्न हल कर सकते है ?

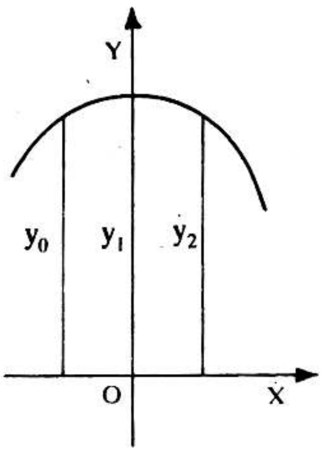
E E12) समलंबी नियम से n के दिए हुए मान पर निम्नलिखित समाकलों के मान आकलित कीजिए।

क) $\int_1^2 x^2\,dx,\ n = 4$

ख) $\int_1^4 \sqrt{x^2 + 4}\,dx,\ n = 6.$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

15.3.2 सिम्सन-नियम



चित्र 16

इस विधि में दिए हुए वक्र का सन्निकटन रेखा-खंडों से करने के स्थान पर हम परवलय (parabola) जैसे सरल वक्र के खंडों से करते हैं।

$x=-h$ और $x=h$ के बीच परवलय (चित्र 16)

$y=Ax^2+Bx+C$

के चाप के अंदर का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है:

$$A_1 = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx$$

$$= \frac{2\,Ah^3}{3} + 2\,Ch$$

क्योंकि वक्र बिन्दुओं $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ और (h, y_2), से होकर जाता है, इसलिए परवलय के समीकरण में इन बिन्दुओं के निर्देशांकों को प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C,$$

जिनसे हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$C = y_1$$
$$Ah^2 - Bh = y_0 - y_1$$
$$Ah^2 + Bh = y_2 - y_1$$
$$\Rightarrow 2\,Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1$$

अतः प्रतिस्थापन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

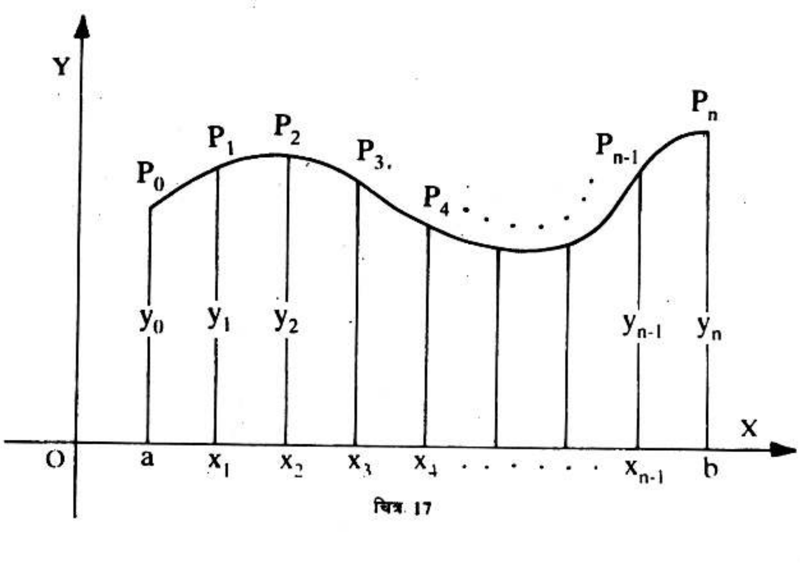
$$A_1 = -\frac{h}{3}[2Ah^2 + 6C] = \frac{h}{3}[y_0 + y_2 - 2y_1 + 6y_1]$$

$$\text{या } A_1 = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] \quad ....(7)$$

सिम्सन-नियम प्राप्त करने के लिए हम $x=a$ और $x=b$ के बीच वक्र $y=f(x)$ के एक के बाद एक खंडों पर ऊपर प्राप्त किए गए परिणाम को लागू करते हैं। इसके लिए हम $[a, b]$ को चौड़ाई h के n उप-अंतरालों में विभाजित करते हैं।

इस वाक्य को धीरे-धीरे पढ़िए ताकि उसका अर्थ स्पष्ट हो सके!

तब हम उप-अंतरालों के प्रत्येक युग्म में स्थित वक्र के भाग का सन्निकटन वक्र के उस भाग के अंत्य बिन्दुओं (end-points) और उन उप-अंतरालों के उभयनिष्ठ (common) बिन्दु (चित्र 17) के संगत बिन्दु से होकर जाने वाले परवलय के चाप से करते हैं।



चित्र 17

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

आइए पहले हम दो उप-अंतराल $[a, x_1]$ और $[x_1, x_2]$ लें । a, x_1 और x_2 के संगत वक्र के बिन्दु क्रमशः P_0, P_1 और P_2, हैं । आइए अब हम P_0, P_1 P_2 से होकर जाने वाला परवलय खींचें । यहां हम यह मान लेंगे कि P_0, P_1 और P_2 से होकर जाने वाले वक्र का भाग इस परवलय के साथ संपाती (coincident) है । देखिए चित्र 17.

इसी प्रकार हम अंतराल $[x_2, x_4]$ में वक्र के भाग का सन्निकटन बिन्दु P_2, P_3, और P_4 से होकर जाने वाले परवलय से करते हैं । यही प्रक्रिया हम शेष अंतराल-युग्मों पर भी लागू करेंगे । अब परवलय $P_0 P_1 P_2$ के अंदर का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त हो जाता है ।

$$A_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \text{ (सूत्र (7) को लागू करने पर)}$$

इसी प्रकार बिन्दुओं P_2, P_3 और P_4 से होकर जाने वाले परवलय के अंदर का क्षेत्रफल यह होता है:

$$A_3 = \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$$

अब हम बिन्दुओं P_4, P_5, P_6 से होकर जाने वाले परवलय के लिए सूत्र (7) लागू करके निम्नलिखित क्षेत्रफल प्राप्त करते हैं:

$$A_5 = \frac{h}{3}[y_4 + 4y_5 + y_6], \qquad \text{इत्यादि ।}$$

ध्यान दीजिए कि इस प्रकार एक दिए हुए वक्र के अंदर के कुल क्षेत्रफल का सन्निकट मान निकालने के लिए अंतरालं [a, b] के उप-विभाजनों की संख्या, n, सम होनी चाहिए । सभी क्षेत्रफलों को जोड़ने पर कुल क्षेत्रफल के रूप में हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$A = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

ऊपर दिए गए सूत्र को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है ।

$$A = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})]$$

जहां हमने $n = 2m$ लिया है । ध्यान दीजिए कि $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2m}$ क्रमशः $x = a, a+h, a+2h, \ldots, a+2mh = b$, के लिए फलन f के मान हैं । अतः सिम्सन-नियम के अनुसार

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})].$$

नीचे दिए गए उदाहरण से हम समलंबी नियम और सिम्सन-नियम की परिशुद्धता (accuracy) की तुलना कर सकते हैं । तुलना करने पर हम पाएंगे कि समलंबी नियम की अपेक्षा सिम्सन-नियम अधिक परिशुद्ध है ।

उदाहरण 7 : अंतराल [1, 3] के चार उप-विभाजनों को लेकर आइए हम समलंबी नियम और सिम्सन-नियम से $\int_1^3 x^2 dx$ का सन्निकट मान ज्ञात करें ।

अंतराल [1, 3] को चार समान उप-अंतरालों में विभाजित करने पर प्रत्येक उप-अंतराल की चौड़ाई $\Delta x = 0.5$ प्राप्त होती है । उप-विभाजन के इन बिन्दुओं पर समाकल्य के मान निम्नलिखित सारणी में दिए गए हैं ।

x	1	1.5	2	2.5	3
y = f (x)	1 (y_0)	2.25 (y_1)	4 (y_2)	6.25 (y_3)	9 (y_4)

समलंबी नियम के सूत्र को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\int_1^3 x^2\,dx \simeq \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)\Delta x$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= \left(\frac{1}{2} + 2.25 + 4 + 6.25 + \frac{9}{2}\right) 0.5 = 8.75 \qquad \text{....(क)}$$

सिम्सन-नियम के सूत्र को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\int_1^3 x^2\, dx \simeq \frac{0.5}{3} [1 + 9 + 2(4) + 4(2.25 + 6.25)]$$

$$= \frac{1}{6} [10 + 8 + 34] = 8.66 \text{ .... या } 8.67 \qquad \text{....(ख)}$$

इस निश्चित समाकल का वास्तविक मान निम्नलिखित है

$$\int_1^3 x^2\, dx = x^3/3]_1^3 = 8.66 \text{ ..., या } 8.67 \qquad \text{....(ग)}$$

(क) के मान की (ग) के वास्तविक मान से तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि समलंबी नियम से प्राप्त मान में 0.08 की त्रुटि है। और (ग) से (ख) की तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि सिम्सन-नियम से प्राप्त मान में त्रुटि 0 है।

उदाहरण 8: आइए अब हम $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x}\, dx$ का मान निकालने के लिए 6 उप-विभाजनों का समलंबी नियम लागू करें। हम इस समाकल का मान सिम्सन-नियम लागू करके भी प्राप्त करेंगे।

यहां

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$y = \sqrt{\sin x}$	0	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{\sqrt{3}/2}$	1	$\sqrt{\sqrt{3}/2}$	$\sqrt{1/2}$	0

समलंबी नियम लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\int_a^b \sqrt{\sin x}\; dx = \left[\frac{1}{2}\times 0 + \sqrt{1/2} + \sqrt{\sqrt{3}/2} + 1 + \sqrt{\sqrt{3}/2} + \sqrt{1/2} + \frac{1}{2}\times 0\right] \frac{\pi}{6}$$

$$= \left(\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{\sqrt{3}/2}\right) \frac{\pi}{6} \simeq 2.23$$

सिम्सन-नियम लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x}\; dx = \left(\frac{1}{3} \times \frac{\pi}{6}\right) [(0+0) + 2(\sqrt{\sqrt{3}/2} + \sqrt{\sqrt{3}/2}) + 4(\sqrt{1/2} + \sqrt{1/2})]$$

$$= \frac{4\pi}{18} (\sqrt{\sqrt{3}/2} + 1 + \sqrt{2}) \simeq 2.33$$

उदाहरण 9: एक नदी 80 मीटर चौड़ी है। नदी के एक किनारे से x मीटर की दूरी पर पानी की गहराई मीटर मे, निम्नलिखित सारणी में दी गई है।

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d	0	4	7	9	12	15	14	8	3

आइए हम अनुप्रस्थ-परिच्छेद (cross-section) का सन्निकट क्षेत्रफल ज्ञात करें। $n = 8$ लेकर सिम्सन-नियम लागू करने पर हमें अनुप्रस्थ का निम्नलिखित क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

$$A = \frac{10}{3} [(0+3) + 2(7+12+14) + 4(4+9+15+8)]$$

$$= \frac{10}{3} [3 + 66 + 144] = 710 \text{ वर्ग मीटर}$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

जैसा कि हमने इस उदाहरण में देखा है, झीलों और नदियों के अनुप्रस्थ-परिच्छेद जैसे असम चित्रों (irregular figures) के सन्निकट क्षेत्रफल ज्ञात करने में सिम्सन-नियम काफी उपयोगी होता है।

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E E13) क) सिम्सन-नियम लागू करके $n = 4$ लेकर निम्नलिखित समाकल का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

ख) $h = 0.1$ लेकर सिम्सन-नियम लागू करके सूत्र $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, से π का मान ज्ञात कीजिए।

E E14) बिन्दुओं (1, 2), (1.5, 2.4), (2, 2.27), (2.5, 2.8), (3, 3), (3.5, 2.6) और (4, 2.1) से होकर जाने वाला एक वक्र खींचा गया है। वक्र, x-अक्ष और कोटियों $x = 1$, $x = 4$ से परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E E15) एक नदी 30 मीटर चौड़ी है। यदि एक किनारे से x मीटर की दूरी पर नदी की गहराई y मीटर निम्नलिखित सारणी से दी गई हो,

x	0	5	10	15	20	25	30
y	0	1.2	2.1	2.4	1.6	0.6	0

तो अनुप्रस्थ परिच्छेद का सन्निकट क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E16) विराम से प्रारंभ करके एक ट्रेन का वेग निम्नलिखित सारणी में दिया गया है। यहां समय मिनटों में लिया गया है और वेग किलोमीटर/घंटों में

मिनट	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
कि०मी०/घंटा	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

20 मिनट में ट्रेन द्वारा तय की दूरी का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

आइए अब हमने इस इकाई में जो कुछ भी अध्ययन किया है उसे हम जल्दी से पुनः दोहरा लें।

15.4 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है।

1) समतल वक्रों द्वारा परिबद्ध प्रदेशों के क्षेत्रफल ज्ञात करने में समाकलन की जानकारी काफी सहायक होती है, जबकि वक्र के समीकरण

क) कार्तीय रूप $(A = \int_a^b y\, dx)$, या

ख) ध्रुवी रूप $\left(A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\, d\theta\right)$ में हों।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

2) प्राचलिक समीकरण में दिए गए संवृत वक्र द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल यह होता है:

$$A = -\int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

3) जब समाकल का ठीक-ठीक मान न निकाला जा सकता हो, तो हम संख्यात्मक समाकलन की विधि का प्रयोग कर सकते हैं। इस संबंध में दो विधियाँ नीचे दी गई हैं:

क) समलंबी नियम

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) \Delta x,$$

जहां n, [a, b] के उप-विभाजनों की संख्या है और Δx प्रत्येक उप-अंतराल की लंबाई है।

ख) सिम्पसन-नियम

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3} \left[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) \right]$$

जहां [a, b] को लंबाई h के 2m उप-अंतरालों में विभाजित किया गया है।

15.5 हल और उत्तर

E1) $$A = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$= -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

E2) $$\int_1^2 e^x\, dx = e^x\Big]_1^2 = e^2 - e.$$

E3) $$\int_0^5 (5x - x^2)\, dx = \left| \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^5 = \frac{125}{6}.$$

E4) $y = 2\sqrt{ax}$

$$A = 2 \cdot \int_0^a 2\sqrt{ax}\, dx = 4\sqrt{a} \left. \frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_0^a$$

$$= 4\sqrt{a} \cdot \frac{a^{3/2}}{3/2} = \frac{8a^2}{3}$$

E5) $y^2 = 4ax$ और $y = mx$ के प्रतिच्छेद बिंदु हैं:

(0,0) तथा $(4a/m^2, 4a/m)$.

$$\therefore A = \int_0^{4a/m^2} 2\sqrt{ax}\, dx - \int_0^{4a/m^2} mx\, dx = 2\sqrt{a} \left. \frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_0^{4a/m^2} - \left. \frac{mx^2}{2} \right|_0^{4a/m^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3} \left(\frac{4a}{m^2} \right)^{3/2} - \frac{m}{2} \left(\frac{4a}{m^2} \right)^2 = \frac{8a^2}{3m^3}.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E6) पाश के लिए हमें θ के दो अलग-अलग, क्रमागत (consecutive) ऐसे मान जानने होंगे, जिनके संगत r के मान एक दूसरे के बराबर हों।

यदि $r_1 = a \sin 3\theta_1$, तथा $r_2 = a \sin 3\theta_2$,

$$r_1 = r_2 \Rightarrow \sin 3\theta_1 - \sin 3\theta_2 = 0.$$

$$2 \cos \frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2} \sin \frac{3(\theta_1-\theta_2)}{2} = 0$$

$$\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3(\theta_1-\theta_2)}{2} = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3} \text{ or } \theta_1 = \theta_2.$$

अतः $\theta_1 = 0$ और $\theta_2 = \pi/3$ से हमें r के समान मान मिलेंगे।

$$\therefore A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi} \sin^2 u\, du \quad \text{यदि } u = 3\theta.$$

$$= \frac{a^2\pi}{12}.$$

E7) $$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi} \cos^2 \phi\, d\phi\,,\ \phi = 2\theta$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi\, d\phi + \int_0^{\pi/2} \cos^2 (\pi-\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi\, d\phi + \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi\, d\phi\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi\, d\phi = \pi a^2/8.$$

E8) प्रतिच्छेद बिंदुओं के लिए

$8 \cos 2\theta = 4$ या $\cos 2\theta = 1/2$

$\theta = \pi/3$ or $5\pi/3$

आदि रेखा के प्रति सममिति के कारण हम कह सकते हैं कि इच्छित क्षेत्रफल $A = 2$. (लेम्निस्केट के आदि रेखा के ऊपरी हिस्से ($\theta = 0$ से $\theta = \pi/3$ तक) के अंदर का क्षेत्रफल- आदि रेखा के ऊपर वृत्त $\theta = 0$ से $\theta = \pi/3$ तक के अन्दर का क्षेत्रफल)

$$= 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 64 \cos^2 2\theta\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 4\, d\theta\right]$$

$$= 4\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E9) $x = a(3 \sin\theta - \sin^3\theta),\ y = a \cos^3\theta$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 3a(\cos\theta - \sin^2\theta \cos\theta) = 3a \cos^3\theta$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta}\, d\theta = 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^6\theta\, d\theta = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^6\theta\, d\theta$$

$$= 12a^2\, \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ (समानयन सूत्र)}$$

$$= \frac{15a^2\pi}{8}$$

E10) $\frac{dx}{d\theta} = -a \sin\theta + b\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = -a'\sin\theta + b'\cos\theta$

$$x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} = (ab' - ba') + (ac' - ca')\sin\theta + (cb' - bc')\cos\theta$$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta = (ab' - ba')\pi$$

E11) इस वक्र का एक पाश $t = 0$ और $t = \pi$ के बीच स्थित है।

$$\int_0^{\pi} x\frac{dy}{dt} = a^2\int_0^{\pi}\sin 2t \cos t\, dt = 2a^2\int_0^{\pi}\sin t \cos^2 t\, dt$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/2}\sin t\cos^2 t\, dt$$

$$= 4a^2\, \frac{\cos^3 t}{3}\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{4a^2}{3}.$$

E12) a)

x	0	1/2	1	3/2	2
x^2	0	1/4	1	9-	4

$$A = \left(\frac{1}{2}\times 0 + 1/4 + 9/4 + \frac{1}{2}\times 4\right)\frac{1}{2}$$

$= 2.75.$

b)

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\sqrt{x^2+4}$	$\sqrt{5}$	2.5	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10.25}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{16.25}$	$2\sqrt{5}$

$$A = \left(\frac{1}{2}\times\sqrt{5} + 2.5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{10.25} + \sqrt{13} + \sqrt{16.25} + \sqrt{5}\right)\frac{1}{2}$$

$= 9.76.$

E13) a)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\frac{\sin x}{x}$	1	$4/\sqrt{2}\pi$	$2/\pi$	$4/\sqrt{2}\pi$	0

$$\therefore \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{12}\left|1 + 0 + 2(2/\pi) + 4(4/\sqrt{2}\pi + 4/\sqrt{2}\pi)\right|$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= \frac{\pi}{12}\left[1 + \frac{4+16\sqrt{2}}{\pi}\right]$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1+4\sqrt{2}}{3}$$

$$\simeq 1.0665.$$

b)

x	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.1
$\frac{1}{1+x^2}$	1	.99	.96	.92	.86	.8	.73	.67	.61	.55	.5

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq \frac{.1}{3}\left[\frac{3}{2} + 2(.96+.86+.73+.61) + 4(.99+.92+.8+.67+.55)\right]$$

$$= 0.7846$$

अब $\pi/4 \simeq 0.7846 \Rightarrow \pi \simeq 3.1384.$

E14)

1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
22	2.4	2.27	2.8	3	2.6	2.1

$A = 0.5(1+2.4+2.8+2.27+3+2.6+1.05)$

$= 0.5(15.12) = 7.56$ (समलंबी नियम)

E15) $A \simeq \frac{5}{3}[0+2(2.1+1.6)+4(1.2+2.4+0.6)]$

$= \frac{5}{3}(7.4+16.8) = \frac{5}{3}(24.2) = \frac{121}{3}$ (सिम्सन-नियम)

E16) $S = 2(5+18+25+29+32+20+11+5+2)$

$= 2(147) = 294.$

15.6 शब्दावली

अनुप्रस्थ परिच्छेद	Cross-section
असम चित्र	Irregular figure
कोटि	Ordinate
त्रिज्य खंड	Sector
समलंबी नियम	Trapezoidal rule
समाकल्य	Integrand
संवृत वक्र	Closed curve
क्षेत्रकलन	Quadrature

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

इकाई 16 समाकलन गणित के कुछ और अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

16.1 प्रस्तावना

उद्देश्य

16.2 समतल वक्र की लंबाई

कार्तीय रूप

प्राचलिक रूप

ध्रुवी रूप

16.3 परिक्रमण घनाकृति का आयतन

16.4 परिक्रमण पृष्ठ का क्षेत्रफल

16.5 सारांश

16.6 हल और उत्तर

16.7 शब्दावली

16.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने यह देखा है कि क्षेत्रफल का परिकलन करने में किस प्रकार निश्चित समाकलों का प्रयोग किया जा सकता है। वास्तव में निश्चित समाकलों का यह अनुप्रयोग कोई विशेष बात नहीं है, क्योंकि जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, क्षेत्रफल ज्ञात करने के दौरान ही समाकलन का आविष्कार हुआ था। इस इकाई में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार वक्र के चाप की लंबाई, शंकु तथा अन्य परिक्रमण-घनाकृतियों के आयतन और गोले तथा अन्य परिक्रमण पृष्ठों के क्षेत्रफल को निश्चित समाकल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस इकाई के साथ की कलन का पाठ्यक्रम समाप्त हो जाएगा।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप

- कार्तीय, प्राचलिक अथवा ध्रुवी रूप के समीकरणों से निरूपित वक्रों के चाप की लंबाई ज्ञात कर सकेंगे,
- कुछ परिक्रमण-घनाकृतियों के आयतन ज्ञात कर सकेंगे,
- कुछ परिक्रमण-पृष्ठों के क्षेत्रफल ज्ञात कर सकेंगे।

16.2 समतल वक्र की लंबाई

इस इकाई में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार निश्चित समाकलों का प्रयोग उन समतल वक्रों की लंबाइयाँ ज्ञात करने में किया जा सकता है, जिनके समीकरण कार्तीय, ध्रुवी या प्राचलिक रूप में हों। उस वक्र को, जिसकी लंबाई ज्ञात की जा सकती है, चापकलनीय वक्र (rectifiable curve) कहा जाता है और वक्र की लंबाई ज्ञात करने की प्रक्रिया को चापकलन (rectification) कहा जाता है। आप यहां देखेंगे कि वक्र के चाप की लंबाई ज्ञात करने के लिए हमें जिस व्यंजक को समाकलित करना होगा, उसमें न केवल दिया हुआ फलन होता है बल्कि उसके अवकलज भी होते हैं। अतः इस समाकल के अस्तित्व के बारे में सुनिश्चित होने के लिए हम यह मान लेते हैं कि वक्र को परिभाषित करने वाला फलन अवकलनीय है और इसका अवकलज भी समाकलन-अंतराल पर संतत है।

आइए पहले हम वह वक्र लें जिसका समीकरण कार्तीय रूप में दिया हुआ हो।

16.2.1 कार्तीय रूप

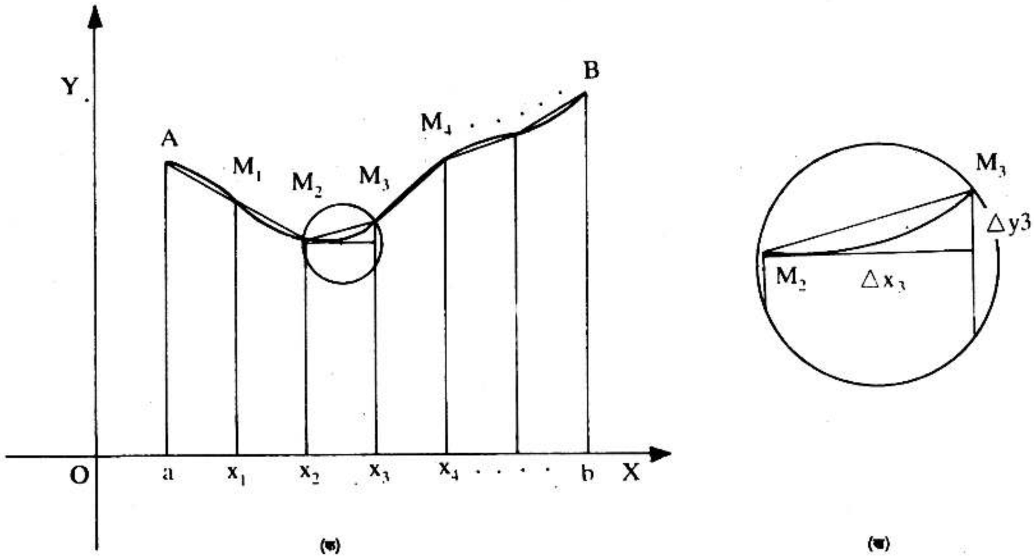
मान लीजिए $y = f(x)$ अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित है। यहां हम यह मान लेते है कि f अवकलनीय है और इसका अवकलज संतत है। मान लीजिए $[a, b]$ का विभाजन P_n है:

$$P_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b\}$$

$x = a$ और $x = b$ कोटियों (ordinates) से वक्र $y = f(x)$ के चाप AB की सीमा सुनिश्चित हो जाती है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

(चित्र 1(क)) । मान लीजिए $M_i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1$, वे बिन्दु हैं जहां रेखाएँ $x = x_i$ वक्र से मिलती हैं ।



चित्र 1

बिन्दुओं $A, M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots, M_{n-1}, B$ को सरल रेखा-खंडों से मिलाइए । यहां हमने दिए हुए वक्र को रेखा-खंडों की एक माला के रूप में मान लिया है । अतः, यदि हम प्रत्येक रेखा खंड की लंबाई ज्ञात कर लें तो इस माला की कुल लंबाई से हमें वक्र की लंबाई का सन्निकट मान प्राप्त हो जाएगा । पर अब प्रश्न यह उठता है कि इन रेखा-खंडों में से किसी एक की लंबाई कैसे ज्ञात की जाए ? मान लीजिए हम रेखा खंड $M_2 M_3$, की लंबाई ज्ञात करना चाहते हैं । चित्र 1(ख) में चित्र 1(क) के घेरे गए भाग को बड़ा करके दिखाया गया है । इसे देखने पर हम पाते हैं कि

$$M_2M_3 = \sqrt{(\Delta x_3)^2 + (\Delta y_3)^2},$$

जहां $\Delta x_3 = M_2Q = (x_3 - x_2)$, और

$$\Delta y_3 = M_3Q = f(x_3) - f(x_2) = y_3 - y_2.$$

इस तरह हम जीवाओं (chords) AM_1, M_1M_2, ..., आदि की लंबाइयां ज्ञात कर सकते हैं ।

यदि $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, तो

S_n से चाप AB की लंबाई का एक सन्निकट मान प्राप्त हो जाता है । यदि विभाजन बिन्दुओं की संख्या अनंततः बढा दी गई हो और प्रत्येक उप-खंड की लंबाई शून्य की ओर प्रवृत्त होती हो, तो चाप AB की लंबाई होती है:

$$L_A^B = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, \qquad \ldots.(1)$$

बशर्ते इस सीमा का अस्तित्व हो ।

क्योंकि हमने यह माना है कि f अंतराल [a, b] पर अवकलनीय है और f' संतत है, इसलिए हम माध्य मान प्रमेय (इकाई 7 का प्रमेय 3) लागू कर सकते हैं ।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि वक्र के बिन्दुओं M_{i-1} और M_i के बीच एक ऐसा बिन्दु $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ होता है जहां वक्र की स्पर्श रेखा, जीवा $M_{i-1} M_i$ के समांतर होती है । अर्थात्

$$f'(x_i^*) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

या $\quad \Delta y_i = f'(x_i^*)\ \Delta x_i$

अतः (1) को हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं

$$L_B^A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(x_i^*)\ \Delta x_i]^2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\ \Delta x_i$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)^2]}\, dx$$

है । इसलिए

$$L_A^B = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

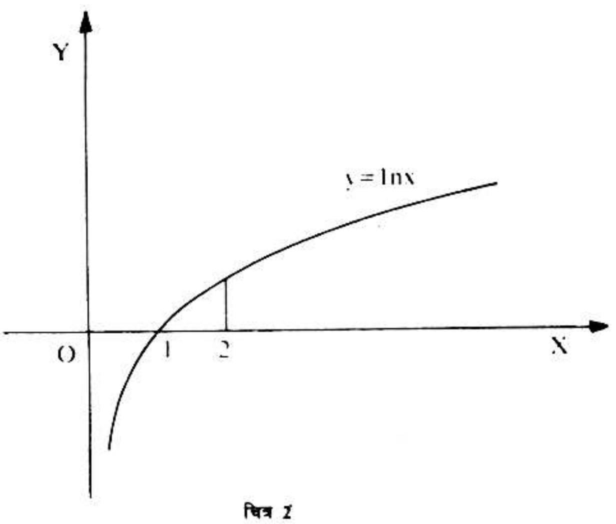
टिप्पणी 1: कभी-कभी x को y के एक एकमानी (single valued) फलन के रूप में व्यक्त कर देने से काफ़ी सुविधा हो जाती है । इस स्थिति में हम x के स्थान पर y और y के स्थान पर x लेकर वक्र की लंबाई प्राप्त करते हैं :

$$L_A^B = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy,$$

जहां समाकलन-सीमाएँ y के सापेक्ष हैं । ध्यान दीजिए कि वक्र के चाप की लंबाई बदलती नहीं है । क्योंकि यह निर्देश-तंत्र (frame of reference) पर निर्भर नहीं करती । हमारे यह मान लेने से कि f' अंतराल [a, b] पर संतत है, यह बात सुनिश्चित हो जाती है कि (3) और (4) के समाकलों का अस्तित्व है और उनका मान L_A^B, कोटि $x = a$ और $x = b$ के बीच वक्र $y = f(x)$ की लंबाई है ।

नीचे दिए गए उदाहरण में (3) और (4) के सूत्रों के प्रयोग को दिखाया गया है ।

उदाहरण 1: मान लीजिए हम वक्र $y = \ln x$ के कोटि $x = 1$ और $x = 2$ द्वारा अंतःखंडित चाप की लंबाई ज्ञात करना चाहते हैं । हमने वक्र $y = \ln x$ को चित्र 2 में दिखाया है ।



चित्र 2

(3) का प्रयोग करने पर हमें इच्छित लंबाई L_1^2 प्राप्त होती है ।

$$L_1^2 = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\, dx, \text{ क्योंकि } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \quad = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

यदि हम $1+x^2 = t^2$, लें, तो $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$, अतः

$$L_1^2 = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1+\frac{1}{(t^2-1)}\right) dt$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t^2-1} dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2}{\sqrt{5}+1} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$$

इस उदाहरण को हल करने के लिए हम (4) का भी प्रयोग कर सकते हैं। इसके लिए हम समीकरण $y = \ln x$ को $x = e^y$ के रूप में लिखेंगे। तब सीमाएँ $x = 1$ और $x = 2$ क्रमशः सीमाओं $y = 0$ और $y = \ln 2$ के संगत होंगी। अतः (4) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$L_0^{\ln 2} = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}}\, dy$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2-1} du, \quad (1+e^{2y} = u^2 \text{ लेने पर})$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1+\frac{1}{u^2-1}\right) du, = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1},$$

यही मान हमने पहले भी प्राप्त किया है । इससे टिप्पणी 1 में दी गई यह बात सत्यापित हो जाती है कि समीकरण (3) और समीकरण (4) दोनों के प्रयोग से हमें चाप की समान लंबाई प्राप्त होती है।

अब हम यहां कुछ प्रश्न दे रहे हैं जिन्हें हल करने का प्रयास आप कर सकते हैं।

E E1) बिन्दुओं (3, 1) और (6, 2) के बीच रेखा $x = 3y$ की लंबाई ज्ञात कीजिए। दूरी सूत्र का प्रयोग करके उत्तर की जांच कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E2) बिन्दुओं $x = 0$ और $x = \frac{\pi}{3}$ के बीच वक्र $y = \ln \sec x$ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

E3) शीर्ष (0, c) और बिन्दु (x, y) के बीच कैटेनरी $y = c \cosh (x/c)$ के चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

E4) अर्धघन परवलय $ay^2 = x^3$ के शीर्ष से बिन्दु (a, a) के बीच की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E5) दिखाइए कि रेखा $3y = 8x$ से प्रतिच्छेदित परवलय $y^2 = 4ax$ के चाप की लंबाई, $a(\ln 2 + 15/16)$ है ।

अगले उपभाग में हम उन वक्रों पर विचार करेंगे जिनके समीकरण प्राचलिक रूप में व्यक्त है ।

16.2.2 प्राचलिक रूप

कभी-कभी वक्र के समीकरण को $y = f(x)$ के रूप में या $x = f(y)$ के रूप में लिखना संभव नहीं होता । इसका एक साधारण उदाहरण वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ है । ऐसी स्थिति में हम वक्र के समीकरण को प्राचलिक रूप में लिखने का प्रयास करते है । उदाहरण के लिए हम ऊपर दिए गए वृत्त को प्राचलिक समीकरण $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ से निरूपित कर सकते हैं ।

यहां हम प्राचलिक समीकरण-युग्म से निरूपित वक्र की लंबाई ज्ञात करने के लिए एक सूत्र ज्ञात करेंगे । मान लीजिए $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, प्राचलिक रूप में वक्र का समीकरण है । पिछले उपभाग की तरह यहां भी हम मान लेते है कि फलन ϕ और ψ दोनों ही अवकलनीय है और अंतराल $[a, b]$ पर इनके अवकलज ϕ' और ψ' संतत है ।

अब, क्योंकि

$$\frac{dx}{dt} = \phi (t), \text{ और } \frac{dy}{dt} = \psi'(t).$$

इसलिए $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$, और

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}}{\phi'(t)} \quad \text{(हम मान लेते हैं कि } \phi'(t) \neq 0).$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

अब (3) का प्रयोग करने पर हमें लंबाई प्राप्त हो जाती है ।

$$L = \int_{x=\phi(\alpha)}^{x=\phi(\beta)} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ \frac{\phi'(t)}{\phi'(t)}\, dt$$

इस तरह $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$

नीचे दिए गए उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जाएगी कि वक्र की लंबाई ज्ञात करने के लिए कभी-कभी उस वक्र के समीकरण को प्राचलिक रूप में व्यक्त कर देने से काफी सुविधा हो जाती है ।

उदाहरण 2: आइए वक्र

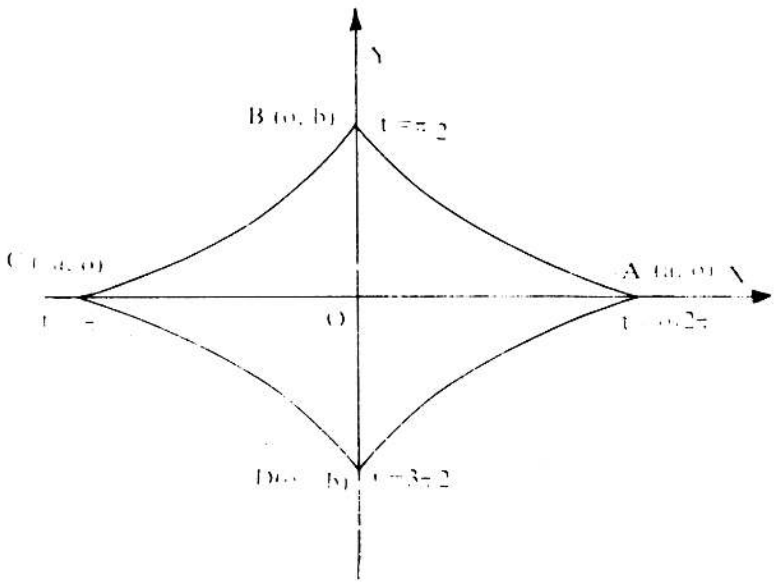
$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$$

की पूरी लंबाई ज्ञात करें ।

$x = a\cos^3 t$ और $y = a\sin^3 t$ दिए हुए वक्र का प्राचलिक रूप है । क्योंकि $-1 \le \cos t \le 1$, और $-1 \le \sin t \le 1$, इसलिए यह वक्र $x = \pm a$ और $y = \pm b$ रेखाओं के बीच स्थित है । यह वक्र दोनों अक्षों के प्रति सममित है, क्योंकि यदि x और y के चिह्न बदल दिए जाएँ तो भी इस समीकरण में कोई बदलाव नहीं आता ।

मान $t = 0$, बिन्दु (a, 0) के संगत है और $t = \pi/2$ बिन्दु (0, b) के संगत है ।

इकाई 9 में बतायी गई वक्र-अनुरेखण विधियों को लागू करके हम इस वक्र को खींच सकते है (देखिए चित्र 3) ।



चित्र 3

क्योंकि यह वक दोनों अक्षों के प्रति सममित है, इसलिए प्रथम चतुर्थांश में इसके भाग की जितनी लंबाई होगी, उसकी चार गुनी इस वक्र की पूरी लंबाई होगी ।

अब, $\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t,\ \frac{dy}{dt} = 3b\sin^2 t\cos t$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t\,(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)$$

अतः वक्र की लंबाई होगीः

$$L = 4\int_0^{\pi/2} 3\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

$u^2 = a^2\cos t^2 t + b^2\sin^2 t$ लेने पर हमें

$$2u = (2b^2 - 2a^2)\sin t\cos t\,\frac{dt}{du}$$

प्राप्त होता है, और सीमाएँ $t = 0$, $t = \pi/2$ क्रमशः $u = a$, $u = b$. के संगत होती हैं।

इस तरह
$$L = 12\int_a^b \frac{u^2\,du}{b^2 - a^2} = \frac{12}{b^2 - a^2}\left(\frac{u^3}{3}\right)_a^b$$

$$= \frac{12}{b^2 - a^2}\,\frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{4(a^2 + b^2 + ab)}{a + b}$$

अब आप समीकरण (6) का प्रयोग निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने में कर सकते हैं।

E E6) चक्रज (cycloid)
$x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$
की लंबाई ज्ञात कीजिए।

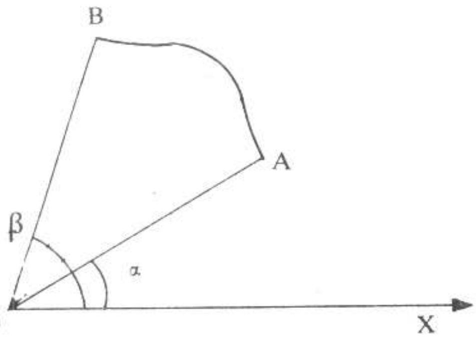
E E7) दिखाइए कि $t = 0$ से $t = \pi/2$ तक वक्र
$x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$ के चाप की लंबाई $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$ है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

16.2.3 ध्रुवी रूप

इस उपभाग में हम उन वक्रों पर विचार करेंगे जिनका समीकरण ध्रुवी रूप में दिया हुआ हो ।

मान लीजिए $r = f(\theta)$ एक वक्र निर्धारित करता है, जबकि θ, α से β तक बदलता है । अर्थात् मान लीजिए कि फलन f अंतराल $[\alpha, \beta]$ में परिभाषित है (देखिए चित्र 4) । पहले की तरह यहां भी हम यह मान लेते हैं कि फलन f अवकलनीय है और इसका अवकलज f′ अंतराल [a, b] पर संतत है । इस कल्पना से यह बात सुनिश्चित हो जाती है कि $r = f(\theta)$ से निरूपित वक्र चापकलनीय है ।



चित्र 4

$r = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ लेकर दिए हुए समीकरणों को कार्तीय निर्देशांकों में रूपांतरित करने पर हमें $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$ प्राप्त होता है ।

प्राचलिक समीकरणों के लिए हमने जो तरीका अपनाया था, उसी को यहां लागू करने पर हम पाएंगे कि

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}{dx/d\theta}$$

अतः वक्र $r = f(\theta)$ के $\theta = \alpha$ से $\theta = \beta$ तक के चाप की लंबाई

$$L = \int_{x=f(\alpha)\cos\alpha}^{x=f(\beta)\cos\beta} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta,$$

चर x को θ के रूप में बदलकर ।

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]^2 + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad \ldots\ldots(5)$$

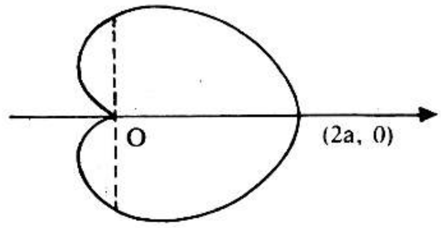
हम इस सूत्र का प्रयोग नीचे दिए गए उदाहरण में वक्र की लंबाई ज्ञात करने में करेंगे।

उदाहरण 3: हृदयाभ (cardioid)

$r = a(1 + \cos\theta)$

$\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$

का परिमाप (perimeter) ज्ञात करते समय हम पहले यह नोट करते हैं कि यह वक्र आदि रेखा के प्रति सममित है (चित्र 5)। इसलिए इसका परिमांप x-अक्ष के ऊपर स्थित वक्र के चाप की लंबाई का दुगुना होगा।



चित्र 5

अब, $\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$. अतः

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\; d\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a.$$

सारणी 1: वक्र के चाप की लंबाई

वक्र का समीकरण	लंबाई 2
$y = f(x)$	$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\; dx$
$x = g(y)$	$\int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\; dy$
$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$	$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\; dt$
$y = f(\theta)$	$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\; d\theta$

इस सारणी की सहायता से अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E E8) वक्र $r = a\cos^3\theta/3$ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E 9) समीकरणों $x = 2\cos t + 3$, $y = 2\sin t + 4$, $0 \le t \le 2\pi$ द्वारा दिए गए त्रिज्या 2 वाले वृत्त की लंबाई ज्ञात कीजिए।

E 10) दिखाइए कि वक्र $r = a(1 + \cos\theta)$ का ऊपरी अर्ध चाप $\theta = 2\pi/3$ से समद्विभाजित होता है।

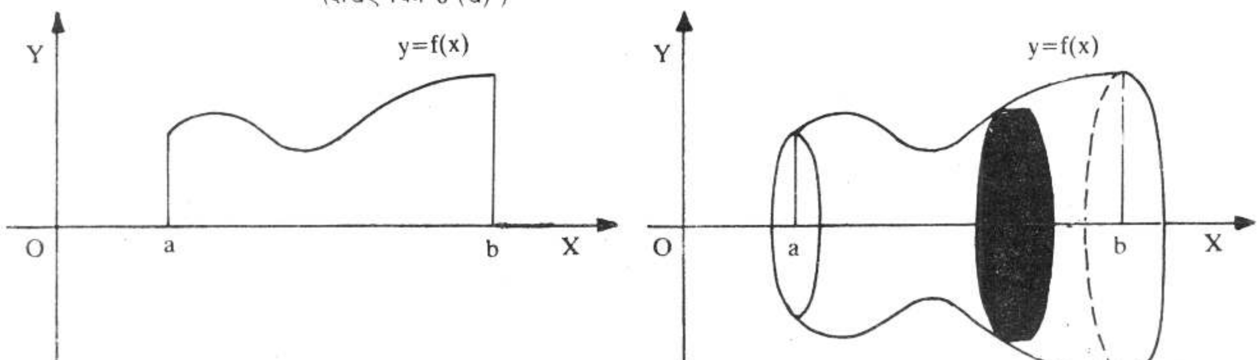
UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E11) वक्र $r = a(\theta^2 - 1)$ के पाश का परिणाम ज्ञात कीजिए ।

इस भाग में हमने कार्तीय, प्राचलिक और ध्रुवी समीकरणों से निरूपित वक्रों की लंबाइयां ज्ञात करने के लिए सूत्र ज्ञात किए हैं और वे लागू किए हैं । आइए इस संबंध में हमने जो कुछ अध्ययन किया है उसे निम्नलिखित सारणी के रूप में प्रस्तुत करें ।

16.3 परिक्रमण-घनाकृति का आयतन

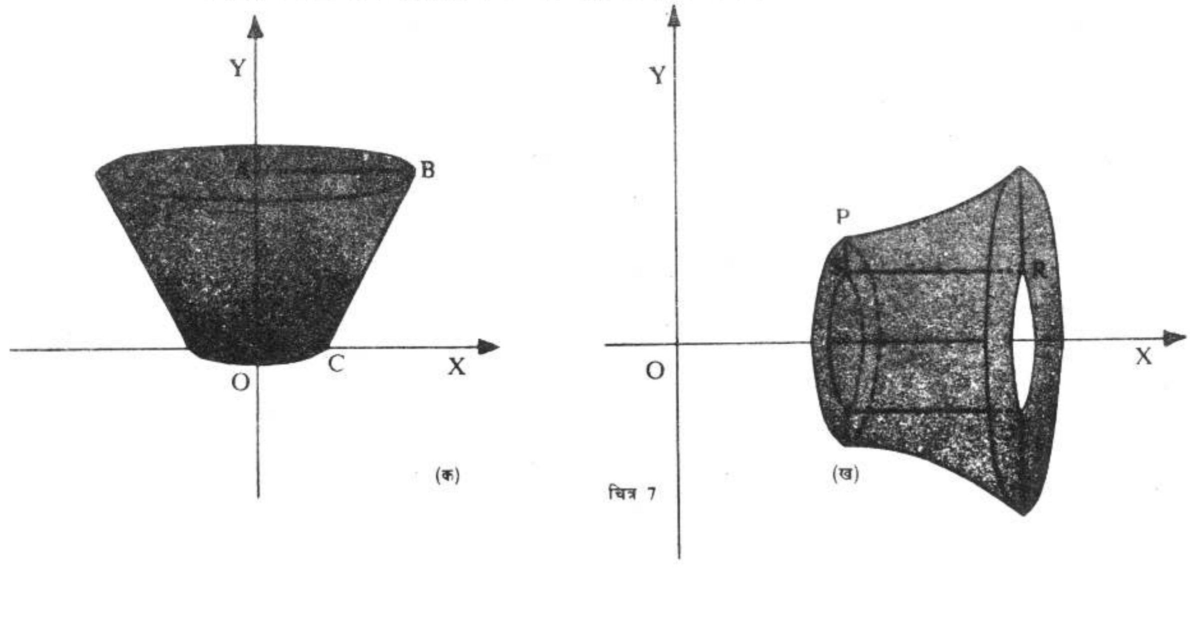
अभी तक इस पाठ्यक्रम में हमारा संबंध केवल समतल वक्रों और प्रदेशों से रहा है । इस भाग में हम यह दिखाएंगे कि किस प्रकार समाकलन का प्रयोग हम कुछ घनाकृतियों (solids) के आयतन ज्ञात करने में कर सकते हैं । चित्र 6 (क) के समतल प्रदेश (region) को देखिए । यह $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ और x-अक्ष से परिबद्ध है । इस समतल प्रदेश को x-अक्ष के प्रति घूर्णन कराने पर हमें एक घनाकृति प्राप्त होती है । (देखिए चित्र 6 (ख))



(क) (ख)

चित्र 6

ऐसी घनाकृतियों को **परिक्रमण-घनाकृति** (Solids of revolution) कहा जाता है । चित्र 7 (क) और 7 (ख) में परिक्रमण-घनाकृतियों के दो और उदाहरण दिए गए हैं ।



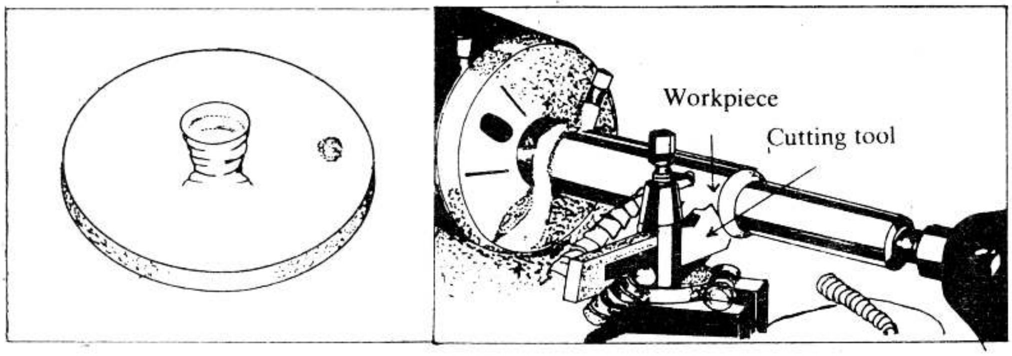
(क) (ख)

चित्र 7

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

चित्र 7(क) में दी गई घनाकृति प्रदेश ABCO का y-अक्ष के प्रति परिक्रमण कराने पर प्राप्त हुई है। चित्र 7(ख) में दी गई परिक्रमण घनाकृति और अन्य आकृतियों में अंतर यह है कि इसका घूर्णन-अक्ष (axis of rotation) घूर्णन कराये गये प्रदेश PQRS की परिसीमा (boundary) का एक अंग नहीं है।

हमें अपने दैनिक जीवन में परिक्रमण-घनाकृतियों के अनेक उदाहरण देखने को मिलते हैं। अपनी चक्की के प्रयोग से कुम्हार द्वारा बनाए गए विभिन्न बर्तन परिक्रमण-घनाकृतियों के उदाहरण हैं। देखिए चित्र 8(क)। लेथ मशीनों से बनाई गई कुछ वस्तुएँ भी परिक्रमण-घनाकृतियां होती हैं। देखिए चित्र 8(ख)।

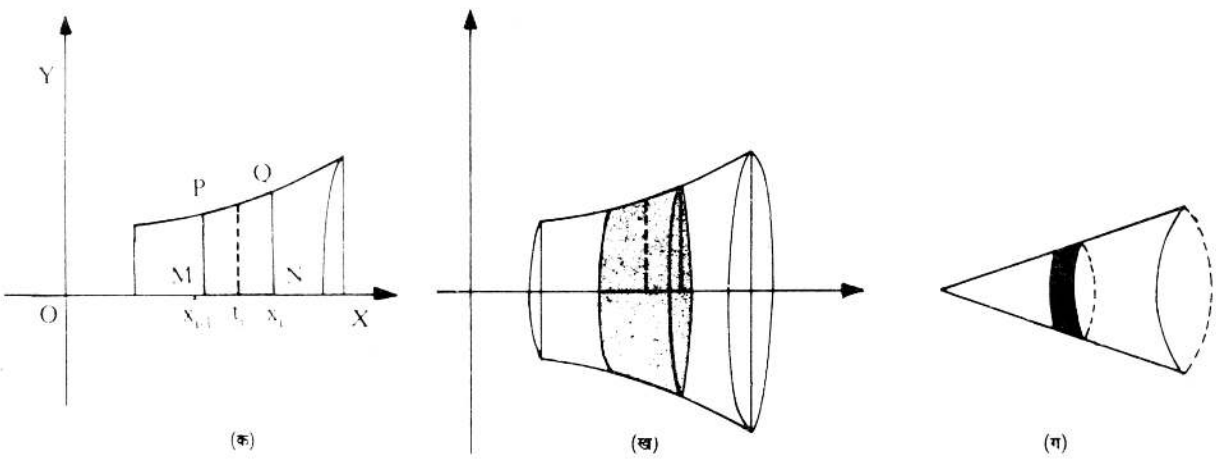


(क) (ख)

चित्र 8

आइए अब हम परिक्रमण-घनाकृति का आयतन ज्ञात करने का प्रयास करें। इसके लिए हम जिस विधि का प्रयोग करने जा रहे हैं उसे स्लाइसन-विधि (slicing method) कहा जाता है। इस विधि को स्लाइसन-विधि क्यों कहा जाता है इसका स्पष्टीकरण आपको नीचे मिल जाएगा।

मान लीजिए $P_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}, x_n = b\}$ n उप-अंतरालों में अंतराल [a, b] का एक विभाजन है।



(क) (ख) (ग)

चित्र 9

मान लीजिए Δx_i, iवें उप-अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ की लंबाई को प्रकट करता है। और यह भी मान लीजिए कि वक्र $y = f(x)$ पर P और Q क्रमशः कोटियों $x = x_{i-1}$ और $x = x_i$ के संगत बिन्दु हैं। तब, वक्र का x-अक्ष के प्रति परिक्रमण या घूर्णन कराने पर छायादार पट्टी PQNM (चित्र 9(क)) से, मोटाई Δx_i की एक चक्रिका (disc) जनित (generate) होती है। सामान्यतः कोटियों PM और QN की लंबाइयां समान नहीं होती है। अतः यह शंकु (cone) का एक छिन्नक (frustum) है, जिसका आयतन Δv_i, $\pi\, PM^2\, MN$ तथा $\pi QN^2\, MN$ के बीच होता है। अर्थात् Δv_i,

$$\pi\, [f(x_{i-1})]^2 \Delta x_i \text{ और } \pi\, [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

के बीच स्थित है। देखिए चित्र 9(ख) और 9(ग)

$\pi\, PM^2.MN$, मोटाई MN और त्रिज्या PM वाली चक्रिका का आयतन है।
$\pi QN^2.\, MN$, मोटाई MN और त्रिज्या QN वाली चक्रिका का आयतन है।

यदि हम यह मान लें कि [a, b] पर f एक संतत फलन है, तो हम

मध्यवर्ती मान प्रमेय (इकाई 2 के प्रमेय 7, साथ में दी गई टिप्पणी को भी देखिए।) लागू कर सकते हैं। और इस आयतन का $\Delta v_i = \pi\, [f(t_i)]^2\, \Delta x_i$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहां t_i, अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ में एक उपयुक्त बिन्दु है। अब सभी चक्रिकाओं के आयतन जोड़ने पर हमें परिक्रमण-घनाकृति के आयतन के एक सन्निकट मान के रूप में

यदि [a, b] पर f संतत है, $f(a) = c$ और $f(b) = d$, और z, c तथा d के बीच स्थित है, तो $\exists\, x_0 \in]a, b[$, जिसके लिए $f(x_0) = z$.

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(t_i)]^2 \Delta x_i, \quad x_{i-1} \le t_i \le x_i,$$

प्राप्त होता है। निश्चित समाकल को परिभाषित करते समय हमने यह देखा है कि जैसे-जैसे विभाजन P_n अधिकाधिक अधिशोधित होता जाता है और उसका मानक (Δx) शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, वैसे-वैसे हमें बेहतर सन्निकट मान प्राप्त होते जाते है। इस तरह, हमें परिक्रमण घनाकृति का आयतन निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

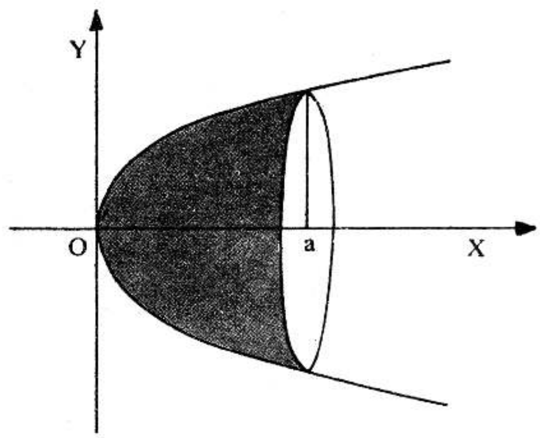
$$V = \lim_{n \to \infty} V_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi [f(t_i)]^2 \Delta x_i$$

$$= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_a^b y^2 \, dx \qquad \ldots(6)$$

अब हम इस सूत्र का प्रयोग नीचे दिए गए उदाहरणों में घनाकृतियों के आयतन ज्ञात करने में करेंगे।

उदाहरण 4: मान लीजिए हम उस परिक्रमण-घनाकृति का आयतन ज्ञात करना चाहते हैं जो कि कोटियों $x = 0$ और $x = a$ के बीच परवलय $y^2 = 4ax$ के चाप को उसके अक्ष के प्रति परिक्रमण कराने से प्राप्त होती है।

यह परिक्रमण-घनाकृति एक परवलयिक टोपी होती है जैसा कि चित्र 10 में दिखाया गया है।



चित्र 10

इस टोपी का आयतन V होगा:

$$V = \int_0^a \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^a 4ax \, dx = 4\pi a \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^a = 2\pi a^3$$

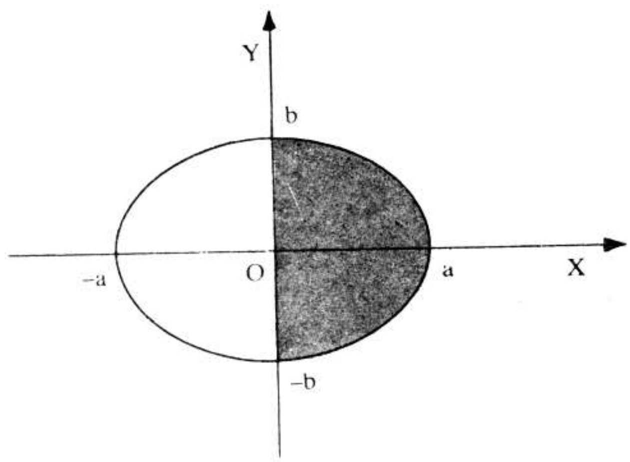
अगले उदाहरण में सूत्र (6) में थोड़ा परिवर्तन करके एक समतल प्रदेश को y-अक्ष के प्रति परिक्रमण कराने पर प्राप्त घनाकृति का आयतन ज्ञात किया गया है।

उदाहरण 5: मान लीजिए दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$ को लघु अक्ष AB के प्रति परिक्रमण कराया गया है (देखिए चित्र 11)।

आइए इस तरह जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात करें।

इस स्थिति में घूर्णन-अक्ष, y-अक्ष है। y-अक्ष के प्रति परिक्रमण कराए गए क्षेत्र को चित्र 11 में छायादार प्रदेश से दिखाया गया है। आप इस बात से सहमत होंगे कि केवल y-अक्ष की दायीं ओर के क्षेत्र पर विचार करना ही काफ़ी होगा।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



चित्र 11

इस घनाकृति का आयतन ज्ञात करने के लिए (6) में x के स्थान पर y, और y के स्थान पर x लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$V = \int_{-b}^{b} \pi x^2 \, dy = \int_{-b}^{b} \pi a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy, \text{ क्योंकि } x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$= 2\pi a^2 \int_{0}^{b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy, \text{ क्योंकि } 1 - \frac{y^2}{b^2}, \text{ y का एक सम फलन है।}$$

$$= 2\pi a^2 \left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b$$

$$= \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

हम प्राचलिक अथवा ध्रुवी समीकरणों से दिए गए वक्रों पर लागू करने के लिए सूत्र (9) में उचित परिवर्तन कर सकते हैं।

आइए इन पर एक-एक करके विचार करें।

प्राचलिक रूप

यदि वक्र $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ से परिभाषित हो, तो x-अक्ष के प्रति परिक्रमण-घनाकृति का आयतन सूत्र (6) में x और y के स्थान पर क्रमशः $\phi(t)$ और $\psi(t)$ प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जा सकता है। इस तरह,

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left[\psi(t)\right]^2 \frac{dx}{dt} \, dt$$

या $$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left[\psi(t)\right]^2 \phi'(t) \, dt.$$

अब हम ध्रुवी समीकरण में दिए गए वक्रों के लिए सूत्र प्राप्त करेंगे।

ध्रुवी रूप :

मान लीजिए एक वक्र $r = f(\theta)$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ द्वारा परिभाषित है। $x = a$, $x = b$, x-अक्ष और $r = f(\theta)$ से परिबद्ध क्षेत्र को x-अक्ष के प्रति परिक्रमण कराने से जनित घनाकृति का आयतन होगा:

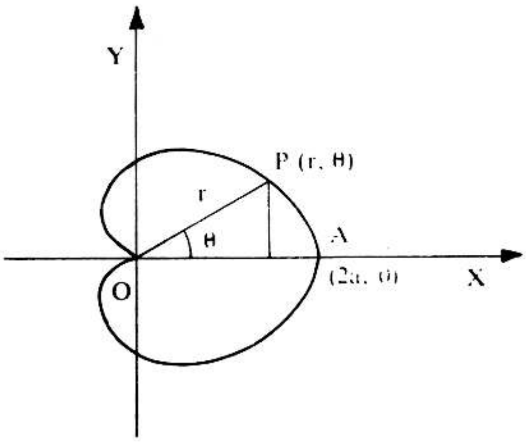
UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$V = \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r \sin \theta)^2 \frac{d}{d\theta} (r \cos \theta)\, d\theta$$

इस तरह, $V = \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta) \sin \theta]^2 [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta]\, d\theta$

आइए अब हम इस सूत्र का प्रयोग अपनी आदि रेखा के प्रति हृदयाभ द्वारा जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात करने में करें।

उदाहरण 6: चित्र 12 में दिखाया गया हृदयाभ $r = a(1 + \cos \theta)$ है।



चित्र 12

बिन्दु A और O, क्रमशः $\theta = 0$ और $\theta = \pi$ के संगत हैं। यहां भी केवल आदि रेखा के ऊपर स्थित हृदयाभ के भाग पर ही विचार करना हमारे लिए काफ़ी होगा। इस तरह,

$$V = \int_{\pi}^{0} \pi (r \sin \theta)^2 \frac{d}{d\theta} (r \cos \theta)\, d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 \sin^3 \theta\, (1 + 2 \cos \theta)\, d\theta, \text{ क्योंकि } r = a(1 + \cos \theta)$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} 8 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2} . 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} \left(4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) d\theta$$

$$= 128\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^9 \frac{\theta}{2}\, d\theta - 32\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^7 \frac{\theta}{2}\, d\theta,$$

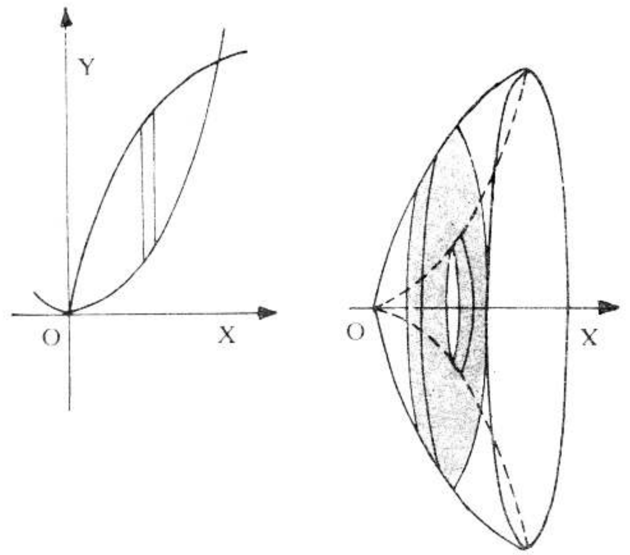
$$= 256\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3\phi \cos^9 \phi\, d\phi - 64\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \phi \cos^7 \phi\, d\phi, \; (\phi = \theta/2)$$

$$= \frac{64\pi a^3}{15} - \frac{8\pi a^3}{5} - \frac{8\pi a^3}{3},$$ (इकाई 12 से समानयन सूत्र लागू करने पर)

अभी तक दिए गए सभी उदाहरणों में घूर्णन-अक्ष, घूर्णन कराये गये प्रदेश की परिसीमा था। अब हम एक ऐसा उदाहरण लेंगे जिसमें प्रदेश को घूर्णन अक्ष केवल एक बिन्दु पर स्पर्श करता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

उदाहरण 7: आइए हम परवलय $y = x^2$ और $y^2 = 8x$ से परिबद्ध क्षेत्र को x-अक्ष के प्रति परिक्रमण कराने से प्राप्त घनाकृति का आयतन ज्ञात करें। हमने घूर्णन किए क्षेत्र और घनाकृति को क्रमशः चित्र 13 (क) और (ख) में दिखाया है।



(क) चित्र 13 (ख)

यहां इच्छित आयतन परवलय $y^2 = 8x$ से जनित घनाकृति के आयतन और परवलय $y = x^2$ से जनित घनाकृति के आयतन का अंतर होगा।

इस तरह $$V = \pi \left[\int_0^2 8x\, dx - \int_0^2 x^4\, dx \right]$$

$$= \pi \left[4x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{48\pi}{5}$$

यहां समाकलन सीमाओं पर ध्यान दीजिए।

यहां हम कुछ प्रश्न दे रहे हैं जिन्हें आप इस भाग में प्राप्त किए गए सूत्रों को लागू करके हल कर सकते हैं।

E E12) ऊंचाई h और त्रिज्या r के वृत्तीय आधार वाले लंब वृत्तीय शंकु (right circular cone) का आयतन ज्ञात कीजिए।
(संकेत: यह शंकु x-अक्ष और रेखा $y = (r/h)x$ से परिबद्ध त्रिभुज का घूर्णन करने पर जनित होगा।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E E13) दिखाइए कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ को x-अक्ष के प्रति परिक्रमण कराने से जनित घनाकृति का आयतन $32\pi a^3/105$ है ।

E E14) $[0, 2\pi]$ में चक्रज $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ के चाप का y-अक्ष के प्रति घूर्णन किया गया है । जनित आयतन ज्ञात कीजिए ।

सावधानी : ध्यान रहे कि यहां घूर्णन y-अक्ष के प्रति किया गया है ।

E E15) लिमेसोन $r = a + b \cos \theta$ को आदि रेखा के प्रति परिक्रमण कराने से प्राप्त घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए ।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E16) $y - 2 = \sqrt{9-x^2}$ और $y = 2$ से परिबद्ध अर्धवृत्तीय प्रदेश को x-अक्ष के प्रति घूर्णित किया गया है। इस प्रकार जनित धनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए।

16.4 परिक्रमण-पृष्ठ का क्षेत्रफल

यदि एक समतल प्रदेश के स्थान पर हम x-अक्ष के प्रति एक वक्र को घूर्णित करें तो हमें एक परिक्रमण-पृष्ठ (surface of revolution) प्राप्त होगा। इस भाग में हम इसी प्रकार के पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र प्राप्त करेंगे। आइए हम उस वक्र द्वारा जनित पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसका समीकरण कार्तीय रूप में हो।

कार्तीय रूप

मान लीजिए वक्र $y = f(x)$ को x-अक्ष के प्रति घूर्णित कराया गया है (चित्र 14)। इस प्रकार जनित पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम अंतराल $[a, b]$ का एक विभाजन P_n अर्थात्

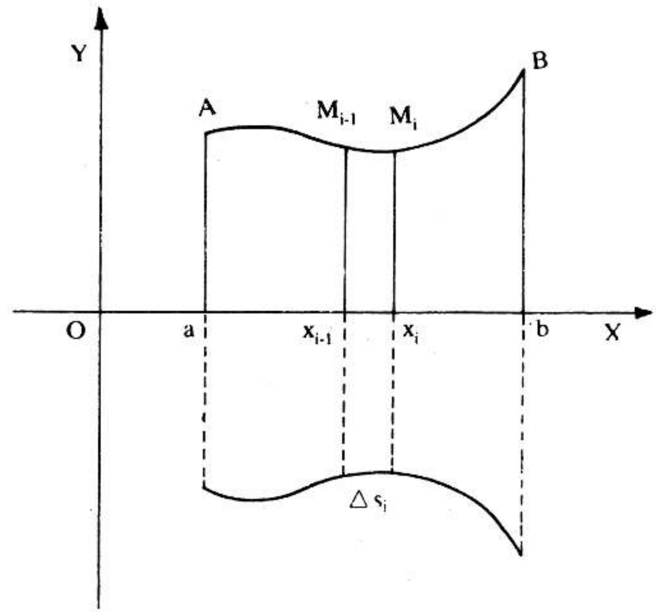
$$P_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$$ लेते हैं।

मान लीजिए रेखाएं $x = x_i$, वक्र को बिन्दुओं M_i, $i = 1, 2 \ldots\ldots, n$ पर काटती हैं। यदि हम जीवा $M_{i-1} M_i$ को x-अक्ष के प्रति परिक्रमित करें तो हमें मोटाई $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ वाले शंकु-छिन्नक का पृष्ठ प्राप्त होगा। मान लीजिए Δs_i इस छिन्नक के पृष्ठ का क्षेत्रफल है। तब सभी छिन्नकों का संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल होगा :

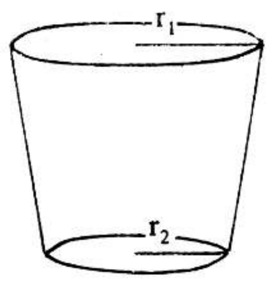
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$

यह S_n परिक्रमण-पृष्ठ के क्षेत्रफल का एक सन्निकट मान है। अतः $n \to \infty$ और प्रत्येक $\Delta x_i \to 0$ होने पर S_n की सीमा (यदि उसका अस्तित्व हो) से हमें वक्र $y = f(x)$ से जनित परिक्रमण-पृष्ठ का क्षेत्रफल प्राप्त हो जाता है।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



चित्र 14



किसी छिन्नक के वक्र-पृष्ठ (curved surface) का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम सूत्र $A = \pi (r_1 + r_2) L$ का प्रयोग करते हैं, जहां L छिन्नक की तिरछी ऊँचाई (slant height) है और r_1 तथा r_2 इसके आधारों की त्रिज्याएँ हैं (चित्र 15) ।

यहां लिए गए छिन्नक के फलकों की त्रिज्याएँ $f(x_{i-1})$ और $f(x_i)$ है, जबकि इसकी तिरछी ऊँचाई $M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, जहां $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. यहां हम यह मान लेते हैं कि [a, b] पर f अवकलनीय है और f′ संतत है । तब माध्य मान प्रमेय (इकाई 7 के प्रमेय 3) के अनुसार हमें किसी $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ के लिए $\Delta y_i = f'(t_i)\,\Delta x_i$, प्राप्त होता है ।

अतः $$\Delta s_i = \pi\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= 2\pi \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right) \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\ \Delta x_i.$$

और $$S_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\ \Delta x_i$$

$n \to \infty$, और प्रत्येक $\Delta x_i \to 0$, पर सीमा लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है ।

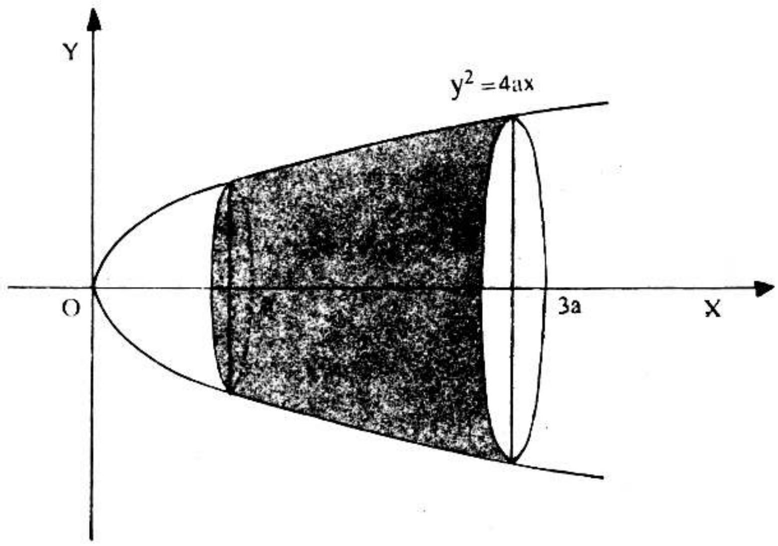
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx \qquad \ldots(7)$$

अब हम इस सूत्र के प्रयोग से संबंधित एक उदाहरण देंगे ।

उदाहरण 8: आइए हम $x = a$ और $x = 3a$ के बीच परवलय $y^2 = 4ax$ को x-अक्ष के प्रति परिक्रमित कराने से प्राप्त परिक्रमण-पृष्ठ (चित्र 16) का क्षेत्रफल ज्ञात करें ।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24



चित्र 16

परिक्रमण पृष्ठ का क्षेत्रफल

$$S = 2\pi \int_a^{3a} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

जहां $y^2 = 4ax$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{y}$. अतः

$$S = 2\pi \int_a^{3a} y \sqrt{1 + 4a^2/y^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_a^{3a} \sqrt{y^2 + 4a^2}\, dx = 2\pi \int_a^{3a} \sqrt{4ax + 4a^2}\, dx$$

$$= 4\pi \sqrt{a} \int_a^{3a} \sqrt{x + a}\, dx = 4\pi \sqrt{a}\, \frac{2}{3} \left[(x+a)^{3/2} \right]_a^{3a}$$

$$= \frac{8\pi a^2}{3} \left[4^{3/2} - 2^{3/2} \right]$$

यदि हम वक्र को x-अक्ष के प्रति परिक्रमण न कराके y-अक्ष के प्रति परिक्रमित करें, तो हमें एक अन्य परिक्रमण-पृष्ठ प्राप्त होता है । वक्र $x = g(y)$, $c \le y \le d$ का y-अक्ष के प्रति परिक्रमण कराने से प्राप्त परिक्रमण- पृष्ठ का क्षेत्रफल होगा ।

$$S = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dx$$

आइए अब हम प्राचलिक समीकरणों से निरूपित वक्रों पर विचार करें ।

प्राचलिक रूप

मान लीजिए एक वक्र के प्राचलिक समीकरण $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$ हैं । हम जानते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

इस मान को सूत्र (7) में प्रतिस्थापित करने पर हमें x-अक्ष के प्रति वक्र के परिक्रमण से प्राप्त परिक्रमण-पृष्ठ का निम्नलिखित क्षेत्रफल प्राप्त होता है ।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\psi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt$$

अब हम ध्रुवी समीकरण से निरूपित वक्र द्वारा जनित पृष्ठ के लिए सूत्र देंगे।

ध्रुवी रूप

यदि $r = h(\theta)$ वक्र का ध्रुवी समीकरण हो तो $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ के लिए वक्र के चाप द्वारा आदि रेखा के प्रति परिक्रमण करने पर जनित परिक्रमण-पृष्ठ का क्षेत्रफल होगाः

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\ d\theta.$$

इस भाग के अंत में दिए गए प्रश्नों को हल करने से पहले नीचे दिए उदाहरणों का अध्ययन अच्छी तरह से कर लीजिए।

उदाहरण 9: मान लीजिए ऐस्ट्रॉइड $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ को x-अक्ष के प्रति परिक्रमित कराया गया है। आइए हम परिक्रमण-पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करें। आप इस बात से सहमत होंगे कि हमें x-अक्ष के ऊपर स्थित वक्र के भाग पर ही केवल विचार करने की आवश्यकता है। इस भाग में $y > 0$, और इसलिए t का मान $-\pi/2$ और $\pi/2$ के बीच होता है।

अब $\quad \dfrac{dx}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t, \quad \dfrac{dy}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t.$

इसलिए $\quad \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$

अतः $$S = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos^3 t \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t}\ dt$$

$$= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos^3 t\ |3a \sin t \cos t|\ dt$$

$$= 6\pi a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t\ |\sin t|\ dt$$

$$= 12\pi a^2 \int_{0}^{\pi/2} \cos^4 t \sin t\ dt = -12\pi a^2 \left| \frac{\cos^5 t}{5} \right|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{12}{5} \pi a^5$$

उदाहरण 10 : मान लीजिए हम आदि रेखा के प्रति हृदयाभ $r = a(1 + \cos\theta)$ को परिक्रमण करने से प्राप्त पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते है। यहां ध्यान दीजिए कि हृदयाभ आदि रेखा के प्रति सममित है और इस रेखा का ऊपरि भाग $\theta = 0$ से $\theta = \pi$ तक के θ के मानों के संगत है। पूरे वक्र का आदि रेखा के प्रति परिक्रमित करने से जनित पृष्ठ वही होता है जो कि वक्र के ऊपर के आधे भाग से जनित पृष्ठ है।

अतः

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} r \sin\theta \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\ d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} a(1 + \cos\theta) \sin\theta \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\ d\theta$$

क्योंकि $r = a(1 + \cos\theta)$, और $\dfrac{dr}{d\theta} = -a \sin\theta$, इसलिए

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

हमें $r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$

प्राप्त होता है

$$\text{अतः} \quad S = 2\pi \int_0^{\pi} a\,(1+\cos\theta)\sin\theta\, 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 4\sin\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 32\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin\cos^4 d\,\phi\,,$$

$$= 32\pi a^2 \left| \frac{-\cos^5\phi}{5} \right|_0^{\pi/2} = \frac{32\pi a^2}{5}$$

E E17) x-अक्ष के प्रति वृत्त r = a के परिक्रमण से जनित पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, और तब सत्यापित कीजिए कि त्रिज्या a वाले गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल $4\pi a^2$ है।

E E18) x-अक्ष के प्रति x = 0 और x = π के बीच वक्र y = sin x के चाप का परिक्रमण कराया गया है। इस प्रकार जनित परिक्रमण-घनाकृति का पृष्ठ-क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E19) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ x-अक्ष के प्रति परिक्रमण करता है। इस तरह प्राप्त परिक्रमण-घनाकृति का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E20) [illegible] कि वक्र $x = t^2$, $y = t - t^3/3$ के पाश को x-अक्ष के प्रति परिक्रमित [illegible] घनाकृति का पृष्ठ क्षेत्रफल 3π है।

E21) चक्रज $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ को [illegible] $y = 0$ के प्रति परिक्रमण कराने से जनित घनाकृति का पृष्ठ-क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

हमने इस इकाई में जो अध्ययन किया है, उसे जल्दी से दोहरा लें।

16.5 सारांश

इस इकाई में हमने

1) वक्र की लंबाई,

2) परिक्रमण-घनाकृति का आयतन, तथा

3) परिक्रमण-पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उचित सूत्र प्राप्त किये।

प्रत्येक स्थिति के लिए हमने कार्तीय, प्राचलिक अथवा ध्रुवी रूप के समीकरणों से निरूपित वक्रों के लिए सूत्र प्राप्त किये हैं। यहां हम प्राप्त हुए परिणामों को सारणियों के रूप में प्रस्तुत कर रहे हैं।

वक्र के चाप की लंबाई

समीकरण	लंबाई
$y = f(x)$	$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$
$x = g(y)$	$\int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy$
$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$
$r = f(\theta)$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$

परिक्रमण-घनाकृति का आयतन

समीकरण	आयतन
x-अक्ष के प्रति $y = f(x)$	$\pi \int_a^b y^2\, dx$
y-अक्ष के प्रति $x = g(y)$	$\pi \int_c^d x^2\, dy$
x-अक्ष के प्रति $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$	$\pi \int_\alpha^\beta [\psi(t)]^2 \phi'(t)\, dt$
आदि रेखा के प्रति $r = f(\theta)$	$\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} [h(\theta) \sin\theta]^2 [h'(\theta) \cos\theta - h(\theta) \sin\theta]\, d\theta$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

परिक्रमण-पृष्ठ का क्षेत्रफल

समीकरण	क्षेत्रफल
x-अक्ष के प्रति $y = f(x)$	$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$
y-अक्ष के प्रति $x = g(y)$	$2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy$
x-अक्ष के प्रति $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$	$2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt$
आदि रेखा के प्रति $r = h(\theta)$	$2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin\theta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

16.6 हल और उत्तर

E1) $$L = \int_c^d \sqrt{1 + (dx/dy)^2}\, dy$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + (3)^2}\, dy$$

$$= \sqrt{10} \int_1^2 dy = \sqrt{10}.$$

दूरी सूत्र से,

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 6)^2 + (1 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{10}.$$

E2) $$L = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x} . \sec x \tan x = \tan x\right)$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sec x\, dx = \ln | \sec x + \tan x | \Big]_0^{\pi/3}$$

$$= \ln \left| \frac{\sec \pi/3 + \tan \pi/3}{\sec 0 + \tan 0} \right| = \ln (2 + \sqrt{3})$$

E3) $$L = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2(x/c)}\, dx$$

$$= \int_0^x \cosh (x/c)\, dx$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$= c \sinh (x/c)\Big]_0^x = c \sinh (x/c)$$

E4) $y = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$ $\quad dy/dx = (3/2)\sqrt{\frac{x}{a}}$

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^a \sqrt{4a + 9x}\, dx$$

$$= \frac{1}{27\sqrt{a}} (4a + 9x)^{3/2}\Big]_0^a$$

$$= \frac{1}{27\sqrt{a}} [(13a)^{3/2} - (4a)^{3/2}] = \frac{a}{27}(13^{3/2} - 8)$$

E5) $3y = 8x \Rightarrow y = \frac{8x}{3}$. इस मान को $y^2 = 4ax$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{64x^2}{9} = 4ax$$

$$\Rightarrow 64x^2 - 36ax = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ or } x = \frac{9a}{16}$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ or } y = \frac{3a}{2}$$

अतः $(0, 0)$ तथा $\left(\frac{9a}{16}, \frac{3a}{2}\right)$ प्रतिच्छेद बिन्दु हैं।

अब $4ax = y^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a}$

$$L = \int_0^{3a/2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4a^2}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^{3a/2} \sqrt{4a^2 + y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2a} \left| \frac{y}{2}\sqrt{4a^2 + y^2} + 2a^2 \ln |y + \sqrt{4a^2 + y^2}| \right]_0^{3a/2}$$

$$= \frac{1}{2a} \left| \frac{15a^2}{8} + 2a^2 \ln 2 \right|$$

$$= \left(\frac{15}{16} + \ln 2\right) a$$

E6) $\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a \sin\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2 [1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta + \sin^2\theta]$$

$$= 2a^2 (1 - \cos\theta)$$

$$= 4a^2 \sin^2(\theta/2)$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$$\therefore L = 2a \int_0^{2\pi} \sin(\theta/2)\, d\theta$$

$$= 4a \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi$$

$$= 8a \int_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi = 8a$$

E7) $\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t + \sin t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$

$$\therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2e^{2t}$$

$$\therefore L = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^t\, dt = \sqrt{2}\, e^t \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \sqrt{2}\,(e^{\pi/2} - 1)$$

E8) $r = a\cos^3\frac{\theta}{3} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -a\cos^2\frac{\theta}{3}\sin\frac{\theta}{3}$

$$\therefore r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2\cos^6\frac{\theta}{3} + a^2\cos^4\frac{\theta}{3}\sin^2\frac{\theta}{3}$$

$$= a^2\cos^4\frac{\theta}{3}$$

$$\therefore L = a\int_0^{3\pi/2} \cos^2\frac{\theta}{3}\, d\theta = 3a\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi\, d\phi$$

$$= \frac{3a\pi}{4}$$

E9) $\frac{dx}{dt} = -2\sin t$ $\frac{dy}{dt} = 2\cos t$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 2$$

$$\therefore L = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi$$

नोट कीजिए कि $L = 2\pi r$ क्योंकि यहां $r = 2$.

E10) $r = a(1 - \cos\theta)$, $\frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$

$$\therefore \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

उपरि आधे हिस्से में वक्र की लंबाई है:

$$L = \int_0^{\pi} 2a\sin(\theta/2)\, d\theta = 4a.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

$\theta = 0$ से $\theta = 2\pi/3$ तक वक्र के चाप की लंबाई है:

$$= \int_0^{2\pi/3} 2a \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 2a$$

$\therefore \theta = 2\pi/3$ से वक्र का उपरि आधा हिस्सा दो समान भागों में बंट जाता है।

11) $r = a(\theta^2 - 1),\ \dfrac{dr}{d\theta} = 2a\,\theta$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2[\theta^4 - 2\theta^2 + 1 + 4\theta^2]$$

$$= a^2(\theta^2 + 1)^2.$$

$$\therefore L = a\int_{-1}^{1} (\theta^2 + 1)^2\, d\theta$$

$$= a\left(\frac{\theta^3}{3} + \theta\right)\Bigg]_{-1}^{1}$$

$$= a\left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8a}{3}$$

E12) $V = \pi \displaystyle\int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2\, dx$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\ \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

E13) $V = 2\pi \displaystyle\int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx$

$$= 2\pi \int_0^a (a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi\left[a^2x - \frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3} + \frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{32\pi a^3}{105}$$

ध्यान दीजिए कि संपूर्ण जनित आयतन, $x=0$ और $x=a$ के बीच स्थित वक्र के चाप से जनित आयतन का दुगुना है।

E14) $x^2 = a^2(t - \sin t)^2,\ \dfrac{dy}{dt} = a\sin t$

$$\therefore V = \pi\int_0^{2\pi} a^2(t - \sin t)^2\, a\sin t\, dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (t^2\sin t - 2t\sin^2 t + \sin^3 t)\, dt$$

$$= \pi a^3(-4\pi^2 - 2\pi^2) = -6\pi^3 a^3.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E15) $r = a + b\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{d(r\cos\theta)}{d\theta}$

$$= (a + b\cos\theta)(-\sin\theta) - b\sin\theta\cos\theta$$

$$= -a\sin\theta - 2b\sin\theta\cos\theta.$$

$$\therefore V = \pi\int_0^{\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta}\, d\theta$$

$$= -\pi\int_0^{\pi} (a + b\cos\theta)^2 \sin^2\theta\,(a\sin\theta + 2b\sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= -\pi\int_0^{\pi} (a^3\sin^3\theta + 4a^2b\ \sin^3\theta\cos\theta + 5ab^2\sin^3\theta\cos^2\theta + 2b^3\sin^3\theta\cos^3\theta)\, d\theta$$

$$= -\pi\left[2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\, d\theta + 10ab^2\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^2\theta\, d\theta\right]$$

(अन्य दो समाकलों का मान शून्य के बराबर है, क्योंकि $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$).

$$= -\pi\left[\frac{4a^3}{3} + 10ab^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta\right]$$

(एक समानयन-सूत्र लागू करके)

$$= -\pi\left[\frac{4a^3}{3} - \frac{4ab^2}{3}\right] = \frac{4\pi a}{3}(b^2 - a^2)$$

E16) $V = 2\pi\left[\int_0^3 (2 + \sqrt{9 - x^2})^2\, dx - \int_0^3 4\, dx\right]$

$$= 2\pi\left[\int_0^3 (4 + 9 - x^2 + 4\sqrt{9 - x^2})\, dx - 12\right]$$

$$= 2\pi\left[13x - \frac{x^3}{3} + 2x\sqrt{9 - x^2} + 18\sin^{-1}\frac{x}{3}\right] - 24\pi$$

$$= 36\pi + 18\pi^2 = 18\pi(3 + \pi)$$

E17) $r = a \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = 0$

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} a\sin\theta\sqrt{a^2 + 0}\, d\theta$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta \quad \text{since } \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$= 4\pi a^2\cos\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 4\pi a^2.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E18) $y = \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$

$$\therefore \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 x}$$

$$\therefore S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt, \text{ if } t = \cos x$$

$$= 4\pi \left[\frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{1 + t^2} \right| \right]_0^1$$

$$= 2\sqrt{2}\pi + 2\pi \ln (1 + \sqrt{2}).$$

E19) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$S = 4\pi \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}\, dx$$

$$= \frac{4\pi b \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2}\, dx$$

$$= \frac{4\pi b \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left[\frac{x}{2} \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2} + \frac{a^4}{2(a^2 - b^2)} \sin^{-1} \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right]_0^a$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

E20) वक्र का पाश $t = -\sqrt{3}$ और $t = \sqrt{3}$ के बीच है। सममिति के कारण केवल $t = 0$ और $t = \sqrt{3}$ के बीच के वक्र पर विचार करना काफी होगा।

$$\therefore S = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \sqrt{4t^2 + (1 - t^2)^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{3}\right) dt$$

$$= 2\pi \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6} - \frac{t^6}{18}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 3\pi.$$

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24

E21) $$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta) \sqrt{a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta) \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3\phi\, d\phi$$

$$= 32\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3\phi\, d\phi$$

$$= 32\pi a^2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{64\pi a^2}{3}$$

16.7 शब्दावली

घनाकृति	solid
चापकलन	rectification
छिन्नक	frustum
निर्देश-तंत्र	frame of reference
परिक्रमण	revolution
परिमाप	perimeter
परिसीमा	boundary
पृष्ठ	surface
वक्र पृष्ठ	curved surface

UGMM-01 Qty.1000 Plate-24